Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

# АППРОКСИМАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГР

А. В. Кряжимский, В. И. Максимов

(Свердловск)

Приводятся методы приближенного решения позиционных дифференциально-разностных игр сближения и точного решения игр уклонения [1, 2], основанные на использовании некоторых конечномерных процедур определения управления [3, 4]. Работа примыкает к исследованиям [1–11].

1. Рассматривается управляемая система

$$x^{\cdot}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t-\tau) + B(t)u - C(t)v + w(t) \tag{1.1}$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad u \in P \subset E_{r_1}, \quad v \in Q \subset E_{r_2}$$
$$\tau = \mathrm{const} > 0$$

Здесь $x$ — $n$-мерный фазовый вектор; векторы $u$ и $v$ — управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно; $P$ и $Q$ — выпуклые компакты; матрицы $A$ и $A_\tau$ постоянны, $B(t)$ и $C(t)$ непрерывны; $w(t)$ — заданное возмущение (интегрируемая по Лебегу функция).

Заданы начальное состояние $x_0(s) \in H$ [1,2] и замкнутое множество $M \subset E_n$. Первый игрок выбором управления $u$ стремится обеспечить включение $x(t_*) \in M$ хотя бы при одном $t_* \in [t_0, \vartheta]$ (игра сближения к моменту), или включение $x(\vartheta) \in M$ (игра сближения в момент) для фазового вектора системы. Второй игрок стремится выбирать свое управление $v$ так, чтобы ни при каком $t \in [t_0, \vartheta]$ не выполнялось включение $x(t) \in M$ (игра уклонения).

Определение позиции $p$, стратегий $U$ и $V$ и движений $x[t; p_0, U]$, $x[t; p_0, V]$, $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ дано в [2,5]. Там же приведена формализированная постановка задач (1) сближения в момент $\vartheta$ с множеством $M$, (2) сближения к моменту $\vartheta$ с множеством $M$ и (3) уклонения от множества $M$. Из результатов этих работ следует, что если заданы сильно $u$-стабильные ($u$-стабильные) множества $K_t \subset H$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $K_{\vartheta 0} \subset M$ и $x_0(s) \in K_{t_0}$, то стратегия $U_e$, экстремальная к ним, решает задачу 1 (задачу 2). Здесь $K_{\vartheta 0}$ — 0-сечение [6] множества $K_\vartheta$. Сходный результат имеет место и для задачи 3 [10]. Определение управления $u(t, x(s))$ в силу стратегии $U_e$ требует решения некоторой экстремальной задачи в гильбертовом пространстве $H$. Ниже указываются способы построения стратегий первого и второго игроков, обеспечивающие точное решение задачи 3 и приближенное (с любой степенью точности) решение задач 1 и 2, основанные на решении некоторых конечномерных экстремальных задач.

Пусть $X(t_0, x_0(s))$ — пучок всех движений $x(t) = x(t;\ p_0, u, v)$, $u \in \{u(\cdot)\}$, $v \in \{v(\cdot)\}$ [1]; $X(t_*) = \{y(s) = x(t_* + s) \mid x(t) \in X(t_0, x_0(s))\}$ — сечение гиперплоскостью $t = t_*$ пучка $X(t_0, x_0(s))$; $T_m : H \to E_{(m+1)n}$ — следующий оператор:

$$T_m x(s) = \left\| \begin{matrix} y(0) \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{matrix} \right\|, \quad y^{(0)} = x(0), \quad \omega_m = \frac{\tau}{m}$$

$$y^{(i)} = \omega_m^{-1/2} \int\limits_{-i\omega_m}^{-(i-1)\omega_m} x(s)\,ds, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$F_m(x(s)) = \sum_{i=1}^{m} \| y^{(i)} \|^2$$

