

## О НЕКОТОРЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

Строятся новые точные решения уравнений плоскопараллельного изэнтропического течения газа с политропным уравнением состояния, находящегося в поле тяжести. Показано, что при показателе адиабаты, большем двух, построенные течения определяют течения смешанного сверх- и дозвукового типа в бесконечных каналах специальной формы. В случае, когда действие силы тяжести мгновенно снимается, построено точное решение нестационарной задачи о разлете газа в вакуум с неограниченно растущей скоростью.

1. Система уравнений, описывающая изэнтропические установившиеся плоскопараллельные течения невязкого газа с политропным уравнением состояния в поле тяжести, имеет вид [1]

$$(1.1) \quad u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \frac{2}{\gamma-1} c \frac{\partial c}{\partial x_i} + \alpha_i = 0 \quad (i=1, 2)$$

$$u_1 \frac{\partial c}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial c}{\partial x_2} + \frac{\gamma-1}{2} c \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0$$

Здесь  $u_k$  — компоненты вектора скорости,  $c$  — скорость звука,  $\alpha_k$  — постоянные, определяющие действие силы тяжести.

Рассмотрим потенциальный случай, когда система (1.1) сводится к одному уравнению для потенциала скоростей  $\Phi(x_1, x_2)$  и скорость звука находится из интеграла Бернулли

$$(1.2) \quad \Phi_1^2 \Phi_{11} + 2 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_{12} + \Phi_2^2 \Phi_{22} + \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 - (\gamma-1) \times$$

$$\times [K - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - 1/2 (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)] (\Phi_{11} + \Phi_{22}) = 0$$

( $\Phi_i = \partial \Phi / \partial x_i$ ,  $\Phi_{ik} = \partial^2 \Phi / \partial x_i \partial x_k$ ,  $K = \text{const}$ )

$$(1.3) \quad c^2 = (\gamma-1) [K - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - 1/2 (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)]$$

Применяя к (1.2) преобразование Лежандра

$$(1.4) \quad V = \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2 - \Phi$$

получим для новой неизвестной функции  $V(u_1, u_2)$  ( $\Phi_1 = u_1$ ,  $\Phi_2 = u_2$ ) уравнение Монжа — Ампера

$$(1.5) \quad u_1^2 V_{22} - 2 u_1 u_2 V_{12} + u_2^2 V_{11} + (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) (V_{11} V_{22} - V_{12}^2) -$$

$$- (\gamma-1) [K - \alpha_1 V_1 - \alpha_2 V_2 - 1/2 (u_1^2 + u_2^2)] (V_{11} + V_{22}) = 0$$

Решение в координатах  $x_1, x_2$  восстанавливается по формулам

$$1.6) \quad V_1 = x_1, \quad V_2 = x_2 \quad (V_k = \partial V / \partial u_k, \quad V_{ik} = \partial^2 V / \partial u_i \partial u_k)$$

Будем искать для уравнения (1.5) класс точных решений в виде полинома третьей степени от  $u_1, u_2$

$$(1.7) \quad V(u_1, u_2) = \frac{Ku_1}{2\alpha_1} + \frac{Ku_2}{2\alpha_2} + \sum_{0 \leq i+k \leq 3} a_{ik} u_1^i u_2^k, \quad a_{ik} = \text{const}$$

Постоянная  $a_{00}$  в (1.7) несущественна, а для остальных  $a_{ik}$  получим из (1.5) нелинейную систему десяти уравнений с девятью неизвестными  $a_{ik}$  ( $0 < i + k \leq 3$ ) и параметрами  $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ . Не умаляя общности, положим  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  (сила тяжести действует вдоль биссектрисы первого координатного угла). Система четырех уравнений для определения старших коэффициентов  $a_{30}, a_{12}, a_{21}, a_{03}$  является независимой (не содержит остальных  $a_{ik}$ ). Полагая

$$(1.8) \quad 6\alpha a_{30} = y_1, \quad 6\alpha a_{03} = y_2, \quad 2\alpha a_{12} = z_1, \quad 2\alpha a_{21} = z_2$$

