Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИМПУЛЬСНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ

В. А. Корнеев, А. А. Меликян

(Москва)

В изотропной дифференциально-импульсной игре строится оптимальное программное распределение конечного числа моментов подачи импульсов для одного из игроков. Даются достаточные условия единственности этой последовательности. Рассматриваемая в работе игра может трактоваться также как задача оптимальной многоимпульсной коррекции движения. Работа продолжает исследования [1–3], близка по тематике к [4–6].

1. Постановка задачи. Пусть движение двух управляемых объектов (игроков) X и Y на фиксированном интервале времени $[t_0, T]$ задается дифференциальными уравнениями с начальными условиями

$$X: x^{\cdot} = \varphi(t)\, u, \;\; x(t_0) = x^0 \tag{1.1}$$

$$Y: y^{\cdot} = \psi(t)\, v, \;\; y(t_0) = y^0$$

Здесь x, y — фазовые векторы игроков X, Y соответственно, u, v — векторы их управлений. Размерности векторов x, y, u, v одинаковы и произвольны. Скалярные функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ заданы, непрерывны, неотрицательны на интервале движения $[t_0, T]$ и не равны тождественно нулю. Будем считать, что игрок X управляет своим движением лишь в дискретные моменты времени t_k, $k = 1, \ldots, n$, подавая импульсы с ограниченным суммарным ресурсом, а игрок Y управляет своим движением на всем интервале $[t_0, T]$. На реализации управлений игроков X и Y и на моменты t_k наложены следующие ограничения:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k \delta(t - t_k), \qquad \sum_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant Q \tag{1.2}$$

$$t_0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant t_{n+1} = T \tag{1.3}$$

$$|v(t)| \leqslant 1, \;\; t \in [t_0, T] \tag{1.4}$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция, постоянная $Q > 0$ — суммарный ресурс импульсного управления игрока X. Строгие неравенства в (1.3) не ограничивают общности, так как подача в некоторый момент t_k $l+1$ последовательных импульсов интенсивностями $u_k, \ldots, u_{k+l}$ эквивалентна подаче одного импульса интенсивности $u_k + \ldots + u_{k+l}$.

Итак, в моменты t_k, $k = 1, \ldots, n$, которые предполагаются пока фиксированными, фазовый вектор игрока X претерпевает скачки величиной $\varphi(t_k)\, u_k$. Игрок X стремится минимизировать расстояние между игроками в конечный момент времени T, т. е. функционал

(1.5) $$J = | x (T) - y (T) |$$

Игрок Y препятствует этому, реализуя интегрируемые управления $v (t)$, стесненные ограничениями (1.4); такие управления будем называть допустимыми и обозначать для краткости через v.

Введем обозначения

(1.6) $$\begin{gathered} x_k = x (t_k - 0), \ y_k = y (t_k - 0), \quad k = 2, \ldots, n \\ x_1 = x (t_1 - 0), \ y_1 = y (t_1 - 0), \quad t_1 > t_0 \\ x_1 = x (t_0) = x^\circ, \ y_1 = y (t_0) = y^\circ, \quad t_1 = t_0 \end{gathered}$$

Через q_k будем обозначать ресурс управления игрока X, имеющийся перед k-м импульсом

(1.7) $$q_1 = Q, \quad q_k = Q - \sum_{i=1}^{k-1} | u_i |, \quad k = 2, \ldots, n$$

Совокупность величин (x_k, y_k, q_k), которая полностью характеризует состояние объектов (1.1) непосредственно перед подачей k-го импульса в момент $t_k - 0$, будем называть позицией.