$$\| x(s) \|_{m,\tau} = (F_m(x(s)) + \| y^{(0)} \|^2)^{1/2}$$

$$L_t = K_t \cap X(t) \neq \varnothing$$

$D^\varepsilon$ — замкнутая $\varepsilon$-окрестность множества $D$, $\| x(s) \|_\tau$ — норма в $H$ [1, 2], $K_t$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ — система замкнутых множеств в $H$. В силу компактности пучка $X(t_0, x_0(s))$ в $C^n[t_0, \vartheta]$ [1], по числу $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\beta = \beta(\varepsilon, x_0(s)) > 0$, что, каковы бы ни были движение $x(t) \in X(t_0, x_0(s))$ и моменты $t_1$ и $t_2$, $|t_1 - t_2| \leqslant \beta$, имеет место неравенство

$$\| x(t_1) - x(t_2) \| \leqslant {}^1/_2\varepsilon \tag{1.2}$$

С помощью (1.2) непосредственными оценками проверяется

*Лемма 1.1.* При любых $m \geqslant \tau / \beta$, $x_i(t) \in X(t_0, x_0(s))$, $i = 1, 2$, $t \in [t_0, \vartheta]$ справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_{-\tau}^{0} \| x_1(t+s) - x_2(t+s) \|^2 ds - F_m(x_1(t+s) - x_2(t+s)) \right| \leqslant 2\tau\varepsilon^2$$

Если множества $K_t$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ выпуклы и замкнуты, то для любого элемента $x(s)$ можно указать единственные элементы $y_m(s;\ t, x(s))$ и $y(s;\ t, x(s))$ со свойствами

$$\| x(s) - y(s;\ t, x(s)) \|_\tau = \min_{y(s) \in L_t} \| x(s) - y(s) \|_\tau$$

$$\| x(s) - y_m(s;\ t, x(s)) \|_{m,\tau} = \min_{y(s) \in L_t} \| x(s) - y(s) \|_{m,\tau}$$

Учитывая лемму 1.1 и теорему 1.2 [12], получим при всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $m \geqslant \tau / \beta$, $x(s) \in X(t)$ оценку

$$\| y(s;\ t, x(s)) - y_m(s;\ t, x(s)) \|_\tau \leqslant \varkappa \tag{1.3}$$

$$\varkappa = (4\varepsilon\sqrt{\tau} B_1 + 4\varepsilon^2\tau)^{1/2}, \quad B_1 = \sup \{\| x_1(s) - x_2(s) \|_\tau \mid x_i(s) \in X(t),\ t \in [t_0, \vartheta],\ i = 1, 2\}$$

равномерную относительно любой системы замкнутых множеств $K_t \subset H$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, такой, что $L_t \neq \varnothing$.

Стратегию $U_m$ определим следующим образом:

$$U_m(t, x(s)) = \{u_m \in P \mid B(t) u_m (z^{(0)} - y^{(0)}) = \max_{u \in P} B(t) u (z^{(0)} - y^{(0)})\}, \quad y = T_m x(s)$$

Здесь $z$ — ближайший к вектору $y$ вектор из множества $T_m L_t$.

*Теорема 1.1.* Пусть выпуклые и замкнутые множества $K_t$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ сильно $u$-стабильны ($u$-стабильны), $K_{\vartheta_0} \subset M$ и $x_0(s) \in K_{t_0}$. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такой номер $m_0 = m_0(\varepsilon, x_0(s))$, что стратегия $U_m$ обеспечивает попадание всех движений $x[t; p_0, U_m]$ в момент $\vartheta$ (к моменту $\vartheta$) в $\varepsilon$-окрестность множества $M$ при любом $m > m_0$.

Доказательство теоремы следует, с использованием очевидного равенства $z = T_m y_m(s;\ t,\ x(s))$ и оценки (1.3), схеме доказательства леммы 2.1 [6].

