Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

ЗАДАЧИ О СБЛИЖЕНИИ — УКЛОНЕНИИ В КВАЗИДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Г. В. Томский

(Якутск)

Рассматриваются игровые задачи о сближении — уклонении в квазидинамических и полудинамических системах. Формулируются и доказываются теоремы об альтернативе в классе кусочно-программных стратегий игроков. Работа примыкает к исследованиям [1–9].

1. Пусть имеются некоторые непустые множества X, U, V. Множество X называется множеством состояний, U (V) — множеством мгновенных значений управлений первого (второго) игрока. Пусть D_1 (D_2) — некоторое непустое множество отображений полуинтервала времени $[t_0, T)$ в U (V) и задано некоторое отображение $\varkappa$ множества $[t_0, T) \times D_1 \times D_2$ в X. Множество D_1 (D_2) называется множеством допустимых управлений первого (второго) игрока, а отображение $\varkappa$ называется функцией состояния. Пятерка $\Sigma = ([t_0, T), X, D_1, D_2, \varkappa)$ называется квазидинамической системой, если выполняется следующее

Условие 1). Для любых допустимых управлений игроков $u_1, u_2 \in D_1$, $v_1, v_2 \in D_2$ и для любых моментов времени $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < t \leqslant T$ существуют допустимые управления $u_3 \in D_1$, $v_3 \in D_2$, такие, что

$$u_3(t) = \begin{cases} u_1(t), & t_1 \leqslant t < t_2, \\ u_2(t), & t_2 \leqslant t < t_3, \end{cases} \quad v_3(t) = \begin{cases} v_1(t), & t_1 \leqslant t < t_2 \\ v_2(t), & t_2 \leqslant t < t_3 \end{cases}$$

Элемент $x(t) = \varkappa(t, u, v)$ множества X называется состоянием системы Σ в момент времени t, а отображение $x(\cdot) = \varkappa(\cdot, u, v)$ полуинтервала времени $[t_0, T)$ в множество X называется траекторией этой системы, соответствующей паре управлений u, v.

Для квазидинамических систем, аналогично тому как это делается в теории дифференциальных игр [6], можно ввести понятие кусочно-программных стратегий игроков. Обозначим через $D_1[t_1, t_2)$ $(D_2[t_1, t_2))$ множество всех сужений допустимых управлений первого (второго) игрока на полуинтервал времени $[t_1, t_2) \subset [t_0, T)$. Пусть $\Delta = \{t_0 = t_0^\Delta < t_1^\Delta < \ldots$ $\ldots < t_{n(\Delta)}^\Delta = T\}$ — произвольное конечное разбиение полуинтервала $[t_0, T)$. Множество всех конечных разбиений полуинтервала $[t_0, T)$ будем обозначать через $\{\Delta\}$.

Последовательность $\varphi_\Delta = (\varphi_{\Delta,1}, \ldots, \varphi_{\Delta,n(\Delta)})$, где $\varphi_{\Delta,1} \in D_1[t_0, t_1^\Delta)$, а $\varphi_{\Delta,k}$ $(k \geqslant 2)$ — любое отображение множества $D_1[t_0, t_{k-1}^\Delta) \times$ $\times D_2[t_0, t_{k-1}^\Delta)$ в $D_1[t_{k-1}^\Delta, t_k^\Delta)$, называется Δ-стратегией первого игрока.

Пара $\varphi = (\Delta, \varphi_\Delta)$, где $\Delta \in \{\Delta\}$, а φ_Δ — любая Δ-стратегия первого игрока, называется кусочно-программной стратегией первого игрока. Последовательность $\varphi^\Delta = (\varphi^{\Delta,1}, \ldots, \varphi^{\Delta,n(\Delta)})$, где $\varphi^{\Delta,k}$ — любое отображение множества $D_1[t_0, t_{k-1}^\Delta) \times D_2 [t_0, t_k^\Delta)$ в $D_1 [t_{k-1}^\Delta, t_k^\Delta)$ $(k = 1, 2, \ldots, n(\Delta))$, называется верхней Δ-стратегией первого игрока. Аналогично определяются Δ-стратегии ψ_Δ, кусочно-программные стратегии $\psi = (\Delta, \psi_\Delta)$ и верхние Δ-стратегии ψ^Δ для второго игрока.