Предположим, что игрок X перед подачей каждого импульса наблюдает реализовавшуюся позицию и выбирает векторы скачков в виде функций $u_k = u_k (x_k, y_k, q_k)$, $k = 1, \ldots, n$, т. е. применяет позиционное управление. Поскольку q_k — величина оставшегося ресурса, то указанные функции должны удовлетворять ограничению

(1.8) $$| u_k (x, y, q) | \leqslant q, \quad k = 1, \ldots, n$$

при любых x, y. Очевидно, что по третьему аргументу q функции $u_k (x, y, q)$ достаточно определить на интервале $0 \leqslant q \leqslant Q$. Совокупность функций $u_k (x, y, q)$, $k = 1, \ldots, n$, удовлетворяющих ограничению (1.8), будем называть допустимой стратегией игрока X и обозначать для краткости через u. Каждой паре (u, v), состоящей из допустимой стратегии u игрока X и допустимого управления v игрока Y, соответствует единственное решение уравнений (1.1) и значение $J [u, v]$ функционала (1.5).

Задача 1. Найти оптимальную гарантирующую стратегию u^* игрока X и минимальное гарантированное значение J^* функционала (1.5), удовлетворяющее соотношению

(1.9) $$J^* = \min_u \sup_v J [u, v] = \sup_v J [u^*, v]$$

Минимум здесь вычисляется по всем допустимым стратегиям, верхняя грань — по всем допустимым управлениям.

С помощью переменной $z (t) = x (t) - y (t)$ уравнение движения с начальными условиями (1.1) и функционал (1.5) записываются в виде

(1.10) $$z^{\boldsymbol{\cdot}} = \varphi (t) u - \psi (t) v, \ z (t_0) = z^\circ = x^\circ - y^\circ; \ J = | z (T) |$$

Вектор v в (1.10) можно трактовать как неизвестную помеху, подчиненную ограничению (1.4), а вектор u — как импульсное корректирующее управление вида (1.2), (1.3). Тогда игровая задача 1 является также задачей об оптимальной минимаксной коррекции движения (1.10), имеющей целью минимизировать конечный промах $z(T)$ ([1,2]). С помощью (1.10) можно усмотреть, что оптимальная стратегия u^* принадлежит классу стратегий вида $u_k(z, q)$, $z = x - y$, $k = 1, \ldots, n$.

2. Эквивалентная многошаговая игра. Введем обозначения

$$(2.1) \qquad x_{n+1} = x(T+0), \quad y_{n+1} = y(T+0), \quad \rho(t) = \int_t^T \psi(\tau)\,d\tau$$
$$z_k = x_k - y_k, \quad k = 0, \ldots, n+1$$

Предположим дополнительно, что на некотором интервале $(T - \varepsilon, T)$, $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\psi(t) > 0$. Из (2.1) следует тогда, что $\rho(t) > 0$ при $t_0 \leqslant t < T$, $\rho(T) = 0$.

Для построения оптимальной стратегии задачи 1 и результата игры используются лишь величины z_k, q_k. Поэтому можно ограничиться рассмотрением следующей многошаговой игры (см. [3]) с фазовыми переменными z_k, q_k и управлениями u_k (игрок X) и v_k (игрок Y)

$$(2.2) \qquad z_{k+1} = z_k + \varphi_k u_k - (\rho_k - \rho_{k+1}) v_k, \quad q_{k+1} = q_k - |u_k|$$
$$J = |z_{n+1}|, \quad z_0 = z^\circ, \quad q_0 = Q, \quad u_0 = 0$$
$$|u_k| \leqslant q_k, \quad |v_k| \leqslant 1, \quad \varphi_k = \varphi(t_k), \quad \rho_k = \rho(t_k), \quad k = 0, \ldots, n$$

Динамические уравнения получаются интегрированием соотношений (1.10) и использованием равенств (1.7). Равенство $u_0 = 0$ в (2.2) отражает то, что до момента t_1 игрок X не управляет своим движением. Стратегии игрока X в игре (2.2) аналогичны описанным выше; управлением игрока Y служит всякая последовательность векторов v_k, $|v_k| \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Игра (2.2) эквивалентна исходной дифференциально-импульсной игре (и задаче коррекции (1.10)) в следующем смысле. Равенства

$$(2.3) \qquad v_k = [\rho_k - \rho_{k+1}]^{-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi(\tau) v(\tau)\,d\tau, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$
$$v(t) = v_k, \quad t \in (t_k, t_{k+1}], \quad v(t_0) = v_0$$

устанавливают взаимное соответствие между управлениями $v(t)$ в исходной игре и управлениями v_k в игре (2.2), такое, что для всякой стратегии игрока X в обеих играх реализуются одни и те же последовательности z_k, $k = 0, \ldots, n+1$ и, следовательно, равные значения функционала.

