Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

ОБОБЩЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ

М. Байбазаров, А. И. Субботин

(Алма-Ата, Свердловск)

Рассматривается позиционная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания, платой в которой является значение заданной функции конечного состояния. Определено семейство функций, которые в соответствии с методом динамического программирования трактуются как обобщенные потенциалы. Показано, что функция цены дифференциальной игры совпадает с нижней огибающей этого семейства обобщенных потенциалов. Исследуется также задача о существовании оптимальных в целом стратегий игроков. Материал данной работы примыкает к исследованиям [1–9].

1. Пусть движение управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v), \quad f\colon [t_0, \vartheta] \times R^n \times P \times Q \to R^n \tag{1.1}$$

$$t \in [t_0, \vartheta], \quad x \in R^n, \quad u \in P \subset R^p, \quad v \in Q \subset R^q$$

Здесь P и Q — компакты; f — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица по переменной x в каждой области $[t_0, \vartheta] \times D \times \times P \times Q$, где D — некоторое ограниченное множество в R^n.

Предполагается, что начальные точки $x_0 = x[t_0]$ принадлежат некоторому компакту X_{t_0}. Символом X_τ обозначим совокупность всех точек x_τ, для которых существует решение уравнения в контингенциях

$$x^{\cdot}[t] \in \mathrm{co}\,\{f(t, x, u, v)\colon u \in P,\ v \in Q\}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau$$

$$x[t_0] \in X_{t_0}, \quad x[\tau] = x_\tau$$

Предполагается, что множества X_τ $(t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ непусты и равноограничены. В дальнейшем используется следующее обозначение:

$$H = \{(t, x)\colon t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \ x \in X_t\}$$

Рассматривается дифференциальная игра, платой в которой является величина $\sigma(x[\vartheta])$, где $\sigma\colon R^n \to R$ — заданная непрерывная функция, $x[\vartheta]$ — фазовое состояние системы, реализовавшееся в конечный момент времени $t = \vartheta$. Предполагается, что первый игрок, которому предоставлено управление u, выбирает чистые позиционные стратегии $U \div u(t, x)$ и стремится минимизировать значение платы; а второй игрок, которому предоставлено управление v, выбирает контрстратегии $V^u \div v(t, x, u)$ и стремится максимизировать величину $\sigma(x[\vartheta])$.

Известно, что в этой игре для каждой исходной позиции $(t_*, x_*) \in H$ существует седловая точка, которую образует пара (U_e, V_e^u), где U_e и V_e^u — чистая стратегия и контрстратегия, экстремальные к мостам

$$W_{u_*}{}^\circ = \{(t, x) \in H\colon c_0(t, x) \leqslant c_0(t_*, x_*)\} \tag{1.2}$$

$$W_v{}^\circ = \{(t, x) \in H\colon c_0(t, x) \geqslant c_0(t_*, x_*)\} \tag{1.3}$$

соответственно [3]. Здесь $c_0\colon H \to R$ — функция цены игры.

Также известно, что эту функцию можно построить различными способами [3–9]. В данной работе показано, что функцию c_0 можно определить как нижнюю огибающую некоторого семейства обобщенных потенциалов.

2. Определим семейство обобщенных потенциалов. Для точки (t^*, t_*, x_*, u_*), где $(t_*, x_*, u_*) \in H \times P$, $t^* \in [t, \vartheta]$, символом $G(t^*, t_*, x_*, u_*)$ обозначим совокупность точек x^*, для которых существует решение уравнения в контингенциях

$$x^\cdot[t] \in \operatorname{co}\{f(t, x[t], u_*, v)\colon v \in Q\}, \quad t_* \leqslant t \leqslant t^*$$

$$x[t_*] = x_*, \quad x[t^*] = x^*$$

(т. е. $G(t^*, t_*, x_*, u_*)$ — замыкание области достижимости для системы (1.1) при постоянном управлении $u(t) = u_*$ и всевозможных программных управлениях $v(t) \in Q$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$).

Функцию $\omega\colon H \to R$ назовем обобщенным потенциалом, если для нее выполнены следующие три условия:

1°. Функция ω непрерывна на H.