Обозначим через $D_{1\Delta}$ $(D_{2\Delta})$ множество всех Δ-стратегий, через D_1^* (D_2^*)— множество всех кусочно-программных стратегий, а через $D_1^\Delta (D_2^\Delta)$ — множество всех верхних Δ-стратегий первого (второго) игрока.

Как и для дифференциальных игр [9], любая пара стратегий φ^Δ, ψ_Δ определяет единственную пару управлений

$$u^\Delta = u(\varphi^\Delta, \psi_\Delta) \in D_1, \quad v_\Delta = v(\varphi^\Delta, \psi_\Delta) \in D_2$$

и, следовательно, определяет единственную траекторию

$$x(t) = \varkappa(t, \varphi^\Delta, \psi_\Delta) = \varkappa(t, u^\Delta, v_\Delta)$$

системы Σ.

Аналогично любая пара стратегий φ_Δ, ψ^Δ определяет единственную траекторию

$$x(t) = \varkappa(t, \varphi_\Delta, \psi^\Delta) = \varkappa(t, u(\varphi_\Delta, \psi^\Delta), v(\varphi_\Delta, \psi^\Delta))$$

и любая пара стратегий φ, ψ определяет также единственную траекторию

$$x(t) = \varkappa(t, \varphi, \psi) = \varkappa(t, u(\varphi, \psi), v(\varphi, \psi))$$

системы Σ.

Пусть $\Phi(\Sigma)$ — множество всех траекторий квазидинамической системы Σ и задан некоторый функционал g на множестве $\Phi(\Sigma) \times D_1 \times D_2$. Тогда определен функционал

$$I = I(u, v) = g(\varkappa(\cdot, u, v), u, v) \tag{1.1}$$

на множестве $D_1 \times D_2$. Этот функционал будем называть выигрышем первого игрока, выигрышем второго игрока называется функционал — I Отображение (1.1) определяет функционалы

$$I = I(\varphi^\Delta, \psi_\Delta) = I(u(\varphi^\Delta, \psi_\Delta), v(\varphi^\Delta, \psi_\Delta)) \tag{1.2}$$

на множестве $D_1^\Delta \times D_{2\Delta}$

$$I = I(\varphi_\Delta, \psi^\Delta) = I(u(\varphi_\Delta, \psi^\Delta), v(\varphi_\Delta, \psi^\Delta)) \tag{1.3}$$

на множестве $D_{1\Delta} \times D_2^\Delta$

$$I = I(\varphi, \psi) = I(u(\varphi, \psi), v(\varphi, \psi)) \tag{1.4}$$

на множестве $D_1^* \times D_2^*$.

Определение 1.1. Тройка $\Gamma = \langle I, D_1^*, D_2^* \rangle$ называется антагонистической квазидинамической игрой. Величина

$$V^* = \inf_{\psi \in D_2^*} \sup_{\varphi \in D_1^*} I(\varphi, \psi)$$

называется верхним значением, а величина

$$V_* = \sup_{\varphi \in D_1^*} \inf_{\psi \in D_2^*} I(\varphi, \psi)$$

нижним значением игры Г. Говорят, что игра Г имеет значение, если справедливо равенство

$$V^* = V_* = \operatorname{val} \Gamma$$

Тройка $\Gamma^\Delta = \langle I, D_1^\Delta, D_{2\Delta} \rangle$ $(\Gamma_\Delta = \langle I, D_{1\Delta}, D_2^\Delta \rangle)$ называется верхней (нижней) Δ-игрой. В этих играх один из игроков дискриминирован.