Заметим, что оценка (1.3) верна, если считать

$$B_1 = \sup\{\min_{y(s)\in L_t} \|x(s) - y(s)\|_\tau \mid x(s) \in X(t),\ t \in [t_0, \vartheta]\}$$

Нетрудно видеть, что приведенные выше результаты остаются верными для нелинейных систем с последействием, удовлетворяющим условиям работы [11].

2. Покажем, что для приближенного решения задачи 1 (задачи 2) из любой позиции, из которой она разрешима, можно использовать стратегию прицеливания на некоторые множества, сконструированные на основе множеств позиционного поглощения для некоторых аппроксимирующих систем без запаздывания.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим следующие аппроксимирующие системы:

$$
\begin{aligned}
&dy^{(0)}/dt = Ay^{(0)} + A_\tau \omega^{-1/2} y^{(m)} + B(t)u - C(t)v + w(t)\\
&dy^{(1)}/dt = \omega_m^{-1/2} y^{(0)} - \omega_m^{-1} y^{(1)}\\
&dy^{(i)}/dt = \omega_m^{-1} y^{(i-1)} - \omega_m^{-1} y^{(i)}, \qquad i = 2, \ldots, m\\
&t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad u \in P, \quad v \in Q
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Пусть $W_t^* \subset H$, $W_t^*(\varepsilon) \subset H$ — множества позиционного поглощения в момент $\vartheta$ (к моменту $\vartheta$) системой (1.1) множеств $M$, $M^\varepsilon$ соответственно [1, 5], $W_{mt}(\varepsilon)$ — множества позиционного поглощения в момент $\vartheta$ (к моменту $\vartheta$) системой (2.1) множества [3, 4]

$$M_\varepsilon^* = \{y = (y^{(0)}, \ldots, y^{(m)}) \in E_{(m+1)n} \mid y^{(0)} \in M^\varepsilon, \quad y^{(i)} \in E_n, \ i = 1, \ldots, m\}$$

Учитывая оценки работ [7, 8], можно проверить справедливость следующего утверждения.

*Лемма 2.1.* Для любого $\alpha > 0$ найдется номер $N = N(\alpha)$, такой, что, каков бы ни был номер $m > N$, при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ выполняются включения

$$W_t^* \cap X(t) \subset [T_m^{-1} W_{mt}(\alpha)] \cap X(t) \subset W_t^*(2\alpha) \cap X(t)$$

Имеет место

*Лемма 2.2.* Каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $t \in [t_0, \vartheta]$, существует $\delta = \delta(t, \varepsilon) > 0$, обеспечивающее выполнение соотношения

$$W_t^*(\delta) \cap X(t) \subset [W_t^* \cap X(t)]^\varepsilon$$

Обозначим $L_{mt}(\alpha) = [T_m^{-1}W_{mt}(\alpha)] \cap X(t)$, $y(s; t, x(s), m, \alpha)$ и $w(s; t, x(s), m, \alpha)$ элементы со свойствами

$$\| x(s) - y(s; t, x(s), m, \alpha) \|_\tau = \min_{y(s) \in L_{mt}(\alpha)} \| x(s) - y(s) \|_\tau$$

$$\| x(s) - w(s; t, x(s), m, \alpha) \|_{m, \tau} = \min_{y(s) \in L_{mt}(\alpha)} \| x(s) - y(s) \|_{m, \tau}$$

Предположим, что множества $W_{mt}(\alpha)$ выпуклы. Тогда для любого $\varkappa > 0$, как следует из (1.4), найдется число $N = N(\varkappa)$, такое, что при всех $m > N$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $\alpha > 0$, $x(s) \in L_{mt}(\alpha)$, $x(s) \in X(t)$ имеет место оценка

$$\| y(s; t, x(s), m, \alpha) - w(s; t, x(s), m, \alpha) \|_\tau < \varkappa \tag{2.2}$$

