Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М. Г. Дмитриев

(Красноярск)

Показано, что оптимальные траектории в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом с большим параметром при управлении близки в некотором смысле к решениям специально конструируемой задачи того же типа меньшей размерности, причем управлениями в этой новой задаче являются «быстрые» составляющие фазовых переменных.

В приложениях математическая модель управляемого объекта может содержать большие коэффициенты усиления порядка ε^{-1} при управлении ($\varepsilon > 0$ — малый параметр). Такие модели оказываются сингулярно-возмущенными [1], и в них часть движений быстрые, а часть — медленные. На это указано, в частности, в работах Е. И. Геращенко (см. [2]), где изучался вопрос о разделении движений в замкнутой системе регулирования с большим коэффициентом усиления при управляющем воздействии.

Задачи оптимального управления с дифференциальными связями такого вида на практике обычно решают так: уравнения, содержащие ε^{-1}, умножаются на ε, затем полагают $\varepsilon = 0$, при этом весь вектор управления или часть его координат обращается в нуль, а соответствующие фазовые переменные становятся управлениями в полученной задаче меньшей размерности. Например, в задаче управления полетом ракеты в вакууме (плоский случай), указанной автору Н. Н. Моисеевым, при расчетах пренебрегают вращательным движением вокруг центра масс, т. е. считают управлением фазовую переменную — угол, связанный с направлением тяги, а управлением — крутящим моментом — пренебрегают (см. также [3]).

Приведем обоснование такого приема на примере одной частной задачи аналитического конструирования регулятора состояния.

Пусть требуется найти r-мерную непрерывную вектор-функцию $v(t)$, которая минимизирует функционал

$$I(v) = \frac{1}{2} x'(T) F x(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} (x'Q(t)x + v'R(t)v)\,dt \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\begin{gathered} x_1^{\bullet} = A_1(t)\,x_1 + A_2(t)\,x_2 + B_1(t)\,v, \quad x_1(t_0) = x_1^{\circ} \\ x_2^{\bullet} = A_3(t)\,x_1 + A_4(t)\,x_2 + \varepsilon^{-1} B_2(t)\,v, \quad x_2(t_0) = x_2^{\circ} \\ x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}, \quad x_1 \in E^n, \quad x_2 \in E^m, \quad Q = \begin{Vmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2' & F_3 \end{Vmatrix} \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь все матрицы дважды непрерывно дифференцируемы по t, $R(t)$ и $Q(t)$ — положительно-определенные на $[t_0, T]$ матрицы, F — постоянная положительно-определенная матрица, штрих означает транспонирование.

Далее для простоты будем считать $B_1(t) \equiv 0$. Пусть $B_2(t)$ — $m \times r$-матрица ранга r и $m = r$, тогда, не теряя общности (см., например, [4]), можно положить $B_2(t) \equiv E$ (E — единичная матрица размерности r).

С учетом допущений перепишем (2) в виде

$$(3) \qquad \begin{aligned} &x_1^{\boldsymbol\cdot} = A_1(t)\,x_1 + A_2(t)\,x_2, \quad x_1(t_0) = x_1^\circ \\ &\varepsilon x_2^{\boldsymbol\cdot} = \varepsilon A_3(t)\,x_1 + \varepsilon A_4(t)\,x_2 + v, \quad x_2(t_0) = x_2^\circ \end{aligned}$$

т. е. система содержит малый параметр ε при производных, и можно ожидать, что краевая задача принципа максимума Понтрягина для задачи (1), (3) будет сингулярно-возмущенной. Действительно, имеем ($v = R^{-1}p_2$)

$$(4) \qquad \begin{aligned} &x_1^{\boldsymbol\cdot} = A_1(t)\,x_1 + A_2(t)\,x_2 \\ &\varepsilon x_2^{\boldsymbol\cdot} = \varepsilon A_3(t)\,x_1 + \varepsilon A_4(t)\,x_2 + R^{-1}p_2 \\ &p_1^{\boldsymbol\cdot} = Q_1(t)\,x_1 + Q_2(t)\,x_2 - A_1'(t)\,p_1 - \varepsilon A_3'(t)\,p_2 \\ &\varepsilon p_2^{\boldsymbol\cdot} = Q_2'(t)\,x_1 + Q_3(t)\,x_2 - A_2'(t)\,p_1 - \varepsilon A_4'(t)\,p_2 \\ &x_1(t_0) = x_1^\circ,\ x_2(t_0) = x_2^\circ;\ p_1(T) = -(F_1x_1(T) + F_2x_2(T)) \\ &p_2(T) = -\varepsilon^{-1}(F_2'x_1(T) + F_3x_2(T)) \end{aligned}$$

Здесь $p_1(t)$, $p_2^\circ(t) = \varepsilon p_2(t)$ — сопряженные переменные принципа максимума, $x_2(t)$, $p_2(t)$ — быстрые, а $x_1(t)$ и $p_1(t)$ — медленные переменные. При $\varepsilon = 0$ для x_2 и p_2 теряются, вообще говоря, дополнительные условия при $t = t_0$ и $t = T$ соответственно, что приводит к возникновению вблизи этих точек зон пограничного слоя.

