Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 532.516

# ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ОБРАЗУЮЩЕЙ ТОНКУЮ ОБОЛОЧКУ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАНЕТЫ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

**М. В. Заволженский, А. Х. Терсков**

(Ростов-на-Дону)

С учетом переносных сил инерции и сил инерции Кориолиса решается система уравнений Навье — Стокса, описывающая движение тяжелой вязкой несжимаемой жидкости в оболочке вращающейся сферы, когда ее центр движется по окружности. Полученное решение справедливо в предположении, что радиус сферы значительно превосходит среднюю толщину жидкой оболочки и что, либо ось собственного вращения сферы незначительно отклонена от нормали к плоскости орбиты, либо угловая скорость $\Omega$ собственного вращения сферы значительно больше угловой скорости $\omega$ вращения центра сферы по орбите. Установлено существование таких широт на сфере, с которых возможен отрыв жидкости со свободной поверхности. Найдено соотношение между $\Omega$ и $\omega$, при котором в жидкой оболочке возможны интенсивные меридианные течения от экватора к полюсам. Проанализирован частный случай $\omega = 0$ течения жидкости в оболочке под действием собственного вращения сферы.

1. Пусть сфера радиуса $a$ вращается вокруг одного из своих диаметров с постоянной угловой скоростью $\Omega$, а ее центр описывает окружность радиуса $R$ так, что направленный радиус $\mathbf{R}$ из центра этой окружности $O_1$ в центр сферы $O$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$. Допустим, что угол между $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ при движении сферы не меняется и равен $\psi$. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат, начало которой совпадает с центром сферы $O$, ось $Ox$ направлена по линии пересечения плоскости экватора с плоскостью орбиты, $Oz$ — по вектору $\boldsymbol{\Omega}$, а $Oy$ лежит в экваториальной плоскости (фигура, $a$). Ось $Ox$ в процессе перемещения сферы по орбите не меняет своего направления, т. е. движется поступательно. Примем за начальное положение $\mathbf{R}_0$ вектора $\mathbf{R}$ то, которое параллельно $Ox$ и направлено в противоположную сторону. Тогда угол $\chi$, образованный осью $Ox$ и вектором $(-\mathbf{R})$, равен углу поворота вектора $\mathbf{R}$ от начального положения $\mathbf{R}_0$ (фигура, $б$). Следовательно

$$\chi = \omega t',\ \omega_x = 0,\ \omega_y = -\omega \sin\psi,\ \omega_z = \omega\cos\psi \tag{1.1}$$
$$R_x = -R\cos\chi,\ R_y = -R\sin\chi\cos\psi,\ R_z = -R\sin\chi\sin\psi$$