На основании лемм 2.1, 2.2 и теоремы 1.2 [12] с учетом ограниченности величины $c_1 = \sup \{\| x_1(s) - x_2(s) \|_\tau \mid, \ x_i(s) \in X^\varepsilon(t), \ i = 1, 2, \ t \in [t_0, \vartheta]\}$ получаем, что для любых $\varepsilon > 0$ и $t \in [t_0, \vartheta]$ найдется число $\delta = \delta(t, \varepsilon) > 0$, такое, что по каждому $\alpha \in (0, \delta)$ можно указать номер $N = N(\alpha)$, удовлетворяющий условию: для всякого $m > N$ справедливо неравенство

$$\| y_*(s; t, x(s)) - y(s; t, x(s), m, \alpha) \|_\tau < \varepsilon \tag{2.3}$$

каков бы ни был элемент $x(s) \in X(t)$. Здесь $y_*(s; t, x(s))$ — ближайший к $x(s)$ в $H$ элемент из $W_t^* \cap X(t)$.

Стратегию $U^\varepsilon$ определим следующим образом:

$$U^\varepsilon(t, x(s)) = \{u_* \in P \mid B(t)\, u_*(z^{(0)} - y^{(0)}) = \max_{u \in P} B(t)\, u(z^{(0)} - y^{(0)})\}, \quad y = T_{m_*}x(s)$$

Здесь $z$ — ближайший к вектору $y$ вектор из $W_{m_*t}(\alpha_*) \cap T_{m_*}X(t)$, $\alpha_*$ — некоторое число из интервала $(0, \delta(t, \varepsilon))$; $m_*$ — некоторый номер, больший $N(\alpha_*)$.

*Теорема 2.1.* Пусть $x_0(s) \in W_{t_0}^*$. Тогда для любого $\sigma > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что стратегия $U^\varepsilon$ обеспечивает попадание движений $x[t] = x[t; p_0, U^\varepsilon]$ в момент $\vartheta$ (к моменту $\vartheta$) в $M^\sigma$.

Доказательство теоремы основывается на оценках (2.2), (2.3), равенстве $z = T_{m_*}w(s; t, x(s), m_*, \alpha)$ и следует схеме доказательства леммы 2.1 [6].

Стратегию $U_{m,\alpha}$ определим следующим образом:

$$U_{m,\alpha}(t, x(s)) = \{u_* \in P \mid B(t)u_*(z_*^{(0)} - y_*^{(0)}) = \max_{u \in P} B(t)u(z_*^{(0)} - y_*^{(0)})\}, \quad y_* = T_mX(t)$$

Здесь $z_*$ — ближайший к $y_*$ вектор из $W_{mt}(\alpha) \cap T_mX(t)$.

Из теоремы 2.1 вытекает

*Теорема 2.2.* Пусть $x_0(s) \in W_{t_0}^*$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ со свойством: каково бы ни было конечное разбиение $\Delta$ отрезка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\delta(\Delta) \leqslant \delta$, найдутся $\alpha > 0$ и $N = N(\varepsilon, \Delta) > 0$, такие, что стратегия $U_{m,\alpha}$ обеспечивает попадание всех аппроксимационных движений $x_\Delta[t] = x_\Delta[t; p_0, U_{m,\alpha}]$ [5, 6] в момент $\vartheta$ (моменту $\vartheta$) в $M^\varepsilon$, если только $m > N$.

3. Установим, что задача 1 для системы (1.1) равносильна такой же задаче для некоторой линейной системы без запаздывания той же размерности. В этом и следующем пунктах матрицы $A = A(t)$ и $A_\tau = A_\tau(t)$ непрерывны по $t$.

Пусть $F(t, \xi)$ — фундаментальная матрица системы (1.1) [1]; $A_{t_*, t^*}: H \to H$ — оператор решения однородной системы, соответствующей (1.1) [9]; $D_{t_*, t^*}: H \to E_n$ — следующий оператор: $D_{t_*, t^*}x(s) = y(0)$, где $y(s) = A_{t_*, t^*}x(s)$.