Введем в рассмотрение функцию Беллмана $S_k(z, q)$, $k = 0, \ldots, n+1$, равную минимальному гарантированному значению функционала $|z_{n+1}|$ при условии, что многошаговая игра (2.2) начинается с k-го шага из точки $z_k = z$ и с запасом ресурсов управления игрока X, равным q. В частности, $S_0(z^\circ, Q) = J^*$, где значение J^* определено в (1.9). Функция Беллмана удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению с граничным условием [3]:

$$(2.4) \qquad S_k(z_k, q_k) = \min_{|u_k| \leqslant q_k} \max_{|v_k| \leqslant 1} S_{k+1}(z_{k+1}, q_{k+1})$$
$$k = 0, 1, \ldots, n, \quad S_{n+1}(z_{n+1}, q_{n+1}) = |z_{n+1}|$$

Оптимальная стратегия игрока X (решение задачи 1) доставляет минимумы в (2.4).

Определим величины φ_k^* равенствами

$$(2.5)\qquad \varphi_k^* = \max_{k\leqslant i\leqslant n} \varphi_i, \quad k=1,\ldots,n,\ \varphi_0^*=\varphi_1^*, \quad \varphi_{n+1}^*=0$$

Лемма 1. Рекуррентные соотношения (2.4) имеют единственное решение

$$(2.6)\qquad S_k(z,q) = \max_{k\leqslant m\leqslant n+1} f_{k,m}$$

$$f_{k,m} = \varphi_m^* \left[\frac{|z|}{\varphi_k^*} - q + \sum_{i=k+1}^{m} \frac{\rho_{i-1}-\rho_i}{\varphi_i^*}\right] + \rho_m$$

$$m=k,\ldots,n, \quad f_{k,n+1}=\rho_n, \quad k=0,\ldots,n$$

Оптимальная стратегия игрока X определяется равенствами

$$(2.7)\qquad u_k^*(z,q) = -z/\varphi_k, \quad |z|\leqslant \varphi_k q$$

$$u_k^*(z,q) = -\frac{z}{|z|}q, \quad |z|>\varphi_k q, \quad \varphi_k>\varphi_{k+1}^*$$

$$u_k^*(z,q) = 0, \quad |z|>\varphi_k q, \quad \varphi_k\leqslant\varphi_{k+1}^*$$

Доказательство леммы может быть проведено методом математической индукции с использованием соотношений (2.4).

Оптимальное управление игрока Y в игре (2.2) (наихудшее для игрока X) находится при вычислении максимума в (2.4) и равно (e — произвольный единичный вектор):

$$(2.8)\qquad v_k^* = -\frac{z_k+\varphi_k u_k}{|z_k+\varphi_k u_k|}, \quad z_k+\varphi_k u_k \neq 0$$

$$v_k^* = e, \quad z_k+\varphi_k u_k = 0; \quad k=0,\ldots,n$$

Из (1.10) можно получить

$$(2.9)\qquad z(t_k+0) = z_k + \varphi_k u_k, \quad k=1,\ldots,n$$

С помощью соотношений (2.3), (2.8), (2.9) выводим оптимальное управление игрока Y в терминах исходной игры

$$(2.10)\qquad v^*(t) = -\frac{z(t_k+0)}{|z(t_k+0)|}, \quad z(t_k+0)\neq 0$$

$$v^*(t) = 0, \ z(t_k+0) = 0, \ t\in(t_k, t_{k+1}], \quad k=0,1,\ldots,n$$

3. Оптимизация моментов подачи импульсов. Формула (2.6) при $k=0$, $z=z^\circ$, $q=Q$ определяет минимальное гарантированное игроку X значение функционала (1.5) для произвольного программного (заданного до начала игры) распределения моментов подачи импульсов.