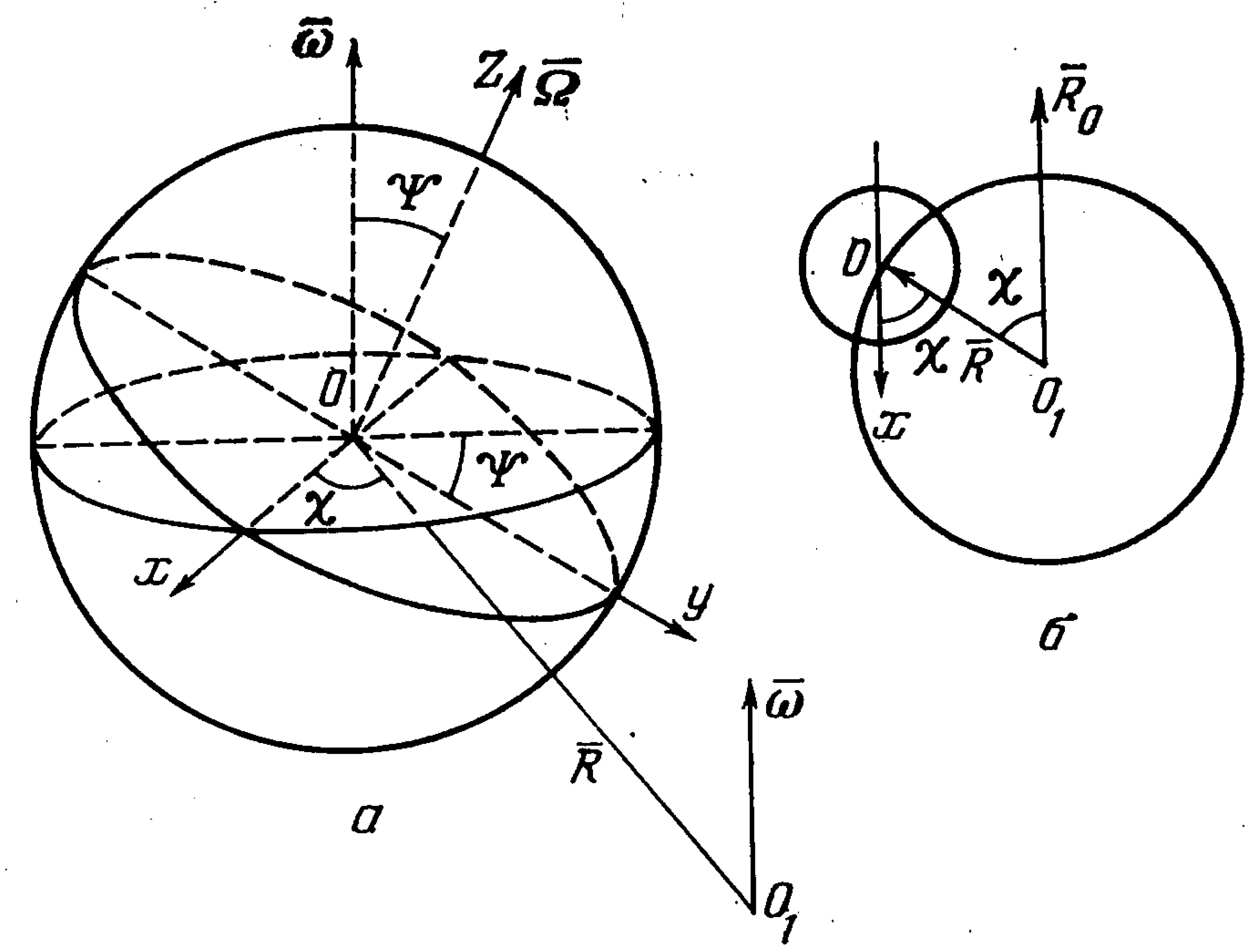
Обозначим через $g$ ускорение силы тяжести гравитационного поля, создаваемого рассматриваемой сферой, и предположим, что сфера покрыта оболочкой из тяжелой вязкой несжимаемой жидкости. Пренебрегая действием приливных сил, будем определять поле скоростей $\mathbf{v}$ и гидродинамическое давление $p'$ в жидкости в ее относительном движении около сферы. Переносным движением служит вращение вокруг центра $O_1$ с угловой скоростью $\omega$. Поэтому ускорение Кориолиса равно $2(\omega\times \mathbf{v})$, а переносное ускорение имеет вид

$$\omega\times[\omega\times(\mathbf{R}+\mathbf{r})]=\nabla\left[\frac{(\omega\cdot\mathbf{r})^2}{2}-\frac{\omega^2r^2}{2}-\omega^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})\right]$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из центра сферы в жидкую точку. Значит, уравнения Навье — Стокса относительного движения жидкости

(1.2) $$\partial\mathbf{v}/\partial t'+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}+\nabla[p'/\rho+gr+(\omega\cdot\mathbf{r})^2/2-\omega^2r^2/2-\omega^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R})]+ \\ +2(\omega\times\mathbf{v})=\nu\nabla^2\mathbf{v},\quad \nabla\mathbf{v}=0$$

Эти уравнения должны решаться при условиях прилипания жидкости




к поверхности сферы и отсутствия нормальных и касательных напряжений на неизвестной свободной поверхности. Поскольку переносное ускорение — внешняя сила, входящая в (1.2),— имеет по времени период $2\pi/\omega$, общее решение рассматриваемой задачи при произвольных $\omega$ должно иметь тот же период по $t'$. Исключения составляют собственные значения вектора $\omega$, при которых возможно ветвление решений однородной краевой задачи (1.2). Эти значения $\omega$ рассматривать не будем, ограничиваясь чисто периодическими решениями.

Задачи, подобные рассматриваемой, встречаются в океанологии [1], метеорологии [2] и теории планет [3].