Введем обозначения

$$V^\Delta = \inf_{\psi_\Delta \in D_{2\Delta}} \sup_{\varphi^\Delta \in D_1^\Delta} I(\varphi^\Delta, \psi_\Delta)$$

$$V_\Delta = \sup_{\varphi_\Delta \in D_{1\Delta}} \inf_{\psi^\Delta \in D_2^\Delta} I(\varphi_\Delta, \psi^\Delta)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. Если $\Delta_1 \subset \Delta_2$, то

$$V^{\Delta_1} \geqslant V^{\Delta_2} \geqslant V^* \geqslant V_* \geqslant V_{\Delta_2} \geqslant V_{\Delta_1}$$

Из этой леммы следует, что существуют пределы

$$V_+ = \lim_{n \to \infty} V^{\omega(n)}, \quad V_- = \lim_{n \to \infty} V_{\omega(n)}$$

где $\{\omega(n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ есть последовательность разбиений вида

$$\omega(n) = \{t_k^n \mid t_k^n = t_0 + k\delta(n),\ k = 0, 1, \ldots, 2^n\}, \qquad \delta(n) = \frac{T - t_0}{2^n}$$

причем если $V_+ = V_-$, то квазидинамическая игра Г имеет значение

$$\operatorname{val} \Gamma = V_+ = V_-$$

Как в [9], можно показать, что все верхние и нижние Δ-игры имеют значения $V^\Delta = \operatorname{val} \Gamma^\Delta$, $V_\Delta = \operatorname{val} \Gamma_\Delta$.

2. Рассмотрим игры сближения — уклонения [1-3]. Пусть множество состояний X системы Σ является метрическим пространством с метрикой d. Для любого множества $K \subset [t_0, T] \times X$ обозначим через K^ε его ε-окрестность в $[t_0, T) \times X$.

Сформулируем следующие две задачи.

Задача о сближении 2.1. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найти кусочно-программную стратегию первого игрока φ_ε, такую, что для всех траекторий

$$x(t) = \varkappa(t, \varphi_\varepsilon, \psi), \quad \psi \in D_2^*$$

выполняются соотношения

$$\{\tau, x(\tau)\} \in M^\varepsilon, \ \{t, x(t)\} \in N^\varepsilon, \ t_0 \leqslant t < \tau = \tau(\varphi_\varepsilon, \psi) \leqslant T \tag{2.1}$$

Задача об уклонении 2.2. Найти число $\varepsilon > 0$ и кусочно-программную стратегию второго игрока ψ_ε, исключающую встречу (2.1) для любой траектории

$$x(t) = \varkappa(t, \varphi, \psi_\varepsilon), \quad \varphi \in D_1^*$$

Введем на множестве траекторий квазидинамической системы Σ равномерную метрику

$$\rho[x_1(\cdot), x_2(\cdot)] = \sup_{T_0 \leqslant t < T} d[x_1(t), x_2(t)] \tag{2.2}$$

Сформулируем следующие условия.

B.1. Пусть $\{u^{\delta(n)}\}$ — любая последовательность допустимых управлений первого игрока, $\delta(n) = (T - t_0)/2^n$, $\{n\} \subset \{1, 2, \ldots\}$, $u_*^{\delta(n)}(t) = u^{\delta(n)}(t - \delta(n))$ при $t_0 + \delta(n) \leqslant t < T$, а $u_*^{\delta(n)}(t)$ при $t_0 \leqslant t < t_0 + \delta(n)$ — сужения допустимых управлений. Тогда существует число $\eta > 0$, такое, что $u_*^{\delta(n)} \in D_1$, если только $\delta(n) < \eta$;

B.2. $\rho[\varkappa(\cdot, u^{\delta(n)}, v^{\delta(n)}), \varkappa(\cdot, u_*^{\delta(n)}, v^{\delta(n)})] \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно всех $u^{\delta(n)}$, $u_*^{\delta(n)} \in D_1$, $v^{\delta(n)} \in D_2$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Если квазидинамическая система Σ удовлетворяет условиям B.1, B.2, то для нее разрешима либо задача о сближении 2.1, либо задача об уклонении 2.2.