Особенность (4) заключается также в сингулярности условия для $p_2(T)$ при $\varepsilon = 0$. Вследствие этого в пределе при $\varepsilon \to 0$ краевое условие для медленной сопряженной переменной изменяется скачком и соответственно внеинтегральный член предельной вариационной задачи меньшей размерности изменяется также скачком. Задачи такого рода рассматривались ранее [1].

Опираясь на результаты работы [7], рассмотрим предельный переход в решениях (4), используя переход от (4) к задаче Коши для уравнения Риккати

$$(5) \qquad K^{\boldsymbol\cdot} = -KA - A'K + KBR^{-1}B'K - Q, \quad K(T) = F$$

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ E/\varepsilon \end{Vmatrix}, \quad K = \begin{Vmatrix} K_1 & \varepsilon K_2 \\ \varepsilon K_2' & \varepsilon K_3 \end{Vmatrix}$$

Отметим, что при переходе от (4) к (5) используется представление

$$(6) \qquad \begin{Vmatrix} p_1 \\ \varepsilon p_2 \end{Vmatrix} = K \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}$$

Пусть $x_1(t, \varepsilon)$, $x_2(t, \varepsilon)$, $v(t, \varepsilon)$, I_ε^* — оптимальные траектории, управление и минимальное значение функционала в задаче (1), (3) соответственно.

---

[1] *Дмитриев М. Г.* Исследование сингулярных возмущений задач оптимального управления. Канд. диссертация, Днепропетровск, 1972. См. также [5–7].

Теорема. При $\varepsilon \to 0$ $x_1(t, \varepsilon) \to \bar{x}_1(t)$ равномерно по $t \in [t_0, T_1] \subset \subset [t_0, T]$, $x_2(t, \varepsilon) \to \bar{x}_2(t)$ равномерно по $t \in [T_0, T_1] \subset [t_0, T]$, $v(t, \varepsilon) \to \to 0$ равномерно по $t \in [T_0, T_1]$, $I_\varepsilon^* \to \bar{I}^*$. Здесь $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$, $\bar{I}^*$ — оптимальная траектория, оптимальное управление и минимальное значение функционала соответственно задачи

(7) $$I(\bar{x}_2) = \frac{1}{2}\bar{x}_1'(T)(F_1 - F_2F_3^{-1}F_2')\bar{x}_1(T) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\begin{Vmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{Vmatrix}' Q(t)\begin{Vmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{Vmatrix} dt$$

$$\bar{x}_1^{\boldsymbol\cdot} = A_1(t)\bar{x}_1 + A_2(t)\bar{x}_2, \qquad \bar{x}_1(t_0) = x_1^0$$

Доказательство. Распишем (5) по блокам

(8) $$\frac{dK_1}{dt} = -K_1A_1 - A_1K_1 - \varepsilon K_2A_3 - \varepsilon A_3'K_2' + K_2R^{-1}K_2' - Q_1$$

$$\varepsilon\frac{dK_2}{dt} = -K_1A_2 - \varepsilon K_2A_4 - \varepsilon A_1'K_2 - \varepsilon A_3'K_3 + K_2R^{-1}K_3 - Q_2$$

$$\varepsilon\frac{dK_3}{dt} = -\varepsilon K_2'A_2 - \varepsilon A_2'K_2 - \varepsilon K_3A_4 - \varepsilon A_4'K_3 + K_3R^{-1}K_3 - Q_3$$

$$K_1(T) = F_1, \ K_2(T) = F_2/\varepsilon, \quad K_3(T) = F_3/\varepsilon$$

Из условий, наложенных на коэффициенты в (2), (3), вытекает, что предположения следствия из теоремы в [7] выполнены, т. е. при $\varepsilon \to 0$ решения $K_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$ задачи (8) стремятся к решениям $\bar{K}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ задачи, получающейся из (8) при $\varepsilon = 0$ (причем $\bar{K}_1(T) = F_1 - F_2F_3^{-1}F_2'$), равномерно по t на каждом отрезке $[t_0, T_1] \subset [t_0, T]$. Находя $\bar{K}_2$, $\bar{K}_3$ и подставляя их в уравнение для $\bar{K}_1$, получим