Введем сферические координаты $r$, $\theta$, $\varphi$ с полюсом в центре сферы $O$. Широту $\theta$ отсчитываем от оси собственного вращения $\Omega$, долготу $\varphi$ — от полуплоскости $xOz$. В этой системе условия прилипания и отсутствия напряжений на свободной поверхности $r=\zeta'(\theta,\varphi,t')$ имеют вид

(1.3) $$v_r=v_\theta=0,\quad v_\varphi=\Omega a\sin\theta \quad \text{при } r=a$$

$$p'=2\rho\nu\frac{\partial v_r}{\partial r},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}=\frac{v_\theta}{r}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}=\frac{v_\varphi}{r}\quad \text{при } r=\zeta'$$

Функция $\zeta'(\theta, \varphi, t')$, определяющая свободную поверхность, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'} = v_r - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \zeta'}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial \zeta'}{\partial \varphi}\bigg|_{r=\zeta'} \tag{1.4}$$

Введем характерную длину $L = \delta$, равную толщине жидкой оболочки неподвижной сферы, и характерную скорость $V = \nu\delta^{-1}$. При этом получим такие основные безразмерные характеристики течения: число Рейнольдса, число Фруда и число Россби

$$VL\nu^{-1} = 1, \quad V^2 (gL)^{-1} = \nu^2 g^{-1} \delta^{-3}, \quad V(2\Omega L)^{-1} = \nu\delta^{-2}(2\Omega)^{-1}$$

Положим еще

$$v_\varphi = \Omega r \sin\theta + w_\varphi \tag{1.5}$$

и, учитывая (1.1), распишем (1.2) в сферических координатах. Затем подставим выражение (1.5) в (1.3) и (1.4) и в полученных уравнениях и предельных условиях перейдем к безразмерным переменным

$$\varepsilon = \frac{\delta}{a}, \quad r = a(1 + \varepsilon x), \quad t' = \frac{\delta^2 t}{\nu}, \quad \lambda = \frac{\Omega\delta^2}{\nu}, \quad \zeta' = a(1 + \varepsilon\zeta) \tag{1.6}$$

$$v_r = \frac{\varepsilon\nu}{\delta} u, \quad v_\theta = \frac{\nu}{\delta} v, \quad w_\varphi = \frac{\nu}{\delta} w, \quad p' = \varepsilon \frac{\rho\nu^2 a}{\delta^3} p, \quad \alpha = \frac{\omega\delta^2}{\nu}$$

Тогда для определения $u, v, w, p$ и $\zeta$ получим такие уравнения и предельные условия:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - \lambda \frac{\partial v}{\partial \varphi} + 2\lambda w \left(\cos\theta + \frac{\omega}{\Omega}\varkappa\right) - \frac{\partial q}{\partial \theta} + \\ + 2\frac{\Omega\omega a\delta^3}{\nu^2}\varkappa \sin\theta = \varepsilon f_1(u, v, w, p, \varepsilon), \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \varepsilon f_3(u, v, w, \varepsilon) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} - \lambda \frac{\partial w}{\partial \varphi} - 2\lambda v \left(\cos\theta + \frac{\omega}{\Omega}\varkappa\right) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial \varphi} = \varepsilon f_2(u, v, w, p, \varepsilon) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \operatorname{ctg}\theta = \varepsilon f_4(u, v, w, \varepsilon) \\ u = v = w = 0 \quad \text{при } x = 0 \\ p = \varepsilon f_5(u), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon f_6(u, v, \varepsilon), \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \varepsilon f_7(u, w, \varepsilon) \quad \text{при } x = \zeta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = \varepsilon f_8(u, v, w, \zeta, \varepsilon)\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь

$$\begin{gathered}q = \varepsilon p + \frac{g\delta^3}{\nu^2}(1 + \varepsilon x) - \frac{n}{2}(1 + \varepsilon x)^2 \sin^2\theta + m(1 + \varepsilon x) \times \\ \times \Big[\sin\theta\cos\varphi\cos\alpha t + (\cos\psi\sin\theta\sin\varphi + \sin\psi\cos\theta)\sin\alpha t + \\ + \frac{a}{2R}(1 + \varepsilon x)(\varkappa^2 - 1)\Big] \\ \varkappa = \cos\psi\cos\theta - \sin\psi\sin\theta\sin\varphi\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$m = \frac{\omega^2\delta^3 R}{\nu^2}, \quad n = \frac{\Omega^2\delta^3 a}{\nu^2} \tag{1.9}$$

