

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Исследуется задача оптимального управления нелинейными колебательными движениями с нефиксированным моментом окончания процесса управления. Считается, что движение описывается стандартной системой с вращающейся фазой, а частота сильно зависит от медленного вектора [1,2]. Предполагается, что задача удовлетворяет принципу максимума [3]. На основе метода усреднения [2] строится более простая, имеющая меньшую размерность двухточечная задача первого приближения, определяющая оптимальное решение. Развита методика может быть применена для приближенного решения прикладных задач управления типа оптимального быстрого действия нелинейными колебательными системами при помощи малых, но длительных управляющих воздействий. Рассчитываются конкретные примеры, имеющие механическое содержание.

Приближенные аналитические методы решения задач оптимального управления, в том числе асимптотические, базирующиеся на идее малого параметра и разделении движений, развивались в [2,4-7] и др. В работе [2] рассматривался случай асимптотически большого фиксированного момента окончания процесса управления; в [6] автором исследована квазилинейная задача, аналогичная рассматриваемой.

**1. Постановка задачи.** Исследуется задача управления системой стандартного вида [2, 6]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f(a, \psi, u, \varepsilon), & a(t_0) &= a_0 \\ \dot{\psi} &= \omega(a) + \varepsilon F(a, \psi, u, \varepsilon), & \psi(t_0) &= \psi_0 \end{aligned}$$

Здесь  $a$  — вектор медленных переменных произвольной размерности  $n \geq 2$ , принадлежащий некоторой ограниченной области;  $\psi$  — быстрая скалярная переменная (вращающаяся фаза),  $|\psi| < \infty$ ; частота  $\omega(a) \geq \omega_0 > 0$  во всей рассматриваемой области изменения переменной  $a$ ;  $u \in U$  — вектор управляющих функций размерности  $m$ ,  $U$  — выпуклая фиксированная область;  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  — малый числовой параметр; точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ :  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $t_1 \sim \varepsilon^{-1}$ ;  $t_0, a_0, \psi_0$  — начальные данные. Правая часть системы (1.1) в указанной области предполагается определенной и достаточно гладкой, такой, что при подстановке допустимых ограниченных кусочно-непрерывных управляющих функций  $u$  решение системы существует и единственно на интервале  $t \in [t_0, t_1]$  для всех  $\varepsilon > 0$ . Далее требования гладкости, необходимые для применения и обоснования предлагаемой методики, будут уточнены.

Ставится следующая задача оптимального управления — требуется перевести фазовую точку системы (1.1) на многообразии

$$(1.2) \quad M(a, \varepsilon)|_{t_1} = 0, \quad M = (M_1, \dots, M_r), \quad 1 \leq r \leq n-1$$

в нефиксированный момент времени  $t_1$  так, чтобы

$$(1.3) \quad J = g(a, \varepsilon)|_{t_1} \rightarrow \min \quad u \in U$$

Здесь функции  $M$  и  $g$  также считаются достаточно гладкими.

Существенный момент в приведенной постановке — предположение о независимости функций  $M$  и  $g$  от быстрой переменной  $\psi$ . Ее значение в случае сильной зависимости  $\omega$  от  $a$  ( $\omega'(a) \sim 1$ ) в схемах усреднения [1,2] определяется с пониженной абсолютной точностью, что, вообще говоря, не позволит в противном случае построить краевую задачу первого приближения. Далее, при таком предположении получающееся значение  $t_1 \sim \varepsilon^{-1}$ , что допускает применение асимптотического метода усреднения для приближенного решения краевой задачи принципа максимума. Следует также отметить, что в практических задачах с малыми, но длительными управляющими воздействиями величиной  $\psi$ , т. е. положением объекта в фазовом пространстве, обычно не задаются. В этих задачах интересуются изменением параметров движения (медленных переменных  $a$ ), которые при  $\varepsilon = 0$  сохраняются. Например, в ограниченной плоской задаче Кеплера [8,9] такими параметрами являются энергия и кинетический момент или эксцентриситет орбиты и фокальный параметр, начальное значение истинной аномалии (см. п. 3, пример 2); в задаче оптимального управления вращениями несимметричного твердого тела относительно центра масс (случай Эйлера) это — величина кинетического момента и энергия или другие интегралы невозмущенного движения [10] (см. п. 3, пример 3).