(9) $$\frac{d\bar{K}_1}{dt} = -\bar{K}_1(A_1 - A_2Q_3^{-1}Q_2') - (A_1' - Q_2Q_3^{-1}A_2')\bar{K}_1 +$$

$$+ \bar{K}_1A_2Q_3^{-1}A_2'\bar{K}_1 - (Q_1 - Q_2Q_3^{-1}Q_2'), \qquad \bar{K}_1(T) = F_1 - F_2F_3^{-1}F_2'$$

Из положительной определенности матриц Q и F вытекает, что и матрицы $Q_1 - Q_2Q_3^{-1}Q_2'$, $F_1 - F_2F_3^{-1}F_2'$ также положительно-определенные, так как из формулы Фробениуса обращения блочной матрицы [8] следует, что эти матрицы — диагональные блоки положительно-определенных матриц Q^{-1} и F^{-1} соответственно. Теперь нетрудно показать, что (9) — соответствующая задача Коши для уравнения Риккати, связанная с (7), и выполнены условия существования и единственности оптимального управления в задаче (7), в которой в роли управления выступает $\bar{x}_2$. Известно [9], что оптимальное управление в задаче (7) имеет вид $\bar{x}_2 = -Q_3^{-1}[Q_2' + A_2'\bar{K}_1]\bar{x}_1$. Отсюда получаем

$$\bar{x}_1^{\boldsymbol\cdot} = (A_1 - A_2Q_3^{-1}A_2'\bar{K}_1 - A_2Q_3^{-1}Q_2)\bar{x}_1, \quad \bar{x}_1(t_0) = x_1^0$$

Так как $v = -R^{-1}B'Kx$, то вместо (3) имеем

(10) $$x_1^{\boldsymbol\cdot} = A_1(t)x_1 + A_2(t)t_2, \quad x_1(t_0) = x_1^0$$

$$Ex_2^{\boldsymbol\cdot} = \varepsilon A_3(t)x_1 + \varepsilon A_4(t)x_2 - R^{-1}(t)(K_2'x_1 + K_3x_2),$$

$$x_2(t_0) = x_2^0$$

Применяя теорему А. Н. Тихонова [1] на отрезке $[t_0, T_1]$ (условие положительной устойчивости корня $\bar{x}_2^{\circ}(t) = -\bar{K}_3^{-1}\bar{K}_2'\bar{x}_1^0(t)$ выполнено, так как $\bar{K}_3(t)$ — положительно-определенная матрица), имеем $\lim x_1(t, \varepsilon) = \bar{x}_1^\circ(t)$ равномерно по $t \in [T_0, T_1] \subset [t_0, T]$, где $\bar{x}_1^0(t), \bar{x}_2^0(t)$ — решение задачи, получающейся из (10) при $\varepsilon = 0$.

Далее имеем $\bar{K}_3^{-1}\bar{K}_2' = \bar{K}_3^{-1}R\bar{K}_3^{-1}(Q_2' + A_2\bar{K}_1) = \bar{K}_3^{-1}R\bar{K}_3^{-1}Q_2' + \bar{K}_3^{-1}R\bar{K}_3^{-1}A_2'\bar{K}_1' = Q_3^{-1}Q_2' + Q_3^{-1}A_2'\bar{K}_1$, т. е. теперь очевидно, что $\bar{x}_1^\circ(t) = \bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2^\circ(t) = \bar{x}_2(t)$, и таким образом первые два утверждения теоремы установлены.

Справедливость третьего утверждения следует из первых двух.

Наконец, учитывая выражение для минимального значения функционала, получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon^* = I^*$.

Следствие. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} p_1(t, \varepsilon) = \bar{p}_1(t)$ равномерно по $t \in [t_0, T_1]$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} p_2(t, \varepsilon) = \bar{p}_2(t) \equiv 0$ равномерно по $t \in [T_0, T_1]$, где $\bar{p}_1(t)$ — сопряженная переменная принципа максимума Понтрягина для задачи (7).

Доказательство вытекает из (6), теоремы и свойств $K_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3$.