а $f_1, f_2, \ldots, f_8$ — операторы дифференцирования не выше второго порядка. Как функции $\varepsilon$ они ограничены при $\varepsilon = 0$. Поэтому при малых $\varepsilon$ решение задачи (1.7) можно искать в виде рядов по положительным степеням $\varepsilon$, причем для нулевых членов этих рядов следует взять уравнения и граничные условия, которые получим из (1.7) при $\varepsilon = 0$. При этом для определения свободной поверхности имеем уравнение

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = 0$$

периодическое по $t$ и $\varphi$, решение которого $\zeta = \mathrm{const}$. Тогда из (1.6) следует, что $\zeta = 1$, а из (1.7) находим уравнения и граничные условия для $p$ и $q$ в нулевом приближении

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad p|_{x=1} = 0 \tag{1.10}$$

Положим в (1.8) $x = 1$ и используем (1.10). Тогда найдем выражение для $q$, справедливое при всех $x$, ибо $q$ не зависит от $x$, а $p$ при $x = 1$ равно нулю. Найденное значение $q$ снова введем в (1.8) и решим полученное уравнение относительно безразмерного гидродинамического давления в жидкой оболочке. Тогда

$$p = \frac{g\delta^3}{\nu^2}(1 - x) - n(1 - x)\sin^2\theta + m(1 - x)\Big[\sin\theta\cos\varphi\cos\alpha t +$$
$$+ (\cos\psi\sin\theta\sin\varphi + \sin\psi\cos\theta)\sin\alpha t + \frac{a}{R}(\varkappa^2 - 1)\Big] + O(\varepsilon)$$

Предположим далее, что радиус орбиты значительно превосходит радиус сферы и что, либо ось собственного вращения сферы незначительно отклонена от нормали к плоскости орбиты, либо частота собственного вращения сферы значительно превосходит частоту вращения сферы по орбите

$$a \ll R, \quad \left|\frac{\omega}{\Omega}\sin\psi\right| \ll 1 \tag{1.11}$$

В этих предположениях введем (1.8) в (1.7) и положим $\varepsilon = 0$. Тогда получим уравнения и предельные условия нулевого приближения для $u$, $v$ и $w$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - \lambda\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \eta w = -n\left(1 + \frac{2\omega}{\Omega}\cos\psi\right)\frac{\sin 2\theta}{2} + \tag{1.12}$$
$$+ \frac{im}{2}(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t})\sin\psi\sin\theta + \frac{m}{2}\cos\theta\sin^2\frac{\psi}{2}[e^{i(\alpha t+\varphi)} + e^{-i(\alpha t+\varphi)}] +$$
$$+ \frac{m}{2}\cos\theta\cos^2\frac{\psi}{2}[e^{i(\alpha t-\varphi)} + e^{-i(\alpha t-\varphi)}]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} - \lambda\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \eta v = \frac{im}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}[e^{i(\alpha t+\varphi)} - e^{-i(\alpha t+\varphi)}] -$$
$$- \frac{im}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}[e^{i(\alpha t-\varphi)} - e^{-i(\alpha t-\varphi)}]$$

$$\eta = 2\lambda\left(1 + \frac{\omega}{\Omega}\cos\psi\right)\cos\theta$$

$$v = w = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \partial v/\partial x = \partial w/\partial x = 0 \quad \text{при } x = 1$$

После определения $v$ и $w$ безразмерная радиальная скорость определяется по формуле

$$u = -\int_0^x\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v\operatorname{ctg}\theta\right)dx$$

Решение системы (1.12) имеет вид

$$v = v_0 + 2\,\mathrm{Re}\,[v_1 e^{i\alpha t} + v_2 e^{i(\alpha t+\varphi)} + v_3 e^{i(\alpha t-\varphi)}] \tag{1.13}$$

$$w = w_0 + 2\,\mathrm{Re}\,[w_1 e^{i\alpha t} + w_2 e^{i(\alpha t+\varphi)} + w_3 e^{i(\alpha t-\varphi)}]$$

где $v_j$ и $w_j$ ($j = 0, 1, 2, 3$) удовлетворяют системе уравнений и граничных условий вида

$$\frac{d^2V}{dx^2} - i\beta V + \eta W = A, \quad \frac{d^2W}{dx^2} - i\beta W - \eta V = B$$

$$V = W = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \frac{dV}{dx} = \frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 1$$

Здесь $\beta$ принимает одно из значений $0, \alpha, \alpha \pm \lambda$, а $A$ и $B$ зависят только от $\theta$ и при каждом $\beta$ определяются из правых частей (1.12) после подстановки (1.13) в левые части и сравнения коэффициентов при одинаковых показательных функциях.