эту систему можно записать в виде (символ  $1 \leftrightarrow 2$  означает, что невыписанные уравнения получаются круговой перестановкой индексов 1 и 2)

$$(1.9) \quad \begin{aligned} & \frac{\gamma+1}{2} y_1 y_2 + \gamma y_1 z_1 + (\gamma-1) z_1^2 + \frac{3}{2} (\gamma-1) y_1 z_2 + \frac{\gamma-3}{2} z_2^2 + \\ & + \frac{\gamma-1}{2} y_2 z_2 + (\gamma-2) z_1 z_2 + \frac{\gamma+1}{2} y_2 + \frac{\gamma-5}{2} z_2 = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2) \\ & \frac{\gamma-1}{2} y_1^2 + \frac{\gamma+1}{2} y_1 z_1 + \frac{\gamma-1}{2} y_1 z_2 - z_2^2 + \frac{\gamma-1}{2} z_1 z_2 + \\ & + \frac{\gamma-1}{2} y_1 + \frac{\gamma+1}{2} z_1 = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned}$$

Таким образом, задача о нахождении старших коэффициентов представления (1.7) сведена к задаче отыскания всех точек пересечения четырех поверхностей второго порядка, задаваемых системой (1.9), в четырехмерном пространстве  $y_1, y_2, z_1, z_2$ .

Дадим полный анализ решений системы (1.9).

Прежде всего осуществим линейное преобразование переменных в (1.9) (поворот осей координат), введя новые переменные  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  по формулам

$$(1.10) \quad \xi_1 = y_1 - y_2, \quad \xi_2 = z_1 - z_2, \quad \eta_1 = y_1 + y_2, \quad \eta_2 = z_1 + z_2$$

В новых переменных система (1.9) примет вид

$$(1.11) \quad \begin{aligned} F_1^\pm &= \frac{\gamma-1}{2} \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 - \frac{\gamma+1}{2} \xi_2^2 \pm (\gamma-1) \xi_1 \eta_1 + \frac{\gamma-1}{2} \eta_1^2 \pm \\ & \pm \gamma \xi_1 \eta_2 + \frac{\gamma-3}{2} \eta_2^2 \pm \xi_2 \eta_1 \pm 2\xi_2 \eta_2 + \gamma \eta_1 \eta_2 \pm (\gamma-1) \xi_1 \pm \\ & \pm (\gamma+1) \xi_2 + (\gamma-1) \eta_1 + (\gamma+1) \eta_2 = 0 \\ F_2^\pm &= -\frac{\gamma+1}{2} \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \frac{\gamma-1}{2} \xi_2^2 + \frac{\gamma+1}{2} \eta_1^2 \pm (2\gamma-1) \xi_1 \eta_2 + \\ & + \frac{5\gamma-9}{2} \eta_2^2 \pm (2-\gamma) \xi_2 \eta_1 \pm (\gamma+1) \xi_2 \eta_2 + (3\gamma-2) \eta_1 \eta_2 \mp \\ & \mp (\gamma+1) \xi_1 \mp (\gamma-5) \xi_2 + (\gamma+1) \eta_1 + (\gamma-5) \eta_2 = 0 \end{aligned}$$

Составляя линейные комбинации  $4(F_1^+ - F_2^-) = 0$  и  $4(F_1^- - F_2^+) = 0$ , получим

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \xi_1 [(\gamma - 1)\eta_1 + \gamma\eta_2 + \gamma - 1] + \xi_2 (\eta_1 + 2\eta_2 + \gamma + 1) &= 0 \\ \xi_1 [(2\gamma - 1)\eta_2 - \gamma - 1] + \xi_2 [(2 - \gamma)\eta_1 + (\gamma + 1)\eta_2 - \\ - \gamma + 5] &= 0 \end{aligned}$$

Итак, далее рассмотрим два случая:

1°.  $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ , 2°.  $(\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0)$ .

В случае 1° для неизвестных  $\eta_1, \eta_2$  из уравнений  $F_1^+ = 0, F_1^- = 0$  получим систему

$$(1.13) \quad \begin{aligned} F_1^{+'} &= \frac{\gamma-1}{2}\eta_1^2 + \frac{\gamma-3}{2}\eta_2^2 + \gamma\eta_1\eta_2 + (\gamma-1)\eta_1 + (\gamma+1)\eta_2 = 0 \\ F_1^{-'} &= \frac{\gamma+1}{2}\eta_1^2 + \frac{5\gamma-9}{2}\eta_2^2 + (3\gamma-2)\eta_1\eta_2 + (\gamma+1)\eta_1 + \\ &+ (\gamma-5)\eta_2 = 0 \end{aligned}$$

Линейная комбинация  $(\gamma+1)F_1^{+'} - (\gamma-1)F_1^{-'} = 0$  приводит к соотношению

$$(1.14) \quad \eta_2 [(\gamma^2 - 3\gamma + 3)\eta_2 + (\gamma^2 - 3\gamma + 1)\eta_1 - 2(2\gamma - 1)] = 0$$