Опираясь на свойства матрицы $F(t, \xi)$ [1], нетрудно доказать следующее утверждение.

*Лемма 3.1.* Для любой суммируемой $n$-мерной функции $z(t)$ и любых $t_* \leqslant t^* \leqslant \zeta$ из $[t_0, \vartheta]$ имеет место равенство

$$A_{t^*, \zeta} \int_{t_*}^{t^*} F(t^* + s, \xi) z(\xi) d\xi = \int_{t_*}^{t^*} F(\zeta + s; \xi) z(\xi) d\xi$$

Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему без запаздывания

$$y^\cdot = F(\vartheta, t)(B(t)u - C(t)v + w(t)) \qquad (3.1)$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad u \in P, \quad v \in Q$$

Стратегией, экстремальной к замкнутым множествам $Z_t \subset E_n$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, назовем следующую стратегию $U^*$, построенную для системы (1.1):

$$U^*(t, x(s)) = \{u^* \in P \mid F(\vartheta, t) B(t) u^*(z - D_{t,\vartheta}x(s)) = \max_{u \in P} F(\vartheta, t)B(t)u(z - D_{t,\vartheta}x(s))\}$$

Здесь $z$ — ближайший к вектору $D_{t,\vartheta}x(s)$ вектор из $Z_t$. Аналогично определим стратегию $V^*$, экстремальную к множествам $Z_t$.

С помощью леммы 3.1 доказывается

*Лемма 3.2.* Пусть замкнутые множества $Z_t \subset E_n$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ сильно $u$-стабильны (сильно $v$-стабильны) для системы (3.1) и $D_{t_0,\vartheta}x_0(s) \in Z_{t_0}$. Тогда стратегия $U^*$ ($V^*$), экстремальная к множествам $Z_t$, обеспечивает попадание всех движений $x[t] = x[t; p_0, U^*]$ ($x[t] = x[t; p_0, V^*]$) системы (1.1) в момент $\vartheta$ на множество $Z_\vartheta$.

Пусть $W_t^*$, $W_t$ — множества позиционного поглощения $M$ в момент $\vartheta$ системами (1.1), (3.1) соответственно.

*Теорема 3.1.* $x_0(s) \in W_{t_0}^*$ тогда и только тогда, когда

$$D_{t_0,\vartheta}x_0(s) \in W_{t_0} \qquad (3.2)$$

Если (3.2) выполняется, то стратегия $U^*$, экстремальная к $W_t$, решает задачу 1.

Доказательство теоремы основывается на теореме 17.1 [3] об альтернативе и лемме 3.2.

4. Укажем еще один способ приближенного решения задачи 2. Пусть $t_0 = \xi_0 < \ldots < \xi_m = \vartheta$, $\xi_{i+1} - \xi_i = \omega_m^* = (\vartheta - t_0) / m$, $i = 0, \ldots$

$\ldots, m-1$. Рассмотрим систему без запаздывания

$$(4.1)\qquad y_i^{\cdot} = \begin{cases} F(\xi_i, t)\,[B(t)\,u - C(t)\,v + w(t)], & t \in [t_0, \xi_i] \\ 0, & t \in (\xi_i, \vartheta] \end{cases}$$
$$i = 1, \ldots, m \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad u \in P, \quad v \in Q$$

Пусть $i(t) = \min\{i \mid \xi_i \geqslant t,\ i = 1, \ldots, m\}$; $D_t^{(m)}: H \to E_{(m-i(t)+1)n}$ — следующий оператор:

$$D_t^{(m)}\,x(s) = \begin{Vmatrix} D_{t,\,\xi_{i(t)}}\,x(s) \\ \vdots \\ D_{t,\,\xi_m}\,x(s) \end{Vmatrix}$$

$$L^{(m)}(t) = \begin{Vmatrix} F(\xi_{i(t)}, t) \\ \vdots \\ F(\xi_m, t) \end{Vmatrix}$$