Система (1.12) обыкновенных дифференциальных уравнений и предельных условий с постоянными коэффициентами и свободными членами имеет решение

$$V = AF(\beta, x, |\eta|) + BG(\beta, x, \eta), \quad W = -AG(\beta, x, \eta) + BF(\beta, x, |\eta|) \tag{1.14}$$

$$F(\beta, x, |\eta|) = i\left[\frac{\beta}{\beta^2 - \eta^2} - \frac{\mathrm{ch}\,\sigma_1(1-x)}{2(\beta + |\eta|)\,\mathrm{ch}\,\sigma_1} - \frac{\mathrm{ch}\,\sigma_3(1-x)}{2(\beta - |\eta|)\,\mathrm{ch}\,\sigma_3}\right]$$

$$G(\beta, x, \eta) = \left[\frac{|\eta|}{\beta^2 - \eta^2} + \frac{\mathrm{ch}\,\sigma_1(1-x)}{2(\beta + |\eta|)\,\mathrm{ch}\,\sigma_1} - \frac{\mathrm{ch}\,\sigma_3(1-x)}{2(\beta - |\eta|)\,\mathrm{ch}\,\sigma_3}\right]\mathrm{sgn}\,\eta$$

$$\sigma_{1,3} = \sqrt{|\beta \pm |\eta||}\exp\left[\frac{i\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,(\beta \pm |\eta|)\right]$$

Здесь же отметим такие соотношения (чертой сверху обозначена комплексно-сопряженная с $S$ величина):

$$S(|\eta|, x) = 1 - \frac{\mathrm{ch}\,[e^{1/4\pi i}(1-x)\sqrt{|\eta|}]}{\mathrm{ch}\,(e^{1/4\pi i}\sqrt{|\eta|})} \tag{1.15}$$

$$S^*(|\beta|, x) = \begin{cases} S(|\beta|, x), & \beta > 0 \\ \overline{S}(|\beta|, x), & \beta < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{|\eta| \to |\beta|} F(\beta, x, |\eta|) = \frac{i}{4\beta} S^*(2|\beta|, x) - \frac{x(2-x)}{4}$$

$$\lim_{|\eta| \to 0} \frac{1}{|\eta|} S(|\eta|, x) = \frac{ix(2-x)}{2}$$

$$\lim_{|\eta| \to |\beta|} G(\beta, x, \eta) = -\frac{\mathrm{sgn}\,\eta}{4\beta} S^*(2|\beta|, x) + \frac{ix(2-x)}{4}\,\mathrm{sgn}\,\eta \cdot \mathrm{sgn}\,\beta$$

$$\lim_{\beta \to \pm 0} \frac{1}{|\beta|} S^*(|\beta|, x) = \pm\frac{ix(2-x)}{2}$$

Выпишем выражения функций $v_j$ и $w_j$, которые входят в (1.13) и которые получим из (1.14) при соответствующих значениях $\beta$, $A$ и $B$

$$(1.16)\qquad v_0 = \frac{n}{|\eta|}\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{\Omega}\cos\psi\right)\operatorname{Im} S(|\eta|, x)\sin 2\theta$$

$$w_0 = -\frac{n}{\eta}\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{\Omega}\cos\psi\right)\operatorname{Re} S(|\eta|, x)\sin 2\theta$$

$$v_1 = \frac{im}{2}F(\alpha, x, |\eta|)\sin\psi\sin\theta,\quad w_1 = -\frac{im}{2}G(\alpha, x, \eta)\sin\psi\sin\theta$$

$$v_2 = \frac{m}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}(F_+\cos\theta + iG_+),\quad w_2 = \frac{m}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}(-G_+\cos\theta + iF_+)$$

$$v_3 = \frac{m}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}(F_-\cos\theta - iG_-),\quad w_3 = -\frac{m}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}(G_-\cos\theta + iF_-)$$

$$F_\pm = F(\alpha\pm\lambda, x, |\eta|),\quad G_\pm = G(\alpha\pm\lambda, x, \eta)$$

2. Оставляя в стороне полное исследование формул (1.13), (1.16), разберем случай $\alpha\to\infty$, $\lambda\to\infty$. Тогда из (1.14)—(1.16) следует, что отношения $v_0/n$, $w_0/n$, $v_j/m$ и $w_j/m$ ($j = 1, 2, 3$) стремятся к нулю на всех широтах $\theta$, кроме тех, которые определяются условиями $|\eta| = 0$, $|\alpha|$, $|\alpha\pm\lambda|$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Первый случай, $|\eta| = 0$.