Приравняв нулю второй сомножитель в (1.14), из уравнений (1.13) получим для нахождения  $\eta_2$  квадратное уравнение. Решая его, в случае 1° будем иметь следующие возможности:

$$(1.15) \quad \eta_1 = -2, \eta_2 = 0$$

$$(1.16) \quad \eta_1 = \frac{(2\gamma-1)(2-\gamma)}{(\gamma-1)^2}, \quad \eta_2 = \frac{\gamma(2\gamma-1)}{(\gamma-1)^2}$$

$$(1.17) \quad \eta_1 = -\frac{3+\gamma}{3-\gamma}, \quad \eta_2 = \frac{\gamma-1}{3-\gamma} \quad (\gamma \neq 3)$$

Для случая 2° из (1.12) получим

$$(1.18) \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{\eta_1 + 2\eta_2 + \gamma + 1}{(\gamma-1)\eta_1 + \gamma\eta_2 + \gamma - 1}$$

При этом  $\eta_1$  и  $\eta_2$  должны быть связаны соотношением

$$(1.19) \quad \begin{aligned} (\gamma-1)(\gamma-2)(\eta_2^2 - \eta_1^2) + 2(-\gamma^2 + 5\gamma - 3)\eta_1 + \\ + 2(-\gamma^2 + 3\gamma - 1)\eta_2 + 4(2\gamma - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Случай, когда в (1.18) и числитель и знаменатель обращаются в нуль при

$$(1.20) \quad \eta_1 = \frac{\gamma^2 - \gamma + 2}{\gamma - 2}, \quad \eta_2 = \frac{\gamma - \gamma^2}{\gamma - 2} \quad (\gamma \neq 2)$$

приводит после анализа совместности уравнений (1.11) к значениям  $\gamma = 1$  или  $\gamma = 1/2$ , и его можно исключить.

Если в (1.19)  $\gamma = 2$ , то из уравнений (1.11) для  $\eta_1, \eta_2$  получается лишь возможность (1.15), но при этом  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ , где  $\xi$  — произвольное число. Таким образом, далее будем рассматривать (1.19) с  $\gamma \neq 2$ . Второе уравнение, связывающее  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , получим из (1.11), воспользовавшись тем, что суммы всех членов в (1.11), содержащих  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в первой степени, в силу (1.12) равны нулю. Тогда из уравнений  $F_1^+ = 0$  и  $F_1^- = 0$  (1.11) следует

соотношение ( $F_1^{+'}$  и  $F_1^{-'}$  берутся из (1.13))

$$(1.21) \quad \frac{(\gamma - 1)\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - (\gamma + 1)\xi_2^2}{-(\gamma + 1)\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + (\gamma - 1)\xi_2^2} = \frac{F_1^{+'}}{F_1^{-'}}$$

которое с помощью (1.18) приведем к виду

$$(1.22) \quad \gamma(\gamma - 1)^2\eta_1^3 + (\gamma - 1)(5\gamma^2 - 5\gamma - 2)\eta_1^2\eta_2 + (\gamma - 1)^2 \times \\ \times (7\gamma - 4)\eta_1\eta_2^2 + (\gamma - 1)(3\gamma^2 - 7\gamma + 6)\eta_2^3 + 2\gamma(\gamma - 1) \times \\ \times (\gamma - 2)\eta_1^2 + 4(\gamma^3 - 4\gamma^2 + \gamma + 1)\eta_1\eta_2 + 2(\gamma^3 - 5\gamma^2 + \\ + 4\gamma - 6)\eta_2^2 - 4\gamma(\gamma - 1)\eta_1 - 4\gamma(\gamma + 1)\eta_2 = 0$$

Полагая далее  $\eta_1 + \eta_2 = q$  и представляя с помощью (1.19)  $\eta_1$  и  $\eta_2$  в виде

$$(1.23) \quad \eta_{1,2} = \{(\gamma - 1)(\gamma - 2)q^2 \pm 2[(\gamma \pm 1)(2 - \gamma) + 2\gamma - 1]q \pm \\ \pm 4(2\gamma - 1)\} \{2(\gamma - 2)[(\gamma - 1)q - 2]\}^{-1}$$

из (1.22) получим для определения  $q$  уравнение пятой степени. Вид уравнения громоздкий и здесь не приводится. Его корни имеют вид

$$(1.24) \quad q_1 = -2, \quad q_2 = \frac{2}{\gamma - 2}, \quad q_3 = q_4 = q_5 = \frac{2}{\gamma - 1}$$

Случай  $q = q_{3,4,5}$ , когда в (1.23) знаменатели обращаются в нуль, интереса не представляет, так как из (1.19) сразу следует, что  $\gamma = 2$ . Случай  $q = q_1 = -2$  приводит к соотношениям ( $\xi$  — произвольное число)

$$(1.25) \quad \eta_1 = -2, \quad \eta_2 = 0, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi$$

Наконец, случай  $q = q_2$  приводит к уже рассмотренной возможности (1.20).