Доказательство. Рассмотрим семейство верхних $\omega(n)$-игр $\Gamma_\varepsilon^{\omega(n)}$, в которых выигрыш первого игрока имеет вид

$$I_\varepsilon = - \inf_{t_0 \leqslant t < \tau_\varepsilon^N(u, v)} \operatorname{dist}[\{t, x(t)\}, M], \quad \varepsilon > 0 \tag{2.3}$$

$$\tau_\varepsilon^N = \inf\{t_0 \leqslant t < T \mid \{t, x(t)\} \in [([t_0, T) \times X) \setminus N^\varepsilon]\}$$

$$\operatorname{dist}[\{t, x\}, M] = \inf_{\{t_*, x_*\} \in M} \{|t - t_*| + d[x, x_*]\}$$

$$x(t) = \varkappa(t, u, v)$$

Пусть существует число $\varepsilon > 0$, такое, что

$$V_+(\varepsilon) = \lim_{n \to \infty} V_\varepsilon^{\omega(n)} = \lim_{n \to \infty} \operatorname{val} \Gamma_\varepsilon^{\omega(n)} < 0$$

Тогда существуют $\omega(n)$-стратегии второго игрока $\psi_{\omega(n)}^{\varepsilon}$ и число $N_1(\varepsilon)$, удовлетворяющие условию

$$I(\varphi, \psi_{\omega(n)}^{\varepsilon}) < V_+(\varepsilon)/2, \quad n > N_1(\varepsilon)$$

для всех $\varphi \in D_1^*$. Следовательно

$$\inf_{t_0 \leqslant t < \tau_\varepsilon^N(\varphi, \psi_{\omega(n)}^{\varepsilon})} \operatorname{dist}[\{t, \varkappa(t, \varphi, \psi_{\omega(n)}^{\varepsilon})\}, M] > -\frac{V_+(\varepsilon)}{2} \tag{2.4}$$

при $n > N_1(\varepsilon)$, для всех $\varphi \in D_1^*$.

Если $-V_+(\varepsilon)/2 \geqslant \varepsilon$, то из неравенств (2.4) следует, что стратегии $\psi_{\omega(n)}^{\varepsilon}$ $(n > N_1(\varepsilon))$ разрешают задачу об уклонении 2.2. Нетрудно показать, что и при $-V_+(\varepsilon)/2 < \varepsilon$ эти стратегии разрешают задачу об уклонении 2.2.

Остается рассмотреть случай, когда для всех чисел $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$V_+(\varepsilon) = 0 \leqslant \operatorname{val} \Gamma_\varepsilon^{\omega(n)} \leqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

В этом случае существуют верхние $\omega(n)$-стратегии первого игрока $\varphi_\varepsilon^{\omega(n)}$, удовлетворяющие неравенству

$$-\varepsilon/2 < I_{\varepsilon/2}(\varphi_\varepsilon^{\omega(n)}, \psi) \leqslant 0$$

для всех $\psi \in D_2^*$. Следовательно

$$\inf_{t_0 \leqslant t < \tau^N_{\varepsilon/2}(\varphi_\varepsilon^{\omega(n)}, \psi)} \operatorname{dist}[\{t, \varkappa(t, \varphi_\varepsilon^{\omega(n)}, \psi)\}, M] < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.5}$$

для всех $\psi \in D_2^*$.

Из условия В.1. следует, что для стратегий $\varphi_\varepsilon^{\omega(n)}$ и для любых верхних $\omega(n)$-стратегий второго игрока можно построить $\omega(n)$-стратегии $\varphi_\varepsilon(t - \delta(n))$, $\psi^*_{\omega(n)}$, такие, что если

$$u_1 = u(\varphi_\varepsilon(t - \delta(n)), \psi^{\omega(n)}), \quad u_2 = u(\varphi_\varepsilon^{\omega(n)}, \psi^*_{\omega(n)})$$

то

$$u_1(t) = u_2(t - \delta(n)), \quad t_0 + \delta(n) \leqslant t < T$$
$$v(\varphi_\varepsilon(t - \delta(n)), \psi^{\omega(n)}) = v(\varphi_\varepsilon^{\omega(n)}, \psi^*_{\omega(n)})$$

Способ построения таких стратегий описан, например, в работе [9].