Задача 2. Найти оптимальную программную последовательность моментов t_k^*, $k=1,\ldots,n$, такую, что при ограничениях (1.3)

$$(3.1)\qquad \min_{(t_1,\ldots,t_n)} J^* = J^\circ$$

Минимум (3.1) существует на замыкании множества (1.3), так как величина (2.6) $J^* = S_0(z^\circ, Q)$ непрерывная функция переменных $t_1,\ldots,t_n$.

Если минимум (3.1) достигается в граничной точке множества (1.3), то, как следует из замечания в п. 1, найдется и другая точка минимума, удовлетворяющая условиям (1.3).

Обозначим через t_* ближайшую к моменту T точку максимума функции $\varphi(t)$ на интервале $[t_0, T]$

(3.2) $$\max_t \varphi(t) = \varphi(t_*), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T$$

Используя формулу (2.6), можно показать, что величина J^* для некоторой последовательности $t_1, \ldots, t_n$ не увеличится, если все моменты t_k, принадлежащие интервалу $[t_0, t_*]$, совместить с моментом t_*. Следовательно, оптимальная последовательность t_k^* находится среди последовательностей, удовлетворяющих условию

(3.3) $$t_* \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant t_{n+1} = T$$

Тогда минимум (3.1) при ограничениях (1.3) совпадает с минимумом при ограничениях (3.3).

Укажем область значений параметров, для которой минимум (3.1) легко вычисляется. Именно, пусть выполнено неравенство

(3.4) $$r^\circ - Q\varphi(t_*) + \rho(t_0) - \rho(t_*) \geqslant 0, \quad r^\circ = |z^\circ|$$

Соотношения (3.3), (3.4) позволяют установить оценку

$$r^\circ - Q\varphi(t_1) + \rho(t_0) - \rho(t_1) \geqslant r^\circ - Q\varphi(t_*) + \rho(t_0) - \\ - \rho(t_*) \geqslant 0$$

с помощью которой получаем, что на любой последовательности вида (3.3) величины (2.6) удовлетворяют условиям $f_{0,1} \geqslant \ldots \geqslant f_{0,n+1}$. Следовательно, имеем $J^* = f_{0,1}$. Из соотношений (3.1) — (3.3) тогда выводим

(3.5) $$J^\circ = \min_{t_1} [r^\circ - Q\varphi(t_1) + \rho(t_0)] = r^\circ - Q\varphi(t_*) + \rho(t_0)$$
$$t_1^* = t_*$$

Таким образом, в случае (3.4) первый импульс игроку X следует подать в момент t_*. Если на интервале $[t_0, t_*]$ игрок Y применял оптимальное управление (2.9), то на указанный импульс игрока X согласно (2.7), (3.4) будет израсходован весь ресурс Q. Остальные моменты подачи (нулевых) импульсов могут быть выбраны произвольно в рамках ограничений (3.3).

Пусть теперь выполнено неравенство

(3.6) $$r^\circ - Q\varphi(t_*) + \rho(t_0) - \rho(t_*) < 0$$

противоположное (3.4). Следующая ниже теорема дает алгоритм построения оптимальной последовательности при условии (3.6).

Для формулировки и доказательства этой теоремы введем в рассмотрение неотрицательные функции

(3.7) $$\Phi_k(t_1, \ldots, t_k) = \frac{r^\circ}{\varphi_1^*} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_{i-1} - \rho_i}{\varphi_i^*}, \quad k = 1, \ldots, n$$

и установим некоторые их свойства. Будем рассматривать последовательности, для которых $\varphi(t_n) = \varphi_n^* > 0$. Отметим, что для нахождения величин φ_k^* по формуле (2.5) необходимо задать полную последовательность $t_1, \ldots, t_n$, а величины Φ_k предполагаются функциями только первых k членов последовательности.