Окончательно для старших коэффициентов (1.8) следует рассмотреть три возможности (1.25), (1.16), (1.17).

Перейдем к анализу системы для коэффициентов при квадратичных членах в (1.7). Из (1.6) следует, что переносом начала координат всегда можно добиться, чтобы  $a_{10} = a_{01} = 0$ . Полагая

$$(1.26) \quad 2\alpha a_{20} = \mu, \quad 2\alpha a_{02} = \nu, \quad \alpha a_{11} = \lambda$$

систему уравнений, которым должны удовлетворять  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\lambda$ , можно записать в виде

$$(1.27) \quad \mu\nu - \lambda^2 + (\gamma - 1)(\mu + \lambda)(\mu + \nu) = 0 \quad (\mu \leftrightarrow \nu), \quad y_2\nu + z_1\mu - \\ - 2z_2\lambda + 2\nu + (\gamma - 1)[\frac{1}{2}(y_2 + z_2 + 1)(\mu + \nu) + \\ + (y_2 + z_2)(\mu + \lambda)] = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2, \mu \leftrightarrow \nu), \quad y_1\mu + z_2\nu - 2z_2\lambda + y_2\nu - \\ - 2z_2\lambda - 2\lambda + (\gamma - 1)[(z_1 + z_2)(\mu + \nu) + (y_1 + z_2) + \\ + (\mu + \lambda) + (y_2 + z_1)(\nu + \lambda)] = 0$$

Система (1.27) имеет решения  $\mu = \nu = \lambda = 0$ , и несложный ее анализ показывает, что других решений при  $\gamma > 1$  нет для всех  $y_k, z_k$ , определяемых из (1.10) по  $\xi_k, \eta_k$ , соответствующих (1.25), (1.16), (1.17). Таким образом, в представлении (1.7) остаются только кубичные члены, и коэффициенты при них определяются из (1.25) либо из (1.16) или (1.17).

2. Дадим физическую интерпретацию трем построенным вариантам решений уравнения (1.5). Для того, чтобы каждое из этих решений имело реальный смысл, необходимо установить:

1) положительность правой части соотношения (1.3), определяющей квадрат скорости звука;

2) возможность обращения формул (1.6), т. е. возможность перехода от плоскости годографа, в которой построены решения, в физическую плоскость  $x_1, x_2$ ;

3) отсутствие предельных линий в поле течения.

Рассмотрим с этих позиций последовательно все три решения и построим соответствующие картины течений, найдя для них линии тока и линии постоянства плотности газа.

Для случая (1.25)

$$(2.1) \quad a_{30} = \frac{\xi - 2}{12\alpha}, \quad a_{03} = -\frac{\xi + 2}{12\alpha}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\xi}{4\alpha}$$

Вычисляя по (1.3) скорость звука, с помощью (1.6) получим, что она тождественно равна нулю, так что эта возможность интереса не представляет.

Для случая (1.16)

$$(2.2) \quad a_{30} = a_{03} = \frac{(2\gamma - 1)(2 - \gamma)}{12\alpha(\gamma - 1)^2}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\gamma(2\gamma - 1)}{4\alpha(\gamma - 1)^2}$$

Из (1.3) получим

$$(2.3) \quad c^2 = -\frac{\gamma}{2(\gamma - 1)} [\gamma(u_1^2 + u_2^2) + 2(2\gamma - 1)u_1u_2]$$

Таким образом, линиями постоянства скорости звука в плоскости годографа являются гиперболы с асимптотами

$$(2.4) \quad u_2 = \eta_{\pm}u_1, \quad \eta_{\pm} = \gamma^{-1}(1 - 2\gamma \pm \sqrt{(\gamma - 1)(3\gamma - 1)})$$

и, так как дискриминант трехчлена в (2.3) положителен при всех  $\gamma$ , правая часть в (2.3) неотрицательна в секторах, находящихся во втором и четвертом квадрантах плоскости  $u_1, u_2$  и образованных асимптотами (2.4).