По условию 2° можно выбрать число $N_2(\varepsilon)$, такое, что

$$\rho[\varkappa(\cdot, \varphi_\varepsilon^{\omega(n)}, \psi^*_{\omega(n)}), \varkappa(\cdot, \varphi_\varepsilon(t - \delta(n)), \psi^{\omega(n)})] < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6}$$

для всех $\psi^{\omega(n)} \in D_2^{\omega(n)}$, $n > N_2(\varepsilon)$. Из неравенств (2.6), (2.5) получаем, что стратегии $\varphi_\varepsilon(t - \delta(n))$, $n > N_2(\varepsilon)$ решают задачу о сближении 2.1.

Таким образом, доказано даже несколько более сильное утверждение, чем теорема 2.1, так как для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$D_{1\omega(n)} \subset D_1^* \subset D_1^{\omega(n)}, \quad D_{2\omega(n)} \subset D_2^* \subset D_2^{\omega(n)}$$

3. Пятерка $\Sigma = ([t_0, T], X, D_1, D_2, \varkappa)$, где $\varkappa$ — отображение множества $[t_0, T] \times [t_0, T] \times X \times D_1 \times D_2$ в X, а D_1, D_2 удовлетворяют условию 1), называется динамической системой по Калману, если она удовлетворяет условиям:

2) если $u_1, u_2 \in D_1$, $v_1, v_2 \in D_2$ и $u_1(s) = u_2(s)$, $v_1(s) = v_2(s)$ при $t_0 \leqslant t_1 \leqslant s < t_2 \leqslant T$, то для любого $x \in X$

$$\varkappa(t_2, t_1, x, u_1, v_1) = \varkappa(t_2, t_1, x, u_2, v_2)$$

3) $\varkappa(t, t, x, u, v) = x$ для всех $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in X$, $u \in D_1$, $v \in D_2$;

4) для любых $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant T$ и любых $x \in X$, $u \in D_1$, $v \in D_2$ справедливо соотношение

$$\varkappa(t_3, t_1, x, u, v) = \varkappa(t_3, t_2, \varkappa(t_2, t_1, x, u, v), u, v)$$

5) отображение $x = \varkappa(t, \tau, x_*, u, v)$ определено для всех $t \geqslant \tau$ и не обязательно определено при $t < \tau$.

Элемент $x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, u, v)$ множества X называется состоянием системы Σ в момент времени t, а соответствующее отображение $x(\cdot)$: $[t_0, T] \to X$ называется траекторией системы Σ, если в момент времени t_* система находилась в состоянии x_* и на нее действовали управления u, v.

Любая динамическая система $\Sigma = ([t_0, T], X, D_1, D_2, \varkappa)$ при каждом фиксированном начальном состоянии $x(t_*) = x_*$ определяет квазидинамическую систему

$$\Sigma(t_*, x_*) = ([t_*, T], X, D_1[t_*, T), D_2[t_*, T), \varkappa_*)$$

с функцией состояния $\varkappa_*(t, u, v) = \varkappa(t, t_*, x_*, u, v)$. Множество $[t_0, T] \times X$ называется множеством позиций. Пусть для каждой фиксированной позиции $\{t_*, x_*\}$ задан функционал

$$I = g(x(\cdot), u, v, t_*, x_*)$$

на множестве $\Phi(\Sigma(t_*, x_*)) \times D_1 \times D_2$, где $\Phi(\Sigma(t_*, x_*))$ — множество всех траекторий системы $\Sigma(t_*, x_*)$. Тогда определен функционал

$$I = I(u, v, t_*, x_*) = g(\varkappa(\cdot, t_*, x_*, u, v), u, v, t_*, x_*) \tag{3.1}$$

на $D_1 \times D_2 \times [t_0, T] \times X$, который будем называть выигрышем первого игрока в позиции $\{t_*, x_*\}$.