В этом случае формулы (1.13) в силу (1.16) и (1.15) принимают вид

$$(2.1)\qquad v = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{\Omega}\cos\psi\right)x(2-x)\sin 2\theta -$$
$$-\frac{m}{\alpha}\operatorname{Re}[S^*(|\alpha|, x)e^{i\omega t'}]\sin\psi\sin\theta +$$
$$+\frac{m\sin^2{}^1\!/_2\psi}{\alpha+\lambda}\operatorname{Re}[iS^*(|\alpha+\lambda|, x)e^{i(\omega t'+\varphi)}]\cos\theta +$$
$$+\frac{m\cos^2{}^1\!/_2\psi}{\alpha-\lambda}\operatorname{Re}[iS^*(|\alpha-\lambda|, x)e^{i(\omega t'-\varphi)}]\cos\theta$$
$$w = -\frac{m\sin^2{}^1\!/_2\psi}{\alpha+\lambda}\operatorname{Re}[S^*(|\alpha+\lambda|, x)e^{i(\omega t'+\varphi)}] +$$
$$+\frac{m\cos^2{}^1\!/_2\psi}{\alpha-\lambda}\operatorname{Re}[S^*(|\alpha-\lambda|, x)e^{i(\omega t'-\varphi)}]\quad (|\eta| = 0)$$

Из (1.12) следует, что равенство $|\eta| = 0$ возможно в двух случаях: а) $\theta = \pi/2$ (широта экватора). Первая из формул (2.1) дает

$$v = -\frac{m}{\alpha}\operatorname{Re}[S^*(|\alpha|, x)e^{i\omega t'}]\sin\psi\quad (\theta = \pi/2)$$

а вторая остается без изменения. Если угловая скорость собственного вращения сферы совпадает с угловой скоростью движения по орбите ($\alpha = \lambda$), то, как следует из (2.1) и (1.15)

$$w = -\frac{1}{2}mx(2-x)\cos^2\frac{\psi}{2}\sin(\omega t' - \varphi) + O\left(\frac{m}{\lambda}\right)$$
$$(\theta = \pi/2,\ \alpha = \lambda\to\infty)$$

В размерной форме, с учетом (1.6) и (1.9) эта скорость на свободной поверхности имеет вид

$$(2.2)\qquad w_\varphi = -\frac{\omega^2\delta^2 R}{2\nu}\cos^2\frac{\psi}{2}\sin(\omega t' - \varphi)$$
$$(\theta = \pi/2,\ \omega\delta^2/\nu = \Omega\delta^2/\nu\to\infty,\ x = 1)$$

Если $\omega = -\Omega$, то из (2.1) имеем аналогичную ситуацию:

$$w_\varphi = \frac{\omega^2\delta^2 R}{2\nu}\sin^2\frac{\psi}{2}\sin(\omega t' + \varphi) \tag{2.3}$$

$$(\theta = \pi/2, \ -\Omega\delta^2/\nu = \omega\delta^2/\nu \to \infty, \ x = 1)$$

Итак, если $\alpha \neq \pm\lambda$, $\lambda \to \infty$, $\Omega \neq -\omega\cos\psi$, $|\eta| \neq |\alpha|$, $|\alpha \pm \pm \lambda|$, то отношения $v/m$, $w/m$ стремятся к нулю на всех широтах. Если $\alpha = \pm\lambda$, то эти отношения стремятся к нулю на всех широтах, кроме окрестности экватора, где трансверсальная скорость на свободной поверхности выражается по формулам (2.2) или (2.3) с учетом (1.5). При достаточно большой толщине $\delta$ жидкой оболочки трансверсальные скорости (2.2) и (2.3) в окрестности экватора могут стать сколь угодно большими. Это значит, что движущаяся рассматриваемым образом сфера не в состоянии удержать вокруг себя жидкую оболочку произвольной толщины.