Вычисляя по (1.3) якобиан  $J$ , получим

$$J = \frac{D(x_1, x_2)}{D(u_1, u_2)} = -\frac{(2\gamma - 1)^2}{2(\gamma - 1)^2\alpha^2} (\gamma u_1^2 + 2u_1u_2 + \gamma u_2^2) \leq 0$$

Следовательно, переход в плоскость  $x_1, x_2$  всегда возможен, а предельных линий в течении нет ( $J = 0$  только в точке  $(u_1, u_2) = (0, 0)$ ).

Переход в физическую плоскость  $x_1, x_2$  осуществляется по формулам

$$(2.5) \quad x_i = \frac{K}{2\alpha} + \frac{2\gamma - 1}{2\alpha(\gamma - 1)^2} f_i(u_1, u_2) \quad (i = 1, 2)$$

$$f_1(u_1, u_2) = f_2(u_2, u_1) = \frac{2 - \gamma}{2} u_1^2 + \gamma u_1u_2 + \frac{\gamma}{2} u_2^2$$

Постоянная  $K$  в (2.5) несущественна, далее полагаем  $K = 0$ .

Интегрируя уравнения для линий тока

$$dx_1/u_1 = dx_2/u_2$$

получим для них следующее параметрическое представление:

$$(2.6) \quad x_i = C_\lambda |1 - u|^\alpha \left| u^2 + \frac{2(2\gamma - 1)}{\gamma} u + 1 \right|^\beta f_i(1, u) \quad (i = 1, 2)$$

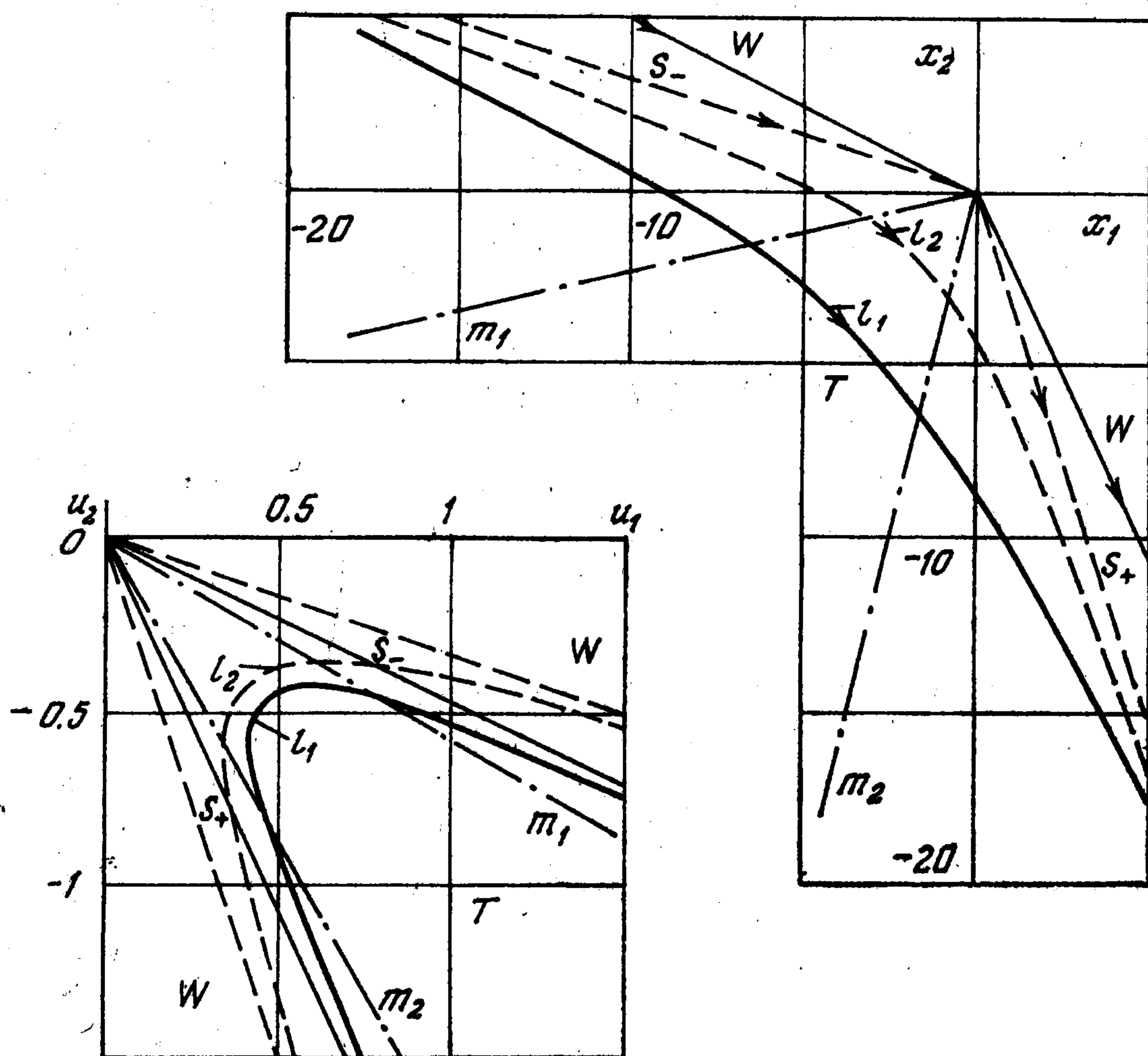
$$\alpha = -\frac{2(\gamma - 1)}{3\gamma - 1}, \quad \beta = -\frac{2\gamma}{3\gamma - 1}$$