Определение 3.1. Динамической (k-динамической) игрой

$$\Gamma(t_*, x_*) = \langle I, D_1{}^*[t_*, T), D_2{}^*[t_*, T)\rangle$$

описываемой системой Σ, в которой выигрыш первого игрока имеет вид (3.1), называется квазидинамическая игра, в которой первый игрок имеет тот же выигрыш, описываемая при помощи системы $\Sigma(t_*, x_*)$.

Будем обозначать символом $\Gamma^\Delta(t_*, x_*)$ ($\Gamma_\Delta(t_*, x_*)$) соответствующие верхние (нижние) Δ-игры

$$\Delta = \{t_* = t_0^\Delta < t_1^\Delta < \ldots < t_{n(\Delta)}^\Delta = T\}$$

$$\mathbf{V}^\Delta(t_*, x_*) = \operatorname{val}\Gamma^\Delta(t_*, x_*), \quad \mathbf{V}_\Delta(t_*, x_*) = \operatorname{val}\Gamma_\Delta(t_*, x_*)$$

$$\mathbf{V}(t_*, x_*) = \operatorname{val}\Gamma(t_*, x_*)$$

4. Введем следующие понятия.

Определение 4.1. Вектор $\varphi_\Delta = (\varphi_{\Delta,1}, \ldots, \varphi_{\Delta,n(\Delta)})$, где $\varphi_{\Delta,1} \in D_1[t_*, t_1^\Delta)$, $\varphi_{\Delta,k}: X \to D_1[t_{k-1}^\Delta, t_k^\Delta)$, $k = 2, 3, \ldots, n(\Delta)$, называется позиционной Δ-стратегией, а вектор $\varphi^\Delta = (\varphi^{\Delta,1}, \ldots, \varphi^{\Delta,n(\Delta)})$, где $\varphi^{\Delta,k}: X \times D_2[t_{k-1}^\Delta, t_k^\Delta) \to D_1[t_{k-1}^\Delta, t_k^\Delta)$, $k = 1, 2, \ldots, n(\Delta)$, называется позиционной верхней Δ-стратегией первого игрока в системе $\Sigma(t_*, x_*)$. Пара $\varphi = (\Delta, \varphi_\Delta)$, где Δ — произвольное конечное разбиение отрезка времени $[t_*, T]$, а φ_Δ — любая позиционная Δ-стратегия первого игрока в системе $\Sigma(t_*, x_*)$, называется позиционной кусочно-программной стратегией первого игрока в системе $\Sigma(t_*, x_*)$.

Аналогично определяются позиционные Δ-стратегии ψ_Δ, позиционные верхние Δ-стратегии ψ^Δ и позиционные кусочно-программные стратегии $\psi = (\Delta, \psi_\Delta)$ второго игрока в системе $\Sigma(t_*, x_*)$.

Именно в таком виде кусочно-программные стратегии были введены впервые в теорию дифференциальных игр. Заметим, что рассматриваемые в данной работе классы кусочно-программных стратегий игроков $D_1{}^*[t_*, T)$, $D_2{}^*[t_*, T)$ содержат более широкий класс стратегий.

Пусть множество состояний динамической системы Σ является метрическим пространством с метрикой d. Для любого множества $K \subset [t_0, T] \times$

$\times X$ обозначим через K^ε его ε-окрестность в $[t_0, T]$. Пусть имеются некоторые множества M, N в $[t_0, T] \times X$ и задана начальная позиция игры $\{t_*, x_*\}$. Будем рассматривать следующие две задачи.

Задача о сближении 4.1. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найти позиционную кусочно-программную стратегию первого игрока φ_ε, такую, что для всех траекторий

$$x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, \varphi_\varepsilon, \psi), \quad \psi \in D_2^*[t_*, T)$$

выполняются соотношения

$$\{\tau, x(\tau)\} \in M^\varepsilon, \ \{t, x(t)\} \in N^\varepsilon \qquad (4.1)$$
$$t_* \leqslant t < \tau = \tau[x(\cdot)] \leqslant T$$