Минимумы

$$\Phi_k^*(t_k) = \min_{(t_1,\ldots,t_{k-1})} \Phi_k(t_1,\ldots,t_k), \quad t_* \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k, \quad k = 2,\ldots,n \tag{3.8}$$

достигаются на последовательности $t_1', \ldots, t_{k-1}'$, быть может не единственной, удовлетворяющей условиям

$$t_* \leqslant t_1' < \ldots < t_{k-1}' < t_k \tag{3.9}$$

$$\varphi_1^* > \varphi_2^* > \ldots > \varphi_k^*, \quad k = 2,\ldots,n \tag{3.10}$$

Используя определение (2.5), из неравенств (3.10) можно получить: $\varphi(t_1') > \ldots > \varphi(t_{k-1}') > \varphi(t_k)$. Таким образом, моменты t_i' располагаются так, что последовательность значений $\varphi(t_i')$ строго монотонно убывает. Свойства (3.9), (3.10) последовательности t_i' можно вывести из неравенства

$$\frac{\rho_{i-1} - \rho_{i+1}}{\varphi_{i+1}} \geqslant \frac{\rho_{i-1} - \rho_i}{\varphi_i} + \frac{\rho_i - \rho_{i+1}}{\varphi_{i+1}} \tag{3.11}$$

справедливого для трех моментов времени $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$, для которых $\varphi_{i-1} > \varphi_i > \varphi_{i+1}$.

Положим $\Phi_1^*(t_1) = \Phi_1(t_1)$. Пользуясь соотношениями (3.7), (3.8), можно показать, что функции $\Phi_k^*(\tau)$ не убывают с ростом τ, т. е.

$$\Phi_k^*(\tau_1) \leqslant \Phi_k^*(\tau_2), \quad \tau_1 < \tau_2, \ k = 1,\ldots,n \tag{3.12}$$

Пусть $t_1^\circ, \ldots, t_{n-1}^\circ$ — последовательность, доставляющая минимум (3.8) при $t_n = t_n^\circ$ и некотором $t_n = t_n^\circ$. Тогда очевидно, что минимумы (3.8) при $t_k = t_k^\circ$, $k = 2, \ldots, n-1$ достигаются на последовательности $t_1^\circ, \ldots, t_{k-1}^\circ$ и имеют место неравенства

$$\Phi_1^*(t_1^\circ) \leqslant \Phi_2^*(t_2^\circ) \leqslant \ldots \leqslant \Phi_n^*(t_n^\circ) \tag{3.13}$$

Используя (3.7), величины $f_{0,k}$ из формулы (2.6) можно представить в виде

$$f_{0,k} = \varphi_k^* [\Phi_k(t_1, \ldots, t_k) - Q] + \rho_k, \quad k = 1,\ldots,n \tag{3.14}$$

Поскольку

$$\min_{\substack{(t_1,\ldots,t_{k-1}) \\ t_* \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{k-1} \leqslant t_k}} f_{0,k} = \varphi_k^* [\min_{(t_1,\ldots,t_{k-1})} \Phi_k(t_1,\ldots,t_k) - Q] + \rho_k \tag{3.15}$$

то минимум (3.15) достигается на последовательности (3.9), доставляющей минимум (3.8).

Теорема 1. Пусть выполнено неравенство (3.6). Тогда

1°. Если имеет место неравенство

$$Q < Q^\circ = \lim_{\tau \to T} \Phi_n^*(\tau) \tag{3.16}$$

то оптимальная последовательность, быть может не единственная, удовлетворяет соотношениям

$$(3.17)\qquad \Phi_n^*(t_n^*) = Q$$

$$(3.18)\qquad \min_{(t_1,\ldots,t_{n-1})} \Phi_n(t_1,\ldots,t_{n-1},t_n^*) = \Phi_n(t_1^*,\ldots,t_n^*)$$

$$t_* \leqslant t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n^*$$

Величина J° равна $J^\circ = \rho(t_n^*)$.