где параметр  $u \in (\eta_-, \eta_+)$ , а  $C_\lambda = \text{const}$  для фиксированной линии тока. Вдоль прямых

$$(2.7) \quad x_2 = \eta_\pm x_1$$

скорость звука обращается в нуль и линии тока при  $u \rightarrow \eta_\pm$  асимптотически приближаются к ним.

На фиг. 1 изображены в плоскости годографа и плоскости  $x_1, x_2$  для  $\gamma = 1,4$  (сплошными линиями) и  $\gamma = 3$  (штриховыми линиями) линии тока



Фиг. 1

$l_1, l_2$  и асимптоты  $S_\pm$ . Область течения  $T$  целиком захватывает третий квадрант (с удалением от начала координат плотность неограниченно растет вдоль биссектрисы квадранта) и ограничена отрезками асимптот  $S_\pm$ , отделяющими поле течения от зоны вакуума  $W$ . При  $\gamma < 2$  течение в  $T$  везде сверхзвуковое, а при  $\gamma \geq 2$  в течении появляются две звуковые линии  $m_1$  и  $m_2$  (сливающиеся при  $\gamma = 2$  на биссектрисе  $x_1 = x_2$ ), так что поднимающийся из бесконечности против силы тяжести сверхзвуковой поток замедляется, становится дозвуковым, пройдя линию  $m_1$ , а затем, пройдя  $m_2$ , снова ускоряется и становится сверхзвуковым.

Для случая (1.17) будем иметь

$$(2.8) \quad a_{30} = a_{03} = -\frac{3+\gamma}{12\alpha(3-\gamma)}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\gamma-1}{4\alpha(3-\gamma)}$$

$$c^2 = \frac{(\gamma-1)^2}{2(3-\gamma)}(u_1 - u_2)^2$$

$$J = -\frac{\gamma^2-1}{2(3-\gamma)\alpha^2} \left( u_1^2 - \frac{4}{\gamma-1} u_1 u_2 + u_2^2 \right)$$

Итак, для  $\gamma$  следует рассматривать лишь диапазон  $1 < \gamma < 3$ . Формулы для перехода в плоскость  $x_1, x_2$  имеют вид

$$(2.9) \quad x_i = \frac{g_i(u_1, u_2)}{2\alpha(3-\gamma)} \quad (i=1, 2)$$

$$g_1(u_1, u_2) = g_2(u_2, u_1) = -\frac{3+\gamma}{2} u_1^2 + (\gamma-1) u_1 u_2 + \frac{\gamma-1}{2} u_2^2$$

Линиями постоянства скорости звука  $c = \delta$  в плоскости годографа являются прямые, а в плоскости  $x_1, x_2$  — параболы

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{\delta^2} \frac{(3-\gamma)^2}{(\gamma+1)^2} (x_1 - x_2)^2 - \frac{3-\gamma}{\gamma+1} \delta^2$$

Из последнего соотношения (2.9) следует, что вдоль прямых

$$(2.10) \quad u_2 = p_{\pm} u_1, \quad p_{\pm} = (\gamma-1)^{-1} (2 \pm \sqrt{(3-\gamma)(\gamma+1)}) > 0$$