2°. Выполняется краевое условие

$$\omega(\vartheta, x) = \sigma(x) \quad \text{при } x \in X \tag{2.1}$$

3°. Для любой точки $(t_*, x_*) \in H$, $t_* < \vartheta$ справедливо неравенство

$$\varliminf_{t^* \to t_* + 0} \min_{u \in P} \max_{x \in G(t^*, t_*, x_*, u)} \frac{\omega(t^*, x) - \omega(t_*, x_*)}{t^* - t_*} \leqslant 0 \tag{2.2}$$

Совокупность функций ω, удовлетворяющих этим трем условиям, будем обозначать символом Ω.

Укажем некоторые утверждения, которые справедливы для множества Ω.

Лемма 2.1. Множество Ω непусто.

Для доказательства достаточно рассмотреть функцию

$$\omega(t_*, x_*) = \min_{u \in P} \max_{x \in G(\vartheta, t_*, x_*, u)} \sigma(x), \quad (t_*, x_*) \in H \tag{2.3}$$

и непосредственно проверить для нее выполнение условий 1°—3°.

Лемма 2.2. Для любой функции $\omega_* \in \Omega$ и любого числа $\tau \in [t_0, \vartheta]$ функция ω^*, определенная соотношением

$$\omega^*(t_*, x_*) = \begin{cases} \omega_*(t_*, x_*) & \text{при } t_* \in [\tau, \vartheta],\ x_* \in X_{t_*} \\ \min\limits_{u \in P} \max\limits_{x \in G(\tau, t_*, x_*, u)} \omega_*(\tau, x) & \\ & \text{при } t_* \in [t_0, \tau],\ x_* \in X_{t_*} \end{cases} \tag{2.4}$$

принадлежит множеству Ω.

Лемма 2.3. Для любого конечного набора функций $\omega_i \in \Omega$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ нижняя огибающая этого набора ω_*, определенная равенством

$$\omega_*(t_*, x_*) = \min_{1\leqslant i\leqslant m} \omega_i(t_*, x_*),\ (t_*, x_*) \in H \tag{2.5}$$

принадлежит множеству Ω.

Доказательства лемм 2.2 и 2.3 состоят в простой проверке условий 1° — 3° для функций ω^* (2.4) и ω_* (2.5).

Для формулировки следующего утверждения введем некоторые обозначения. Пусть $x \in X_\vartheta$ и $\beta > 0$, полагаем

$$d_*(x, \beta) = \sigma(x) - \min\{\sigma(y)\}: y \in X_\vartheta \cap S(x, \beta)\}$$

$$S(x, \beta) = \{y \in R^n: \| y - x \| \leqslant \beta\}$$

$$d^*(\beta) = \max\{d_*(x, \beta) : x \in X_\vartheta\}$$

$$d(\alpha) = d^*(\alpha \exp \lambda (\vartheta - t_0)) \quad (\alpha > 0)$$

где λ — постоянная Липшица функции f по переменной x в области $H \times P \times Q$. Заметим, что из непрерывности функции σ следует $d(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Лемма 2.4. Для любых точек $(t_*, x_*) \in H$, $(t_*, x^*) \in H$ и всякой функции $\omega \in \Omega$ можно построить функцию $\omega^\circ \in \Omega$, удовлетворяющую неравенству

$$\omega^\circ(t_*, x^*) \leqslant \omega(t_*, x_*) + d(\| x_* - x^* \|) \tag{2.6}$$

Приведем схему доказательства этой леммы. Пусть

$$r(t) = \| x_* - x^* \| \exp \lambda (t - t_*)$$

Рассмотрим функцию $\eta : H \to R$, определенную равенством

$$\eta(t, x) = \min\{\omega(t, y) : y \in X_t \cap S(x, r(t))\} + d(\| x_* - x^* \|)$$

Можно доказать, что функция η удовлетворяет неравенствам

$$\eta(t_*, x^*) \leqslant \omega(t_*, x_*) + d(\| x_* - x^* \|), \quad \eta(\vartheta, x) \geqslant \sigma(x) \quad \text{при } x \in X_\vartheta$$

является непрерывной и для нее выполняется условие 3°. Далее можно проверить, что функция

$$\omega^\circ(t, x) = \min\{\eta(t, x), \omega(t, x)\}, \quad (t, x) \in H$$

принадлежит классу Ω и удовлетворяет неравенству (2.6).