б) $\Omega = -\omega\cos\psi$. При этом, для выполнения условия (1.11) нужно потребовать, чтобы $\psi \sim 0$, т. е. что ось собственного вращения сферы мало отклонена от нормали к плоскости орбиты. В этих предположениях формулы (2.1) имеют вид

$$v = -\frac{n}{2}x(2-x)\sin\theta\cos\theta + O\left(\frac{n}{\lambda}\right)$$

$$w = O\left(\frac{n}{\lambda}\right) \quad (\Omega = -\omega\cos\psi, \ \lambda \to \infty)$$

или, в размерном виде, на свободной поверхности

$$v_\theta = -\frac{\Omega^2\delta^2 a}{2\nu}\sin\theta\cos\theta \quad (\Omega = -\omega\cos\psi, \ \Omega\delta^2/\nu \to \infty, \ x = 1) \tag{2.4}$$

Это значит, что если собственное вращение сферы происходит в сторону, противоположную ее вращению по орбите, причем $\Omega = -\omega\cos\psi$, то в жидкой оболочке должны наблюдаться интенсивные меридианные течения от экватора к полюсам со скоростью (2.4).

Второй случай

$$|\eta| = |\alpha|, \quad \theta_1 = \arccos\left|\frac{\omega}{2(\Omega + \omega\cos\psi)}\right|, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1 \tag{2.5}$$

В этом случае формулы (1.13)—(1.16) при больших $\alpha$ и $\lambda$ в размерном виде с учетом (1.6) и (1.9) дают

$$v_\theta = \frac{\omega^2\delta^2 R}{4\nu}\sin\psi\sin\omega t'\sin\theta \tag{2.6}$$

$$w_\varphi = \frac{\omega^2\delta^2 R}{4\nu}\sin\psi\cos\omega t'\sin\theta\,\operatorname{sgn}\eta\,\operatorname{sgn}\alpha \quad (|\eta| = |\alpha|, \ x = 1)$$

Если, кроме этого, $\omega = \pm\Omega/2$, то на широтах (2.5) в (2.6) добавляются слагаемые того же порядка вида

$$\frac{\omega^2\delta^2 R}{2\nu}(1 \pm \cos\psi)(1 \pm \cos\theta)\,{\cos \atop \sin}(\omega t' \pm \varphi)$$

Третий случай

$$|\eta| = |\alpha \pm \lambda|, \quad \theta_3 = \arccos\left|\frac{\Omega \pm \omega}{2(\Omega + \omega\cos\psi)}\right|, \quad \theta_4 = \pi - \theta_3 \tag{2.7}$$

Аналогично (2.6) находим

$$v_\theta = -\frac{\omega^2\delta^2 R}{2\nu}(1 \mp \cos\psi)[\cos\theta \pm \operatorname{sgn}\eta \operatorname{sgn}(\alpha \pm \lambda)]\cos(\omega t' + \varphi) \tag{2.8}$$

$$w_\varphi = \frac{\omega^2\delta^2 R}{2\nu}(1 \mp \cos\psi)[\cos\theta \operatorname{sgn}\eta \operatorname{sgn}(\alpha \pm \lambda) \pm 1]\sin(\omega t' + \varphi)$$

$$(|\eta| = |\alpha \pm \lambda|, \ x = 1)$$

Если при этом $\omega = \pm\Omega$ или $\omega = \pm\Omega/2$, то на широтах (2.7) в (2.8) добавляются слагаемые того же порядка.

Из (2.6) и (2.8) вытекает, что при достаточно больших $\delta$, $R$, $\omega$, а также при достаточно малых $\nu$ на широтах (2.5) и (2.7) должен происходить отрыв жидкости со свободной поверхности со скоростями (2.6) и (2.8) соответственно, независимо от того, каким образом возрастают $\alpha$ и $\lambda$.

Отметим, что факт возможного убегания жидкости с экватора в общем очевиден и, определяясь членом $\Omega a$ в равенстве (1.5), не зависит от вязкости. Однако скорости (2.2), (2.3), (2.6) и (2.8) на соответствующих широтах могут превышать величину $\Omega a$. В этом случае отрыв жидкой оболочки определяется не только ее вязкостью, но также толщиной $\delta$, радиусом орбиты $R$ и угловой скоростью $\omega$ вращения сферы по орбите.