якобиан  $J$  обращается в нуль. Уравнения линий тока имеют вид

$$(2.11) \quad x_i = D_{\lambda} |1-u|^{\omega_{\pm}} \left| u^2 + \frac{4\gamma}{\gamma-1} u + 1 \right|^{\omega_{\mp}} g_i(1, u) \quad (i=1, 2)$$

$$\omega_{\pm} = -\frac{\gamma \pm 1}{3\gamma - 1}, \quad u \in (u_{-}, u_{+}), \quad D_{\lambda} = \text{const}$$

$$u_{\pm} = (\gamma-1)^{-1} (-2\gamma \pm \sqrt{(3\gamma-1)(\gamma+1)}) < 0$$

Имеются также две прямолинейные линии тока

$$(2.12) \quad x_2 = u_{\pm} x_1$$

к которым асимптотически приближаются при  $u \rightarrow u_{\pm}$  все линии тока (2.11). Скорость звука при этом в отличие от случая (1.16) вдоль линий (2.12) неограниченно возрастает с удалением от начала координат.

Для того чтобы построить течение в целом без предельных линий, следует в качестве области течения в плоскости годографа рассмотреть сектора во втором или четвертом квадрантах, ограниченные прямыми

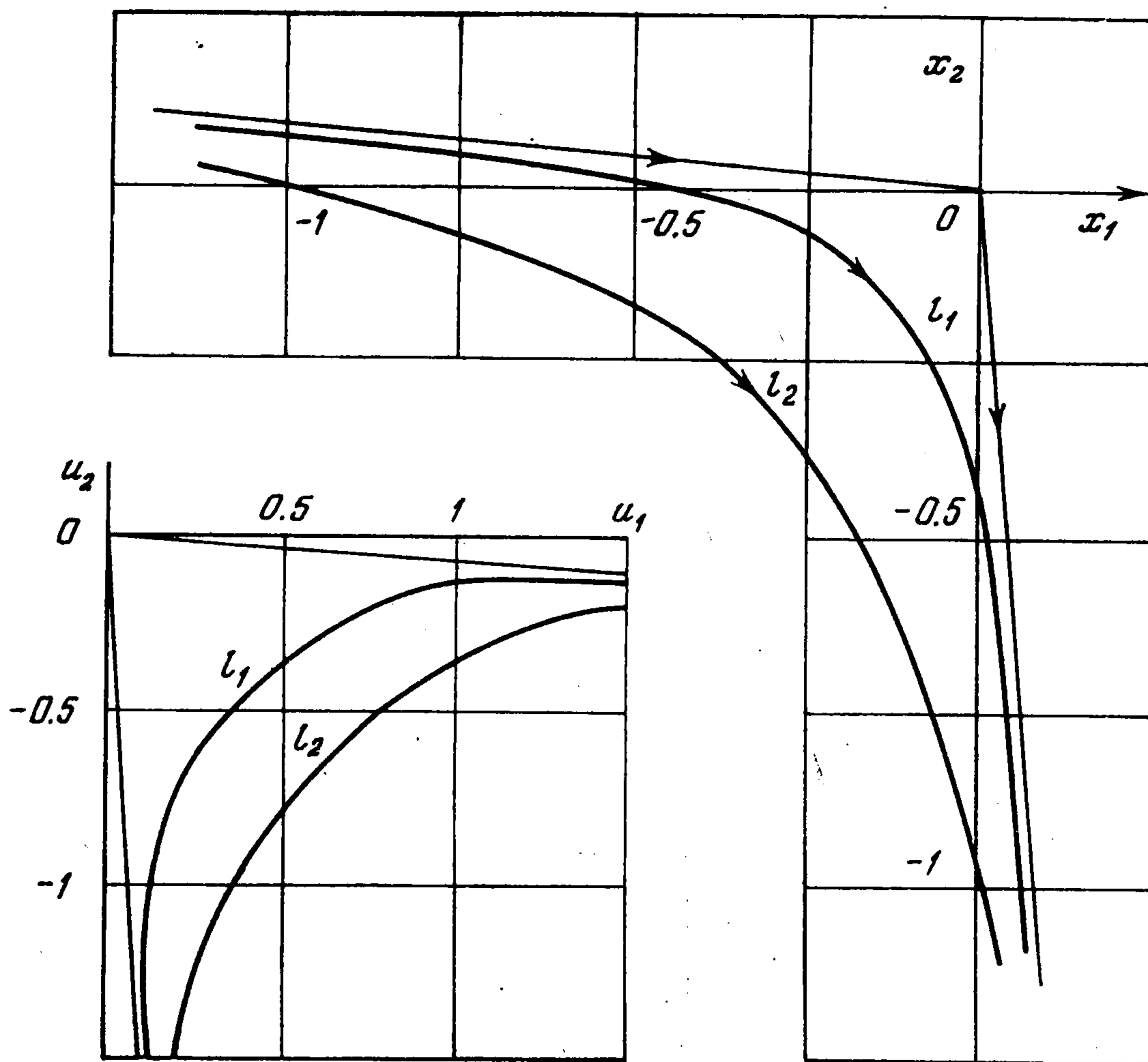
$$(2.13) \quad u_2 = u_{\pm} u_1$$

Внутри этих секторов в силу (2.10) якобиан  $J$  в нуль не обращается, и переход в плоскость  $x_1, x_2$  с помощью (2.9) осуществляется однозначно. Биссектрисе секторов ( $u_1 + u_2 = 0$ ) соответствует в плоскости  $x_1, x_2$  прямая  $x_1 = x_2$ . С удалением вдоль нее от начала координат при  $x_1 = x_2 < 0$  скорость звука неограниченно растет.

На фиг. 2 для  $\gamma = 1,4$  в плоскости годографа и плоскости  $x_1, x_2$  построены две линии тока  $l_1, l_2$ , образующие канал, по которому движется верхзвучовой поток газа, и асимптоты (2.12), (2.13). Как и в случае (1.16), при  $2 \leq \gamma < 3$  в течении появляется дозвуковая зона, содержащая

биссектрису  $x_1 = x_2$  и ограниченная двумя звуковыми линиями (при  $\gamma = 2$  они сливаются в линию  $x_1 = x_2$ ).

*Замечание.* Если рассмотреть в качестве определения области течения в плоскости годографа сектора, ограниченные прямыми (2.3) и включающие в себя первый или третий квадранты, то течение в целом без предельных линий построить не удастся.



Фиг. 2