Введем в рассмотрение нижнюю огибающую семейства Ω

$$\omega_0(t, x) = \inf\{\omega(t, x): \omega \in \Omega\}, \quad (t, x) \in H \tag{2.7}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Функция ω_0 (2.7) полунепрерывна сверху на H; при каждом $t \in [t_0, \vartheta]$ функция ω_0 непрерывна по x на X_t; справедливы соотношения

$$\omega_0(\vartheta, x) = \sigma(x), \quad x \in X_\vartheta \tag{2.8}$$

$$\inf_{t^* \in [t^*, \vartheta]} \min_{u \in P} \max_{x \in G(t^*, t_*, x_*, u)} \omega_0(t^*, x) \geqslant \omega_0(t_*, x_*) \tag{2.9}$$

$$\forall (t_*, x_*) \in H, \quad t_* < \vartheta$$

Доказательство. Полунепрерывность сверху функции ω_0 следует непосредственно из ее определения как нижней огибающей множества Ω непрерывных функций. Непрерывность функции ω_0 по x выводится из леммы 2.4. Равенство (2.8) непосредственно следует из (2.1) и (2.7).

Докажем неравенство (2.9). Предположим противное. Пусть существует точка $(t_*, x_*) \in H$, числа $\tau \in (t_*, \vartheta]$, $\alpha > 0$ и управление $u_* \in P$, такие, что

$$\max_{x \in G(\tau, t_*, x_*, u_*)} \omega_0(\tau, x) \leqslant \omega_0(t_*, x_*) - 3\alpha \tag{2.10}$$

По определению функции ω_0 для любой точки $x^* \in G^* = G(\tau, t_*, x_*, u_*)$ можно указать функцию $\omega(\cdot \mid x^*) \in \Omega$ так, чтобы выполнялось неравенство $\omega(\tau, x^* \mid x^*) \leqslant \omega_0(\tau, x^*) + \alpha$. Функции $\omega_0(\tau, x)$ и $\omega(\tau, x \mid x^*)$ непрерывны по x, поэтому для любой точки $x^* \in G^*$ существует число $\beta(x^*) > 0$, такое, что

$$\omega(\tau, x \mid x^*) \leqslant \omega_0(\tau, x) + 2\alpha \quad \text{при } x \in S(x^*, \beta(x^*))$$

Получаем покрытие компакта G^* шарами $S(x^*, \beta(x^*))$. Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие S_i $(i = 1, \ldots, m)$ так, чтобы

$$\omega_i(\tau, x) \leqslant \omega_0(\tau, x) + 2\alpha, \quad x \in S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.11}$$

где ω_i — некоторые функции из Ω.

Пусть ω_* — нижняя огибающая совокупности $\{\omega_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$. Согласно лемме 2.3 $\omega_* \in \Omega$, причем из (2.11) следует неравенство

$$\omega_*(\tau, x) \leqslant \omega_0(\tau, x) + 2\alpha, \quad x \in G^* \tag{2.12}$$

Для указанной функции ω_* введем в рассмотрение функцию ω^* (2.4). Согласно лемме 2.2 $\omega^* \in \Omega$. Непосредственно из определения множества $G^* = G(\tau, t_*, x_*, u_*)$ и функции ω^* (2.4) следует неравенство $\omega^*(t_*, x_*) \leqslant \max\{\omega_*(\tau, x^*) : x^* \in G^*\}$. Учитывая оценки (2.12), (2.10), это неравенство можно продолжить следующим образом:

$$\omega^*(t_*, x_*) \leqslant \max_{x^* \in G^*} \omega_*(\tau, x^*) \leqslant \max_{x^* \in G^*} \omega_0(\tau, x^*) + 2\alpha \leqslant \omega_0(t_*, x_*) - \alpha$$

Итак, получаем, что существует функция $\omega^* \in \Omega$, для которой $\omega^*(t_*, x_*) < \omega_0(t_*, x_*)$. Пришли к противоречию с определением функции ω_0. Таким образом неравенство (2.9) и теорема 2.1 доказаны.