Замечания. 1°. Если в (1), (2) сделать замену $v = \varepsilon u$, то придем к задаче, которую можно считать регуляризованной по отношению к задаче с особым оптимальным управлением (см. ниже). Имея асимптотику решения регуляризованной задачи по параметру регуляризации, можно получить асимптотику решения соответствующей задачи с большим коэффициентом усиления при управлении (траектории совпадают, $v = \varepsilon u$). Поэтому, рассуждая, как и в [4], где строится асимптотика решения регуляризованной задачи с помощью аппарата сингулярных возмущений, можно получить, что оптимальное управление $v(t, \varepsilon)$ в задаче (1), (2) при условии, что F — положительно-полуопределенная матрица, $F_2 = F_3 = 0$, имеет при достаточной гладкости по t элементов матриц задачи (1), (2) следующее асимптотическое представление:

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \left(\prod_k^{\circ} v\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_k(t) + \varepsilon \prod_k^{1} v\left(\frac{t-T}{\varepsilon}\right)\right)\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1})$$

где члены погранслойных рядов $\Pi_k^i(\tau_i)$, $i = 0, 1$ экспоненциально стремятся к нулю при $|\tau_i| \to \infty$, т. е. главная часть оптимального управления сосредоточена в погранслое вблизи t_0.

В данном случае (F — положительно-определенная матрица) главная часть управления находится в пограничном слое вблизи t_0 и T, но выяснение его структуры усложняется.

2°. Сделаем в (1), (3) замену $v = \varepsilon u$ и положим в полученной задаче $\varepsilon = 0$. Придем к следующей задаче:

$$\min\left\{I(u) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1(T) \\ x_2(T)\end{matrix}\right\|' F \left\|\begin{matrix} x_1(T) \\ x_2(T)\end{matrix}\right\| + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2\end{matrix}\right\|' Q \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2\end{matrix}\right\| dt\right\} \tag{11}$$

$$\dot{x}_1 = A_1(t)x_1 + A_2(t)x_2, \quad x_1(t_0) = x_1^\circ$$
$$\dot{x}_2 = A_3(t)x_1 + A_4(t)x_2 + u, \quad x_2(t_0) = x_2^\circ$$

Можно показать, что оптимальное управление здесь особое [9] и определяется из условия

$$H_u = p_2 = 0$$
$$(H = p_1'(A_1x_1 + A_2x_2) + p_2'(A_3x_1 + A_4x_2 + u) - {}^1/_2 x'Qx$$
$$H_{uu} \equiv 0, \; p_2 = \bar{p}_2)$$

Из минимизации внеинтегрального члена функционала в (11) имеем $x_2(T) = -F_3^{-1}F_2'x_1(T)$, т. е. оптимальное управление, вообще говоря, здесь импульсное и в точке $t = T$ [10, 11]. Подставляя $x_2(T)$ в функционал задачи (11), получим функционал, как и в задаче (7), т. е. скачок в функционале здесь может быть получен в результате минимизации внеинтегрального члена по конечным значениям быстрых переменных.

3°. Существенным условием данной работы, как и в [4], служит условие, что

$$B'QB = \begin{Vmatrix} 0 \\ E \end{Vmatrix}' Q \begin{Vmatrix} 0 \\ E \end{Vmatrix} = Q_3$$

— положительно-определенная матрица. В более общих случаях, когда это условие не выполняется, управление $\bar{x}_2$ в задаче меньшей размерности само становится особым, и необходимо дальнейшее расщепление задачи [10, 12].

Поступила 13 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
2. *Геращенко Е. И., Геращенко С. М.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М., «Наука», 1975.
3. *Kelly H. J.* Aircraft maneuver optimization by reduced-order approximation. In: Control and Dynamic Systems, vol. 10. New York-London, Acad. Press, 1973.
4. *O'Malley R. E. Jr., Jameson A.* Singular perturbations and singular arcs, pt 1. IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, vol. 20, No. 2.
5. *Дмитриев М. Г., Есипова В. А., Чуев В. И.* Предельный переход в одной сингулярно-возмущенной задаче оптимального управления. Дифференциальные уравнения и их приложения, вып. 2. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1973.
6. *Глизер В. Я., Дмитриев М. Г.* О непрерывности решения задачи аналитического конструирования регулятора по сингулярным возмущениям. ПММ, 1976, т. 41, вып. 3.
7. *Глизер В. Я., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом. Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 5.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967.
9. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972.
10. *Ho Yu-Chi.* Linear stochastic singular control problems. J. Optimizat. Theory and Appl., 1972, vol. 9, No. 1.
11. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Об особых решениях в задачах оптимизации динамических систем с квадратичным критерием качества. Дифференциальные уравнения, 1975, т. 11, № 4.
12. *O'Malley R. E. Jr., Jameson A.* Singular perturbing and singular arcs, pt 2. IEEE Trans. Automat. Contr., 1977, vol. 22, No. 3.