Приближенное решение задачи оптимального управления (1.1)–(1.3) строится на основе необходимых условий принципа максимума [3] в предположении, что указанное решение существует и единственно для любых  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ . Тогда из условия максимума функции Гамильтона задачи

$$(1.4) \quad H(a, \psi, p, q, u, \varepsilon) = \varepsilon(pf) + q(\omega + \varepsilon F) \equiv \omega q + \varepsilon h$$

по  $u \in U$  при фиксированных других аргументах определяется единственное оптимальное управление

$$(1.5) \quad u = u^*(a, \psi, p, q, \varepsilon)$$

Функция  $u^*$  предполагается достаточно гладкой и  $2\pi$ -периодической по  $\psi$  [2]. В (1.4)  $p$  и  $q$  — переменные, сопряженные  $a$  и  $\psi$ , удовлетворяющие системе уравнений и условиям трансверсальности на правом конце

$$(1.6) \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial a}\Big|_{u^*} = -\omega'q - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial a}\Big|_{u^*}, \quad p(t_1) = -\frac{\partial}{\partial a}(\alpha M)_{t_1}$$

$$q \dot{=} -\frac{\partial H}{\partial \psi}\Big|_{u^*} = -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial \psi}\Big|_{u^*}, \quad q(t_1) = 0$$

Здесь  $\alpha$  — постоянный вектор, подлежащий определению; выражения типа  $(\alpha M)$  и аналогичные в (1.4) означают скалярные произведения. Переменные  $a, \psi$  определяются совместным решением двухточечной задачи (1.1), (1.2), (1.5), (1.6). Замыкает систему краевых условий соотно-

шение

$$(1.7) \quad H^* |_{t_1} = \varepsilon h(a, \psi, p, 0, u^*, \varepsilon) |_{t_1} = 0$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной величины  $t_1$ . Так как каноническая система (1.1), (1.6) автономна, то из (1.7) следует, что для всех  $t \in [t_0, t_1]$ , вдоль рассматриваемых траекторий

$$(1.8) \quad H^* = \omega q + \varepsilon h^* = 0$$

Звездочка означает, что для  $u$  берется известное выражение  $u^*$  (1.5). При помощи тождества (1.8) нестандартная система уравнений (она содержит член  $-\omega'q$  в первом векторном уравнении (1.6)) сводится к стандартному виду, аналогично [2]. Итак, требуется построить такое решение краевой задачи, которое доставляет минимум функционалу (1.3).

2. Построение решения первого приближения. Далее рассматриваются решения краевой задачи, удовлетворяющие условию (1.7). Это позволяет привести уравнения (1.1), (1.6) к системе стандартного вида, не содержащей переменной  $q$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} a' &= \varepsilon f_0^*(a, \psi, p) + \varepsilon^2 f_1, & \psi' &= \omega(a) + \varepsilon F \\ p' &= -\varepsilon \omega'(a) \omega^{-1}(p f_0^*) - \varepsilon \delta(p f_0^*) / \delta a + \varepsilon^2 P_1 \end{aligned}$$

Здесь используется выражение для  $q$ :  $q = -\varepsilon \omega^{-1}(p f_0^*) + \varepsilon^2 Q_1$ , получающееся разрешением уравнения (1.8) относительно этой переменной, что возможно при достаточно малом  $\varepsilon$ , так как  $\omega(a) \geq \omega_0 > 0$ . В рассматриваемой области функции  $f_1$ ,  $P_1$  и  $Q_1$  равномерно ограничены; их явный вид не выписывается, так как он несуществен при решении задачи в первом приближении, а слагаемые  $O(\varepsilon^2)$  в (2.1) могут быть отброшены [1, 2].