3. Покажем, что

$$\omega_0(t_*, x_*) = c_0(t_*, x_*), \quad (t_*, x_*) \in H \tag{3.1}$$

где $c_0(t_*, x_*)$ — цена дифференциальной игры в классе чистых позиционных стратегий $U \div u(t, x)$ и контрстратегий $V^u \div v(t, x, u)$ для исходной позиции (t_*, x_*). Приведем сначала следующее утверждение.

Лемма 3.1. Для любого числа c и любой функции $\omega \in \Omega$ множество

$$W = \{(t, x) \in H: \omega(t, x) \leqslant c\} \tag{3.2}$$

u_*-стабильное (см. [3], стр. 360).

Для доказательства этой леммы можно рассмотреть множество

$$W_\alpha = \{(t, x) \in H\colon \omega(t, x) \leqslant c + \alpha(t - t_0)\} \quad (\alpha > 0)$$

и, используя (2.2), проверить, что оно u_*-стабильное. Тогда u_*-стабильность множества W (3.2) можно получить как следствие u^*-стабильности множества W_α предельным переходом при $\alpha \to 0$.

Справедлива также следующая

Лемма 3.2. Для любого числа c множество

$$W^{0,c} = \{(t, x) \in H\colon \omega_0(t, x) \leqslant c\} \tag{3.3}$$

v-стабильное (см. [3], стр. 54).

Справедливость этой леммы вытекает непосредственно из (2.9).

Воспользуемся леммами 3.1, 3.2 для доказательства равенства (3.1). Для заданной позиции (t_*, x_*) и некоторого числа $\beta > 0$ определим функцию ω_β так, чтобы выполнялось неравенство $\omega_\beta(t_*, x_*) \leqslant \omega_0(t_*, x_*) + \beta$. Построим позиционную стратегию $U_\beta \div u_\beta(t, x)$, экстремальную к множеству W (3.2), где $\omega = \omega_\beta$, $c = \omega_\beta(t_*, x_*)$. Тогда, согласно результатам [3], для этой стратегии будет справедливо неравенство

$$\max\{\sigma(x)\colon x \in X[\vartheta; t_*, x_*, U_\beta]\} \leqslant \omega_0(t_*, x_*) + \beta \tag{3.4}$$

Здесь и ниже $X[\vartheta; t_*, x_*, U]$ и $X[\vartheta, t_*, x_*, V^u]$ — множества точек $x[\vartheta; t_*, x_*, U]$ и $x[\vartheta; t_*, x_*, V^u]$, которые реализуют в момент ϑ на всевозможных движениях, порожденных стратегий $U \div u(t, x)$ и контрстратегий $V^u \div v(t, x, u)$ соответственно.

С другой стороны, для контрстратегии $V_e^u \div v(t, x, u)$, эктремальной к множеству $W^{0,c}$ (3.3), где $c = \omega_0(t_*, x_*)$, будет справедливо неравенство

$$\min\{\sigma(x) : x \in X[\vartheta; t_*, x_*, V_e^u]\} \geqslant \omega_0(t_*, x_*) \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) при $\beta \to 0$ получаем

$$\inf_U \max\{\sigma(x) : x \in X[\vartheta; t_*, x_*, U]\} = \max_{V^u} \min\{\sigma(x) : x \in X[\vartheta; t_*, x_* V^u]\} \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что величина $\omega_0(t_*, x_*)$ совпадает с ценой $c_0(t_*, x_*)$ дифференциальной игры в классе стратегий $U \div u(t, x)$ и контрастратегий $V^u \div v(t, x, u)$.