3. В заключение рассмотрим простой предельный случай $\omega = 0$, соответствующий движению жидкости, вызванному вращением сферы вокруг неподвижной оси. В этом случае $m = 0$, и из формул (1.13) и (1.16) находим

$$v = \frac{n\sin\theta}{2\lambda}\left[1 - \frac{1}{\Delta}(\operatorname{ch}\xi y\cos\xi y\operatorname{ch}\xi\cos\xi + \operatorname{sh}\xi y\sin\xi y\operatorname{sh}\xi\sin\xi)\right] \tag{3.1}$$

$$w = \frac{n\sin\theta}{2\lambda\Delta}(\operatorname{ch}\xi y\cos\xi y\operatorname{sh}\xi\sin\xi - \operatorname{sh}\xi y\sin\xi y\operatorname{ch}\xi\cos\xi)$$

$$\Delta = \operatorname{ch}^2\xi\cos^2\xi + \operatorname{sh}^2\xi\sin^2\xi, \quad y = 1 - x, \quad \xi = \sqrt{\lambda}\cos\theta$$

При $\omega = 0$ течение жидкости стационарно, не зависит от угла $\varphi$ и обладает симметрией относительно экваториальной плоскости. Поэтому достаточно рассмотреть значения $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Для радиальной скорости находим

$$u = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\int_y^1 v\sin\theta\, dy \tag{3.2}$$

Из (3.2) и граничных условий (1.12) следует, что $u$, $v$ и $w$ на свободной поверхности достигают максимального (по модулю) значения. Поэтому выражения (3.1) и (3.2) достаточно исследовать при $y = 0$

$$u = -\frac{n\cos\theta}{\lambda}\left(1 - \frac{\operatorname{sh}2\xi + \sin 2\xi}{4\Delta}\right) - \tag{3.3}$$

$$-\frac{n\sin^2\theta}{8\xi^2\Delta}\left(\operatorname{ch}2\xi + \cos 2\xi - \frac{\operatorname{sh}2\xi + \sin 2\xi}{2\xi} - \frac{\operatorname{sh}^2 2\xi - \sin^2 2\xi}{2\Delta}\right)$$

$$v = \frac{n\sin\theta}{2\lambda}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\xi\cos\xi}{\Delta}\right), \quad w = \frac{n\sin\theta\operatorname{sh}\xi\sin\xi}{2\lambda\Delta}$$

В районе экваториальных широт, при $\theta \to \pi/2$, $\xi$ является малым параметром, и выражения (3.3) принимают вид

$$u = \frac{8n\lambda}{15}\cos\theta + O(\cos^3\theta), \quad w = \frac{n}{2}\cos\theta + O(\cos^2\theta)$$

$$v = \frac{5n\lambda}{12}\cos^2\theta + O(\cos^3\theta) \quad (x = 1,\ \theta \to \pi/2)$$

Несмотря на то, что на самом экваторе $u = v = w = 0$, радиальная и трансверсальная скорости в окрестности экватора убывают медленнее, чем меридианная — в экваториальных широтах происходит вынос жидкости из глубины к поверхности.

При удалении от экватора ограничимся случаем $\lambda \to \infty$. Тогда и $\xi \to \infty$, и формулы (3.3) дают

$$u = -\frac{n\cos\theta}{\lambda} + O(n\lambda^{-3/2}), \quad v = \frac{n\sin\theta}{2\lambda}\left[1 + O\left(e^{-\sqrt{\lambda\cos\theta}}\right)\right]$$

$$w = \frac{n}{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda\cos\theta}} \sin\theta \sin\left(\sqrt{\lambda\cos\theta}\right)\left[1 + O\left(e^{-2\sqrt{\lambda\cos\theta}}\right)\right]$$

$$(x = 1,\ \theta \nrightarrow \pi/2)$$

На полюсе

$$v = w = 0 \quad (\theta = 0), \quad u = -\frac{n}{\lambda} + O(n\lambda^{-3/2}) \quad (x = 1,\ \theta = 0)$$

т. е. в полярных широтах преобладают радиальные течения от поверхности жидкости в глубину.

Полученные результаты могут найти применение в различных вопросах теории вращающихся жидкостей [4] и в теории планет, которой в настоящее время уделяется большое внимание. Например, в работе [5] численное моделирование воспроизводит осесимметричную структуру полос Юпитера, что качественно согласуется с выводами, полученными выше для широт (2.5) и (2.7).

Поступила 8 VII 1976

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Черкесов Л. В.* Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев, «Наукова думка», 1976, стр. 312—323.
2. *Кузнецов Д. С.* Гидродинамика. Л., Гидрометеоиздат, 1951, стр. 355—363.
3. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947, стр. 880—897.
4. *Гринспен Х. Л.* Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеоиздат, 1975.
5. *Williams G. P.* Jupiter's atmospheric circulation. Nature, 1975, vol. 257, No. 5529, p. 778.