2°. Если имеют место неравенства

$$(3.19)\qquad \varphi(T) > 0,\quad Q \geqslant Q^\circ$$

то оптимальна всякая последовательность вида (3.3), которая удовлетворяет условиям

$$(3.20)\qquad \Phi_n(t_1,\ \ldots,\ t_n) \leqslant Q,\quad t_n = T$$

При строгом неравенстве $Q > Q^\circ$ оптимальная последовательность неединственна. Величина J° равна

$$(3.21)\qquad J^\circ = \rho(t_n^*) = \rho(T) = 0$$

Доказательство. Преобразуем соотношение (3.1), используя (2.6), (3.3)

$$(3.22)\qquad J^\circ = \min_{(t_1,\ldots,t_n)} \max_{1\leqslant k\leqslant n+1} f_{0,k} = \min_{t_*\leqslant t_n\leqslant T} \max\{\lambda(t_n),\rho(t_n)\}$$

$$(3.23)\qquad \lambda(t_n) = \min_{(t_1,\ldots,t_{n-1})} \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_{0,k},\quad t_* \leqslant t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$$

Здесь учтено, что $f_{0,n+1} = \rho(t_n)$.

Функция $\rho(t_n)$, согласно (2.1), невозрастающая функция t_n на интервале $[t_0,\ T]$, причем $\rho(T) = 0$. С помощью (3.23), (3.6) и (2.6) находим, что

$$(3.24)\qquad \lambda(t_*) = r^\circ - Q\varphi(t_*) + \rho(t_0) < \rho(t_*)$$

Из отмеченных свойств непрерывных функций $\lambda(t_n)$, $\rho(t_n)$ следует, что минимум по t_n в (3.22) достигается либо в точке $t_n = t_n^*$, являющейся максимальным (ближайшим к T) корнем уравнения

$$(3.25)\qquad \lambda(t_n) = \rho(t_n)$$

либо в точке $t_n = t_n^* = T$. Неравенство (3.24) влечет за собой условие $t_n^* > t_*$.

Обратимся к доказательству утверждения 1°. Отметим, что при $\varphi(T) = 0$ имеет место $Q^\circ = +\infty$ и условие $Q < Q^\circ$ выполнено для всякого конечного Q. Обозначим через $t_n = t_n'$ ближайший к T корень уравнения

$$(3.26)\qquad \Phi_n^*(t_n) = Q$$

В силу монотонности (3.12) корень уравнения (3.26) при условии (3.6), (3.16) существует, причем $t_* < t_n' < T$. Можно показать, что функция $\lambda(t_n)$ удовлетворяет соотношениям

$$(3.27)\qquad \lambda(t_n) = \varphi(t_n)\,[\Phi_n^*(t_n) - Q] + \rho(t_n),\quad t_* \leqslant t_n \leqslant t_n'$$

$$\lambda(t_n) > \rho(t_n),\quad t_n' < t_n \leqslant T$$

Из формул (3.27) следует, что уравнения (3.25) и (3.26) эквивалентны, т. е. $t_n' = t_n^*$, поскольку при $\varphi(t_n) = 0$ равенство (3.25) не может быть удовлетворено. Поэтому, в частности, $\varphi(t_n^*) > 0$. Равенства (3.17) и (3.18) доказаны. Неравенство $\rho(t_n^*) > 0$ следует из неравенства $t_n^* < T$, отмеченного выше. Утверждение 1° доказано.

Для доказательства утверждения 2° остается показать, что при условии (3.19) минимум (3.22) по t_n достигается в точке $t_n = T$.

С помощью соотношений (2.6), (3.22) получаем, что на любой последовательности $t_1, \ldots, t_n$ вида (3.3), удовлетворяющей ограничениям (3.20), имеют место соотношения $f_{0,1} \leqslant \ldots \leqslant f_{0,n} \leqslant 0$, $\lambda(T) \leqslant 0$, $J^\circ = \rho(T) = 0$.

Условиям (3.20) удовлетворяет, в частности, последовательность, доставляющая минимум (3.18) при $t_n^* = T$.

Для этой последовательности при $Q > Q^\circ$ неравенства (3.20) и $\lambda(T) \leqslant 0$ строгие. Поэтому при достаточно малой по абсолютной величине вариации δt_k момента t_k, $k = 1, \ldots, n - 1$ эти неравенства не нарушаются. Отсюда вытекает неединственность оптимальной последовательности в случае (3.19).