Известно, что в рассматриваемой игре u_*-стабильны не только все множества W (3.2), но и множество

$$W_c^\circ = \{(t, x) \in H\colon \omega_0(t, x) = c_0(t, x) \leqslant c\} \tag{3.7}$$

отвечающее нижней огибающей $\omega_0 = c_0$ и любому числу c. Нижняя грань в (3.6) достигается на стратегии $U_e \div u_e(t, x)$, экстремальной множеству W_c° (3.7) при $c = c_0(t_*, x_*)$. Известно также, что функция $c_0 = \omega_0$ непрерывна на H.

Отметим следующее обстоятельство. Как показано выше, из условия $\omega \in \Omega$ следует u_*-стабильность множеств W (3.2).

Однако обратное утверждение неверно, т. е. из u_*-стабильности множества W_c° (3.7) не следует принадлежность функции ω_0 классу Ω. В качестве примера, где нижняя огибающая ω_0 не удовлетворяет условию 3°, можно привести известную игру [1], заданную уравнением

$$x_1^{\cdot} = x_2 + v,\ x_2^{\cdot} = u,\ |u| \leqslant 1,\ |v| \leqslant 1,\ 0 = t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta = 2$$

и функцией $\sigma(x) = |x_1|$. Здесь

$$\lim_{t^* \to t_* + 0} \min_{u \in P} \max_{x \in G(t^*, t_*, x_*, u)} \frac{\omega_0(t^*, x) - \omega_0(t_*, x_*)}{t^* - t_*} = 2 - t_* > 0$$

в точках (t_*, x_*), где $t_* \in [1, 2)$, $x_{*1} + (2 - t)x_{*2} = 0$.

4. Рассмотрим случай, когда $c_0 = \omega_0 \in \Omega$. Построим в этом случае оптимальную в целом позиционную стратегию $U^\circ \div u^\circ(t, x)$, для которой неравенство $\sigma(x[\vartheta]) \leqslant c_0(\tau, x[\tau])$ будет справедливо для любого движения $x[t] = x[t; t_*, x_*, U^\circ]$ и любого момента $\tau \in [t_*, \vartheta]$. Отметим, что стратегия U_e, экстремальная к множеству $W_{u_*}^\circ$ (1.2), обеспечивает выполнение неравенства $\sigma(x[\vartheta]) \leqslant c_0(t_*, x_*)$ для заданной начальной позиции (t_*, x_*), но при этом могут существовать момент $\tau \in [t_*, \vartheta]$ и движение $x[t] = x[t;\ t_*,\ x_*,\ U_e]$, такие, что $\sigma(x[\vartheta]) > c_0(\tau, x(\tau))$.

Известно, что оптимальную в целом стратегию $U^\circ \div u^\circ(t, x)$ можно построить в случае, когда функция c_0 непрерывно дифференцируема по t и по x в точках $(t, x) \in H$, где $c_0(t, x) > \sigma_0 = \min\{\sigma(x) : x \in X_\vartheta\}$ (см. [3], стр. 106).

В качестве примера, где функция $c_0 = \omega_0$ не является непрерывно дифференцируемой, но принадлежит классу Ω обобщенных функций Беллмана, можно привести игру, заданную уравнениями $x_1^{\cdot} = x_3$, $x_2^{\cdot} = x_4$, $x_3^{\cdot} = u_1 - v_1$, $x_4^{\cdot} = u_2 - v_2$, $|u_1| \leqslant \lambda_1$, $|u_2| \leqslant \lambda_2$, $(v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \leqslant \lambda_2$, $\lambda_1 < \lambda_2$ и функцией $\sigma(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Итак, пусть $\omega_0 \in \Omega$. Для положительного параметра α определим функции $\delta_\alpha : H \to R$ и $u_\alpha : H \to P$, которые точке $(t_*, x_*) \in H$ ставят в соответствие число $\delta_\alpha(t_*, x_*) > 0$ и вектор $u_\alpha(t_*, x_*) \in P$, удовлетворяющие неравенству

$$\max_x \omega_0(t_* + \delta_\alpha(t_*, x_*), x) \leqslant \omega_0(t_*, x_*) + \alpha\delta_\alpha(t_*, x_*)$$
$$x \in G(t_* + \delta_*(t_*, x_*), t_*, x_*, u_\alpha(t_*, x_*))$$

Существование таких функций δ_α и u_α следует из (2.2).