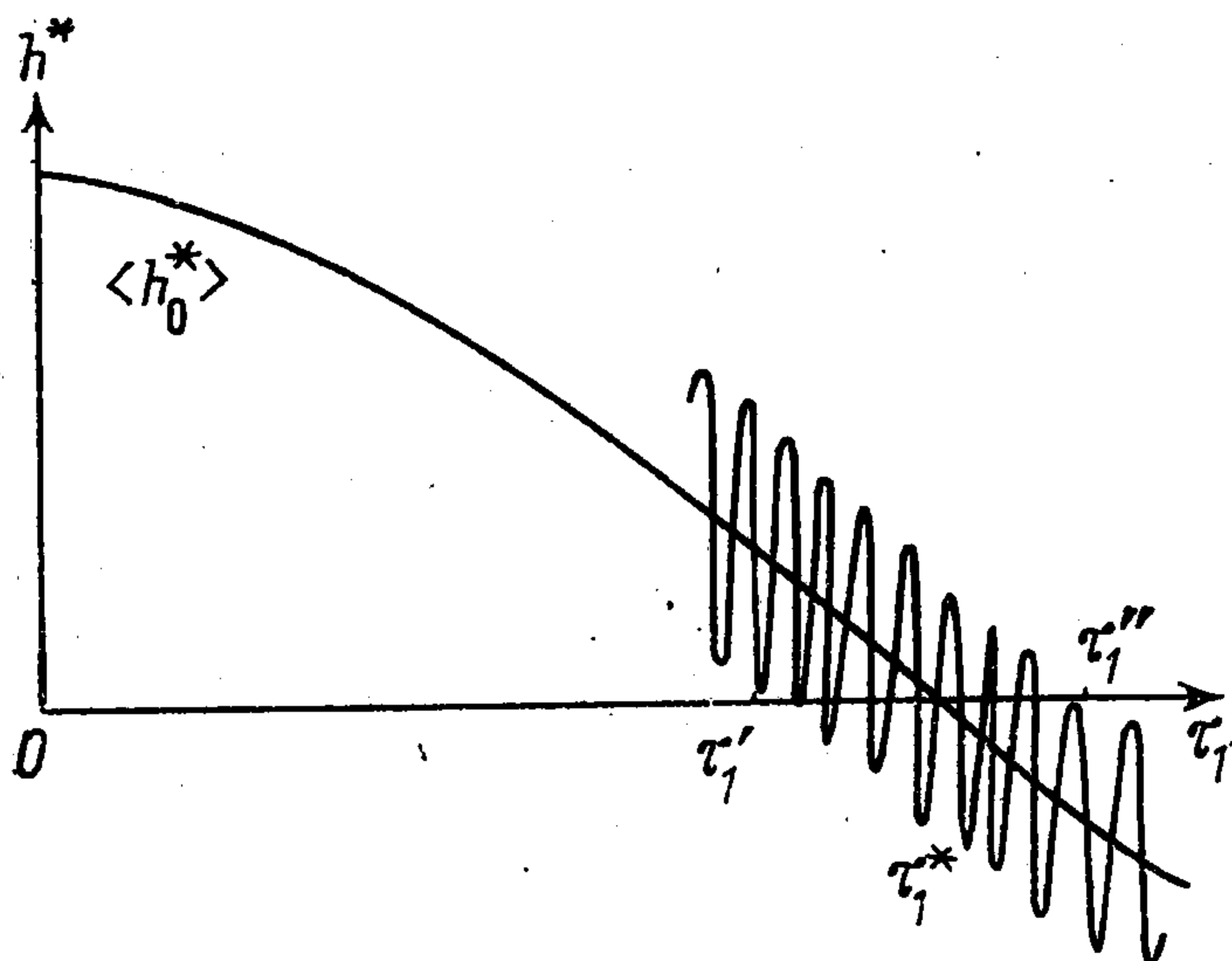
Алгоритм решения исходной краевой задачи заключается в построении семейства решений укороченной краевой задачи для системы (2.1) с соответствующими начальными и краевыми условиями (1.1), (1.2), (1.6). В качестве параметра семейства удобно взять величину  $t_1$ . Далее предполагается, что для любого заданного значения  $t_1$  ( $t_1 \sim \varepsilon^{-1}$ ) решение краевой задачи существует и единственно:  $a = a(t, t_1, \varepsilon)$ ,  $p = p(t, t_1, \varepsilon)$ ,  $\psi = \psi(t, t_1, \varepsilon)$ . Зависимость от  $a_0, \psi_0$  ради сокращения записи не указывается. Решение исходной краевой задачи (см. п. 1) будет полностью построено, если найдено значение параметра  $t_1$ , удовлетворяющее уравнению