Задача об уклонении 4.2. Найти число $\varepsilon > 0$ и позиционную кусочно-программную стратегию второго игрока ψ_ε, такую, что исключается встреча (4.1) для всех траекторий

$$x(t) = \varkappa(t, t_*, x_*, \varphi, \psi_\varepsilon), \quad \varphi \in D_1^*[t_*, T)$$

Будем рассматривать динамические системы Σ, удовлетворяющие условию

С. 1. Для любых $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, $x_1, x_2 \in X$ существуют управления $u_* = u(t_1, t_2, x_1, x_2) \in D_1[t_1, t_2)$, $v_* = v(t_1, t_2, x_1, x_2) \in D_2[t_1, t_2)$, такие, что

$$d^m[\varkappa(t, t_1, x_1, u_*, v), \ \varkappa(t, t_1, x_2, u, v_*)] \leqslant d^m[x_1, x_2] \times \qquad (4.2)$$
$$\times \exp \beta(t - t_1) + \gamma(t - t_1)(t - t_1) \quad \lim_{\delta \to 0} \gamma(\delta) = 0, \quad m, \beta > 0$$
$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

для всех $u \in D_1$, $v \in D_2$, где d — некоторая метрика на множестве состояний X.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Если динамическая система Σ удовлетворяет условию С.1, то для любой позиции $\{t_*, x_*\}$ этой системы разрешима либо задача о сближении 2.1, либо задача об уклонении 2.2.

Доказательство. Теорема 4.1. доказывается аналогично теореме 2.1. Позиционность кусочно-программных стратегий φ_ε, ψ_ε следует из условий 1) — 5) и вида функционала выигрыша

$$I = - \inf_{t_* \leqslant t < \tau_\varepsilon^N(u, v, t_*, x_*)} \operatorname{dist}[\{t, x(t)\}, M]$$

во вспомогательных играх $\Gamma_\varepsilon^{\omega(n)}(t_*, x_*)$.

5. Рассмотрим динамические системы, удовлетворяющие условиям

6) $U \subset D_1$, $V \subset D_2$

С. 2. Для всех $t_0 \leqslant t_1 < T$, $x_1, x_2 \in X$ существуют управления $u_* = u(t_1, x_1, x_2) \in U$, $v_* = v(t_1, x_1, x_2) \in V$, такие, что выполняется условие (4.2) для всех $u \in D_1$, $v \in D_2$.

Определение 5.1. Кусочно-программная стратегия первого (второго) игрока в системе $\Sigma(t_*, x_*)$ $\varphi = (\Delta; \varphi_{\Delta,1}, \ldots, \varphi_{\Delta,n(\Delta)})$ $(\psi = (\Delta; \psi_{\Delta,1}, \ldots, \psi_{\Delta,n(\Delta)}))$ называется кусочно-постоянной, если отображения $\varphi_{\Delta,k}$ $(\psi_{\Delta,k})$, $k = 1, 2, \ldots, n(\Delta)$ принимают значения в множестве U (V).

Позиционную кусочно-постоянную стратегию первого (второго) игрока в системе $\Sigma\ (t_*, x_*)$

$$\varphi = (\Delta, \varphi_\Delta) \quad (\psi = (\Delta, \psi_\Delta))$$

можно отождествлять с отображением $u_\Delta\ (t, x)$ $(v_\Delta\ (t, x))$ множества $[t_0, T] \times X$ в $U\ (V)$, таким, что

$$\varphi_{\Delta,k+1} = u\ (t_k{}^\Delta, x) \quad (\psi_{\Delta,k+1} = v\ (t_k{}^\Delta, x))$$
$$k = 0, 1, \ldots, n\ (\Delta) - 1$$

Сформулируем две задачи.

Задача о сближении 5.1. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найти позиционную кусочно-постоянную стратегию первого игрока, такую, что для всех траекторий

$$x\ (t) = \varkappa\ (t, t_*, x_*, u_\Delta{}^\varepsilon\ (t, x), \psi), \quad \psi \in D_2{}^*\ [t_*, T)$$

выполняются соотношения (4.1).