Если игрок Y отклоняется в процессе игры от управления (2.10), то игрок X для использования «промахов» противника должен перед подачей очередного импульса произвести пересчет оптимального программного распределения моментов подачи импульсов. Такой пересчет в принципе можно проводить с помощью функции синтеза $t_1^* = \vartheta(r, t, n, Q)$, равной оптимальному моменту подачи первого импульса из предстоящих n импульсов при условии, что игра начинается в момент t из точки $z = x - y$, $|z| = r$ и с запасом ресурсов игрока X, равным Q. Алгоритм использования функции ϑ изложен в [1, 2].

Сформулируем достаточное условие единственности последовательности $t_1^*, \ldots, t_n^*$, построенной в теореме 1.

Лемма 2. Пусть на интервале (t_*, T) существуют и непрерывны производные $\varphi^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, причем

(3.28) $$\varphi^{\cdot}(t) < 0, \ \varphi^{\cdot\cdot}(t) \leqslant 0, \ \psi^{\cdot} \leqslant 0, \ t_* < t < T$$

Тогда при $Q \leqslant Q^\circ$ оптимальная последовательность $t_1^*, \ldots, t_n^*$ единственна.

С помощью формул (2.7), (2.10) можно показать, что в условиях леммы 2 все импульсы игрока X при оптимальном управлении игрока Y ненулевые и определяются равенствами (2.7) для случая $|z| \leqslant \varphi_k q$. Величина $\Phi_n^*(t_n^*)$ в уравнении (3.17) равна при этом сумме $|u_1^*| + \ldots + |u_n^*|$. Из (2.9), (2.7) следует, что после каждого импульса имеет место равенство $z(t_k^* + 0) = 0$, т. е. оптимальные импульсы компенсируют отклонение от нуля вектора $z(t)$.

Соотношения (2.7), (3.17) позволяют исследовать оптимальную стратегию игрока X в предельном случае при $n \to \infty$ аналогично изложенному в [1].

Рассмотрим игру (1.1)—(1.5) с точки зрения игрока Y, т. е. задачу о максимине функционала (1.5). Используя формулу (2.10), предложим следующую позиционную стратегию игрока Y:

(3.29) $$v(t) = -z(t)/|z(t)|, \ z(t) \neq 0; \ v(t) = e, \ z(t) = 0$$

Можно показать, что эта стратегия гарантирует игроку Y значение функционала (1.5) не меньшее, чем J^* в (1.9), при фиксированных моментах t_k, и не меньшее, чем J° в (3.1), при нефиксированных моментах. Таким образом, в позиционной игре (1.1)—(1.5) существует седловая ситуация, определяемая стратегиями (2.7) и (3.29); причем в задаче с нефиксированными моментами t_k игрок X для их построения использует функцию синтеза ϑ. Иными словами, минимакс (1.9) перестановочен, даже если минимизация проводится и по моментам t_k (см. (3.1)).

Отметим, что к уравнениям движения вида (1.1) или (1.10) сводятся, например, динамические уравнения в игре сближения объектов X и Y, определяемых дифференциальными уравнениями $L^m(t)\,x = u$, $L^k(t)\,y = v$. Здесь $L^m(t)$, $L^k(t)$ — линейные скалярные дифференциальные операторы порядка m и k. Работы [1-3] посвящены исследованию конкретных систем такого вида при $m = k = 2$ ([1,2]), $m = 2$, $k = 1$ ([1,3]).

Поступила 14 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горбунов В. К., Черноусько Ф. Л.* Задача оптимальной многоимпульсной коррекции возмущений. Автоматика и телемеханика, 1970, № 8.
2. *Горбунов В. К.* Минимаксная импульсная коррекция возмущений линейного демпфированного осциллятора. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.
3. *Корнеев В. А., Меликян А. А.* Дифференциальная игра с импульсным управлением одного игрока. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
4. *Ухоботов В. И.* Об одном классе линейных дифференциальных игр с импульсными управлениями. ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
5. *Пожарицкий Г. К.* Игровая задача импульсного сближения с противником, ограниченным по энергии. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
6. *Ананьев Б. И., Куржанский А. Б., Шелементьев Г. С.* Минимаксный синтез в задачах импульсного наведения и коррекции движения. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.