$$(2.2) \quad h^* |_{t_1} \equiv (p f^*)_{t_1} = 0$$

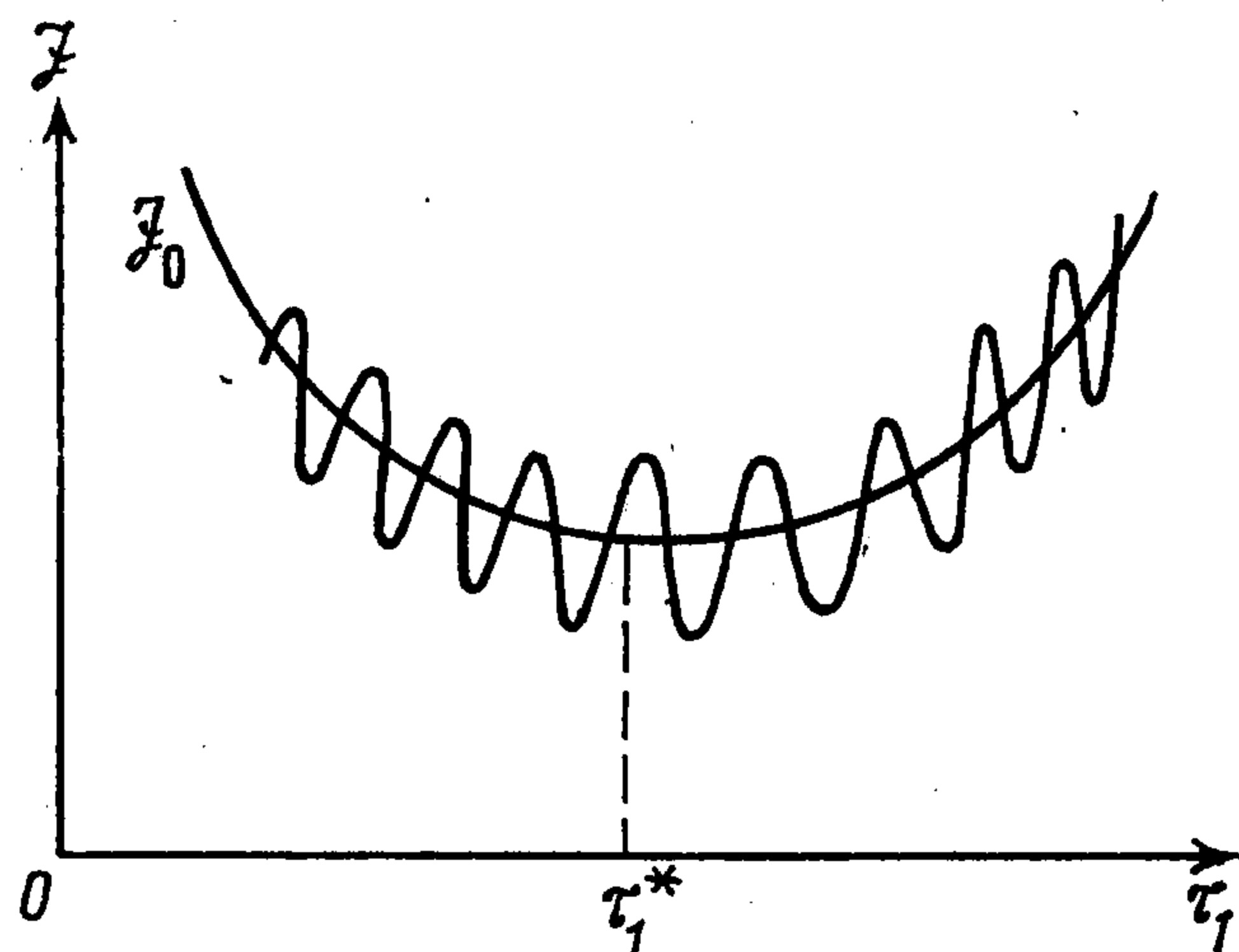
Если допустимый корень  $t_1(\varepsilon)$  ( $t_1 \sim \varepsilon^{-1}$ ) единственный, то получающееся решение краевой задачи дает также решение задачи оптимального управления (1.1)—(1.3) [3]. Однако, как следует из (2.2), при  $\varepsilon$  малом это уравнение допускает много корней, их число, вообще говоря, порядка  $[\varepsilon^{-1}]$ . Это следует из того, что левая часть уравнения (2.2)  $h^*[t_1, \varepsilon]$  — осциллирующая функция параметра  $t_1$  с частотой и амплитудой порядка единицы, а среднее значение по  $\psi$ :  $\langle h^* \rangle$  — медленно меняющаяся функ-