Полагаем теперь, что функция u°: $H \to P$ точке $(t_*, x_*) \in H$ ставит в соответствие вектор $u^\circ(t_*, x_*)$, который является пределом некоторой последовательности $u_{\alpha_k}(t_*, x_*)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$ (последовательность чисел α_k зависит, вообще говоря, от точки (t_*, x_*)).

Для определения движений, порожденных стратегией $U^\circ \div u^\circ(t, x)$, потребуется функция δ_ε°: $H \to R$. Эта функция определяется следующим образом: для заданного параметра $\varepsilon > 0$ и точки $(t_*, x_*) \in H$ определим число $\alpha_* > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\| u^\circ(t_*, x_*) - u_{\alpha_*}(t_*, x_*) \| < \varepsilon, \quad \alpha_* \leqslant \varepsilon$$

и полагаем $\delta_\varepsilon^\circ(t_*, x_*) = \delta_{\alpha_*}(t_*, x_*)$.

Движение $x[t; t_*, x_*, U^\circ]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, порожденное стратегией $U^\circ \div u^\circ(t, x)$, определим предельным переходом от последовательности ломаных Эйлера. Однако, в отличие от [8], где разбиения Δ отрезка $[t_*, \vartheta]$ могут выбираться заранее в начальный момент времени, здесь рассматриваются разбиения Δ, которые формируются по ходу игры функцией δ_ε°. Для выбранного параметра $\varepsilon > 0$ и управления $v[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ которое реализуется вторым игроком, аппроксимационное движение (ломаную Эйлера) $x[t] = x[t; t_*, x_*, U^\circ, v[\cdot], \delta_\varepsilon^\circ]$ содержательно можно определить как движение, порожденное управлением $v[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ второго игрока и кусочно-постоянным управлением первого игрока

$$u[t] = u^\circ(\tau', x[\tau']), \quad \tau' \leqslant t \leqslant \tau' + \delta_\varepsilon^\circ(\tau', x[\tau'])$$

Формально аппроксимационное движение $x[t; t_*, x_*, U^\circ, v[\cdot], \delta_\varepsilon^\circ$ определяется в соответствии с [5]. Затем движением $x[t; t_*, x_*, U^\circ]$ называется всякий равномерный на $[t_*, \vartheta]$ предел последовательности аппроксимационных движений $x[t; t_*, x_*, U^\circ, v_k[\cdot], \delta_{\varepsilon_k}^\circ]$, где $\varepsilon_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — некоторая сходящаяся к нулю последовательность чисел.

Можно показать, что при данном определении движений построенная стратегия $U^\circ \div u^\circ(t, x)$ является оптимальной в целом.

В случаях, когда $c_0 = \omega_0 \notin \Omega$, можно построить ε-оптимальную в целом стратегию $U^{(\varepsilon)} \div u^{(\varepsilon)}(t, x)$, для которой неравенство $\sigma(x[\vartheta]) \leqslant \leqslant c_0(t, x[t]) + \varepsilon$ будет справедливо для любого момента $t \in [t_*, \vartheta]$ и всякого движения $x[t] = x[t; t_*, x_*, U^{(\varepsilon)}]$. Построение этой стратегии и порожденных ею движений можно дать в рамках экстремальной конструкции [3].

Поступила 22 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. *Байбазаров М.* Достаточные условия оптимальности в дифференциальных играх. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
4. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. II. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
5. *Pchenitchny B. N.* *E*-strategies in differential games. In: Topics in Differential Games, ed. by A. Blaquiere. New York — London — Amsterdam, North-Holland, 1973.
6. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
7. *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени. Матем. сб., 1976, т. 99, № 3.
8. *Fleming W. H.* A note on differential games of prescribed duration. In: Contibutions to the theory of games, vol. 3. Princenton Univ. Press, 1957.
9. *Varaiya P., Lin Jiguan.* Existence of saddle points in differential games. SIAM J. Control., 1969, vol. 7, No. 1.