3. Течения газа, задаваемые формулами (2.3), (2.5) и изображенные для частных случаев на фиг. 1, определены во всей плоскости  $|x_k| < \infty$ , которая содержит область вакуума  $W$  и область течения  $T$ . Построим решение следующей задачи. Пусть стационарное течение в поле тяжести (2.3), (2.5) задает начальные данные задачи Коши в плоскости  $|x_k| < \infty$  для нестационарных уравнений газовой динамики с независимыми переменными  $x_1, x_2, t$  при условии отсутствия массовых сил. Решение такой задачи Коши будет соответствовать решению задачи о нестационарном разлете в вакуум газа из области  $T$ , когда в момент времени  $t = 0$  поле тяжести мгновенно снимается.

Положим

$$(3.1) \quad \xi_k = x_k - \frac{\alpha}{2} t^2, \quad V(x_1, x_2, t) = u(\xi_1, \xi_2) + \alpha t$$

где  $\alpha = (\alpha, \alpha)$ ,  $u = (u_1, u_2)$  и  $u(\xi_1, \xi_2)$  вычисляется по формулам (2.5), в которых вместо  $x_k$  подставлено  $\xi_k$ . Скорость звука будем вычислять по формуле

$$(3.2) \quad c^2(\xi_1, \xi_2) = (\gamma - 1) [K - \alpha \xi_1 - \alpha \xi_2 - \frac{1}{2} (u_1^2(\xi_1, \xi_2) + u_2^2(\xi_1, \xi_2))]$$

Тогда формулы (3.1), (3.2) дадут решение поставленной задачи Коши, определенное при всех  $t \in (0, \infty)$  и  $|x_k| < \infty$ . Нестационарные уравнения газовой динамики в отсутствие массовых сил будут удовлетворены в силу того, что вновь введенная система координат  $\xi_1, \xi_2$  движется равноускоренно с ускорением  $\alpha$  вдоль биссектрисы первого координатного угла. Так как  $\xi_k = x_k$ ,  $V = u(x_1, x_2)$  и  $c(\xi_1, \xi_2) = c(x_1, x_2)$  при  $t = 0$ , то поставленные начальные данные Коши также удовлетворены. Построенное решение соответствует течению разрежения для всех  $t$ . Фронт истечения в вакуум из области  $T$  будет образован двумя плоскостями

$$x_2 = \eta_{\pm} x_1 + \frac{\alpha}{2\gamma} \sqrt{3\gamma - 1} (\sqrt{3\gamma - 1} \mp \sqrt{\gamma - 1}) t^2$$

пересекающимися при  $t \geq 0$  на биссектрисе первого квадранта. Скорость истечения в вакуум будет неограниченно расти с ростом  $t$ .

Автор выражает признательность О. Б. Хайруллиной за помощь в проверке выкладок и проведение расчетов.

Поступила 31 V 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.