Стратегией, экстремальной к замкнутым множествам $Z_t \subset E_{mn}$, назовем стратегию $U_*$, построенную для системы (1.1) по правилу

$$U_*(t, x(s)) = \{u_* \in P \mid L^{(m)}(t)B(t)u_*(z - D_t^{(m)}\,x(s)) = \max_{u \in P} L^{(m)}(t)B(t)u\,(z - D_t^{(m)}\,x(s))\}$$

Здесь $z$ — ближайший к $D_t^{(m)}\,x(s)$ вектор из $\pi_t^{(m)} Z_t$, $\pi_t^{(m)}: E_{mn} \to E_{(m-i(t)+1)n}$ — оператор проектирования на последние $(m - i(t) + 1)n$ координат. Аналогично определим стратегию $V^*$, экстремальную к $Z_t$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ число $\delta(\varepsilon) > 0$ выберем таким образом, чтобы имели место оценки

$$(4.2)\qquad \| D_{t_*, t^*}\,x(s) - x(0) \| < \varepsilon, \quad | t^* - t_* | < \delta(\varepsilon), \quad x(s) \in X(t_*)$$

В силу компактности в $C^n[t_0, \vartheta]$ пучка $X(t_0, x_0(s))$ число $\delta(\varepsilon)$ существует. Введем множества

$$N_i^{(m)}(\alpha) = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times E_{(i-1)n} \times M^\alpha \times E_{(m-i)n}, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$N^{(m)}(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{m} N_i^{(m)}(\alpha)$$

полагая $\alpha > 0$. Очевидно, множество $N_\alpha^{(m)}$ замкнуто в $[t_0, \vartheta] \times E_{mn}$. Обозначим: $p_t^{(m)}: E_{mn} \to E_n$ — оператор проектирования на координаты с номерами $(i(t) - 1)n + 1, \ldots, i(t)n$. Подобно лемме 3.2 с использованием оценки (4.2) устанавливается

*Лемма 4.1.* Пусть $\omega_m^* < \delta(\varepsilon)$, замкнутые множества $Z_t \subset E_{mn}$ $u$-стабильны относительно $N^{(m)}(\alpha)$ (сильно $u$-стабильны) для системы 4.1 и $D_{t_0}^{(m)}x_0(s) \in Z_{t_0}$. Тогда стратегия $U_*$ $(V_*)$, экстремальная к множествам $Z_t$, обеспечивает для движений $x[t] = x[t;\ p_0, U_*]$ $(x[t] = x[t;\ p_0, V_*])$ системы (1.1) выполнение следующего условия: $x[t_*] \in M^{\alpha+\varepsilon}$ при некотором $t_* \in [t_0, \vartheta]$ $(x[t_*] \in (p_{t_*}^{\pi(m)} Z_{t_*})^\varepsilon$ при всех $t_* \in [t_0, \vartheta])$.

Введем обозначения: $W_t^*$ — множества позиционного поглощения $M$ к моменту $\vartheta$ системой (1.1), $W_t^{(m)}(\alpha)$ — множества позиционного поглощения $M$ к моменту $\vartheta$ системой (4.1).

*Теорема 4.1.* Если $x_0(s) \in W_{t_0}{}^*$, то для любых $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ и $m$, такого, что $\omega_m{}^* < \min\{\delta(\alpha/2),\ \delta(\varepsilon)\}$, экстремальная к $W_t{}^{(m)}(\alpha)$ стратегия $U_*$ обеспечивает попадание движений $x[t] = x[t;\, p_0,\, U_*]$ к моменту $\vartheta$ в $M^{\alpha+\varepsilon}$.

Теорема устанавливается на основании леммы 4.1 и свойств множеств $W_t{}^{(m)}(\alpha)$.

5. Изучим задачу 3 об уклонении от цели $M$, предполагая, что существует множество $R$, удовлетворяющее соотношению $P = Q + R$.