Задача об уклонении 5.2. Найти число $\varepsilon > 0$ и позиционную кусочно-постоянную стратегию второго игрока $v_\Delta{}^\varepsilon\ (t, x)$, исключающую встречу (4.1) для всех траекторий

$$x\ (t) = \varkappa\ (t, t_*, x_*, \varphi, v_\Delta{}^\varepsilon\ (t, x)), \quad \varphi \in D_1{}^*\ [t_*, T)$$

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству теоремы 4.1.

Теорема 5.1. Если динамическая система Σ удовлетворяет условиям 6), С.2, то для любой позиции $\{t_*, x_*\}$ этой системы разрешима либо задача о сближении 5.1, либо задача об уклонении 5.2.

6. Введем следующее понятие.

Определение 6.1. Позиционной стратегией первого (второго) игрока в системе Σ называется любое отображение

$$u\ (t, x) \colon [t_0, T] \times X \to U \ (v\ (t, x) : [t_0, T] \times X \to V)$$

Для любой позиции $\{t_*, x_*\}$ системы Σ и для любого конечного разбиения Δ отрезка $[t_*, T]$ пару $\{\Delta, u, (t, x)\}$ $(\{\Delta, v, (t, x)\})$, где $u\ (t, x)$ $(v\ (t, x))$ — позиционная стратегия, можно рассматривать как позиционную кусочно-постоянную стратегию первого (второго) игрока в системе $\Sigma\ (t_*, x_*)$.

Будем рассматривать следующие две задачи.

Задача о сближении 6.1. Найти позиционную стратегию первого игрока $u\ (t, x)$, обладающую свойством: для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для всех траекторий

$$x\ (t) = \varkappa\ (t, t_*, x_*, \{\Delta, u\ (t, x)\}, \psi), \quad \psi \in D_2{}^*\ [t_*, T)$$
$$|\Delta| = \max_{k=0,1,\ldots,n(\Delta)-1} (t_{k+1}^\Delta - t_k{}^\Delta) < \delta$$

выполняются соотношения (4.1).

Задача об уклонении 6.2. Найти числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и позиционную стратегию второго игрока $v\ (t, x)$, исключающую встречу (4.1) для всех траекторий $x\ (t) = \varkappa\ (t, t_*, x_*, \varphi, \{\Delta, v\ (t, x)\}), \varphi \in D_2{}^*\ [t_*, T), |\Delta| < \delta$.

Рассмотрим динамические системы Σ, удовлетворяющие условиям.

7) множество состояний X — компактное метрическое пространство с метрикой d;

8) для всех $\{t_1, x_1\} \in [t_0, T] \times X$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(t_1, x_1, \varepsilon)$, такое, что

$$\sup_{(u,v,t) \in D_1 \times D_2 \times [t_*, T]} d[\varkappa(t, t_1, x_1, u, v), \varkappa(t, t_1, x_2, u, v)] \leqslant \varepsilon$$

если только $d[x_1, x_2] \leqslant \delta$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Если динамическая система Σ удовлетворяет условиям 1) — 8), С.2, то для любой позиции $\{t_*, x_*\}$ этой системы разрешима либо задача о сближении 6.1, либо задача об уклонении 6.2.

Для доказательства данной теоремы используются стабильные мосты, аналогичные таковым в теории позиционных дифференциальных игр [1–3].

Поступила 24 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Куржанский А. В.* Дифференциальные игры сближения при ограниченных фазовых координатах. Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 3.
3. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6.
4. *Малафеев О. А.* Ситуация равновесия в динамических играх. Кибернетика, 1974, № 3.
5. *Никольский М. С.* Динамические игры преследования. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., 1972, № 4.
6. *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования. Изд-во ЛГУ, 1977.
7. *Половинкин Е. С.* Об антагонистических играх двух лиц в динамических системах. I. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1975, № 1.
8. *Томский Г. В.* Существование значения в полудинамических играх. Матем. заметки, 1977, т. 22, вып. 3.
9. *Фридман А.* Об определении дифференциальных игр и существовании значения игры и седловых точек. В сб.: Кибернетический сборник, вып. 9. М., «Мир», 1972