Пусть $Y(t, \xi)$ — фундаментальная матрица однородной системы, соответствующей системе (2.1); $Y_k{}^0(t, \xi)$ — матрица, составленная из первых $k$ строк матрицы $Y(t, \xi)$; $A_{m_t}^* : H \to E_{(m_t+1)n}$ — оператор вида

$$A_{m_t}^* x(s) = \{y^{(0)}, \ldots, y^{(m_t)}\}, \quad y^{(0)} = x(0)$$

$$y^{(i)} = \omega_m^{-1/2} \int\limits_{-i\omega_m}^{-(i-1)\omega_m} x(s)\, ds, \quad i = 1, \ldots, m_t$$

$$y_0{}^* = A_{m_\vartheta}^* x_0(s)$$

$$K_l{}^\circ(t) = \left\{\int\limits_{t_0}^{t} Y_l{}^\circ(t, \xi)\, g^*(\xi)\, d\xi \mid g^*(\xi) \in R_*\right\} \subset H$$

$$L_l{}^\circ(t) = Y_l{}^\circ(t, t_0)\, y_0{}^* + K_l{}^\circ(t) + \int\limits_{t_0}^{t} Y_l{}^\circ(t, \xi)\, w_*(\xi)\, d\xi$$

$$m_t = \max\{i \mid t - i\omega_m \geqslant t_0,\ i = 0, \ldots, m\}$$

$$w_*(t) = (w(t), 0, \ldots, 0) \in E_{(m+1)n}$$

$$R_* = R \times \prod_{i=1}^{m} \{0\}$$

Здесь $\{0\}$ — множество, состоящее из нулевого вектора пространства $E_n$. Стратегию $V_m$ определим системой множеств $V_m(t, x(s))$ вида

$$V_m(t, x(s)) = \{v^* \mid (g^{(0)}(t, x(s)) - [A_{m_t}^* x(s)]^{(0)})\, v^* =$$
$$= \max_{v \in Q} (g^{(0)}(t, x(s)) - [A_{m_t}^* x(s)]^{(0)})\, v\}$$

Здесь $g(t, x(s)) = \{g^{(0)}(t, x(s)), \ldots, g^{(m_t)}(t, x(s))\}$ — ближайший к $A_{m_t}^* x(s)$ элемент множества $A_{m_t}^* L_n{}^\circ(t + s)$.

*Теорема 5.1.* Пусть при некотором числе $\varepsilon > 0$ $L_n{}^\circ(t) \cap M^\varepsilon = \varnothing$, каков бы ни был момент $t \in [t_0, \vartheta]$. Тогда найдется число $N$, такое, что при всех $m > N$ стратегия $V_m$ решает задачу 3.

Доказательство теоремы опирается на результаты работ [7, 10].

Отметим, что условие теоремы 5.1 выполняется в случае выпуклости множества $M$, если величина $\varepsilon(t_0, t, x_0(s))$, определенная в [2], больше нуля при всех $t \in [t_0, \vartheta]$.

Авторы благодарят Н. Н. Красовского и Ю. С. Осипова за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Поступила 21 VII 1977

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* Линейные дифференциально-разностные игры. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 4.
2. *Осипов Ю. С.* К теории дифференциальных игр систем с последействием. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
4. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи динамики. I. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 5.
5. *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры систем с последействием. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 4.
6. *Осипов Ю. С.* Дифференциальная игра наведения для систем с последействием. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
7. *Красовский Н. Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
8. *Куржанский А. Б.* К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 12.
9. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
10. *Кряжимский А. В.* К задаче об уклонении от функциональной цели линейной системы с последействием. В сб.: Игровые задачи управления. Свердловск, 1977.
11. *Максимов В. И.* Альтернатива в дифференциально-разностной игре сближения — уклонения с функциональной целью. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
12. *Балакришнан А.* Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1974.