ция  $t_1$ , т. е.  $d \langle h^* \rangle / dt_1 \sim \varepsilon$ . Типичное поведение  $h^*$  и  $\langle h^* \rangle$  как функций  $\tau_1$  ( $\tau = \varepsilon t$  — медленное время) представлено на фиг. 1.

Среди допустимого дискретного множества корней следует выбрать такой, который минимизирует значение функционала (1.3):  $J^* = \min J$ ,  $\tau_1^* \in \{\tau_1\}$ . Как показывает дальнейшее исследование, типичная зависимость функционала от  $\tau_1$  имеет вид, изображенный на фиг. 2 (см. п. 3,



Фиг. 1



Фиг. 2

пример 1). Описанная выше ситуация — асимптотически большое число решений краевой задачи — затрудняет применение известных численных методов решения задачи оптимального управления. Развиваемый ниже подход позволяет получить искомое приближенное решение с погрешностью  $\sim \varepsilon$  по медленным переменным и функционалу.

Соответствующая (2.1) усредненная система уравнений первого приближения получается отбрасыванием членов порядка  $\varepsilon^2$  и усреднением по фазе  $\psi$  при фиксированных медленных переменных  $a$  и  $p$

$$(2.3) \quad d\xi / d\tau = f_0(\xi, \eta), \quad \tau \in [0, \tau_1], \quad \tau_1 \sim 1$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)}(\eta f_0) - \left( \eta \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \right)$$

Здесь  $\xi, \eta$  — усредненные медленные переменные,  $f_0$  — среднее значение функции  $f_0^*$  по  $\psi$ . Система начальных и граничных условий имеет вид

$$(2.4) \quad \xi(0) = a_0, \quad M_0(\xi)_{\tau_1} = 0, \quad \eta(\tau_1) = -(\alpha M_0')_{\tau_1} \\ (M_0(\xi) \equiv M(\xi, 0))$$

Пусть усредненная краевая задача (2.3), (2.4) для любого заданного значения  $\tau_1 \sim 1$  допускает единственное решение:  $\xi = \xi(\tau, \tau_1)$ ,  $\eta = \eta(\tau, \tau_1)$ . Предполагается, что малому  $\sim \varepsilon$  изменению начальных, краевых условий и правых частей уравнений (2.3) отвечает аналогичное изменение решения. Тогда разность между решением исходной краевой задачи и усредненной по медленным переменным будет порядка  $\varepsilon$  [2]. Последовательными приближениями по степеням параметра  $\varepsilon$  можно показать, что при условии единственности решений краевых задач (2.1) и

(2.3), указанных ранее, и выполнении требований гладкости, обеспечивающих  $\varepsilon$ -близость решений соответствующих задач Коши для указанных уравнений [1], имеет место такая же близость для решений краевых задач на любом интервале  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $t_1 = L\varepsilon^{-1}$ , где  $L$  — постоянная, которая может быть сколь угодно большой при  $\varepsilon_0$  достаточно малом

$$(2.5) \quad a(t, t_1, \varepsilon) = \xi(\tau, \tau_1) + O(\varepsilon), \quad p(t, t_1, \varepsilon) = \eta(\tau, \tau_1) + O(\varepsilon)$$

$$q = \varepsilon \omega^{-1}(\xi)(\eta f_0^*(\xi, \psi, \eta)) + O(\varepsilon^2), \quad \psi = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \omega(\xi(\tau', \tau_1)) d\tau' + O(1)$$

Решение задачи оптимального управления будет построено в первом приближении, если определено значение оптимального момента  $\tau_1$  окончания процесса управления с погрешностью  $O(\varepsilon)$ . Уравнение (2.2), в которое подставлены приближенные выражения (2.5)

$$(2.6) \quad h^*(\xi(\tau_1, \tau_1) + O(\varepsilon), \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_1} \omega(\xi(\tau, \tau_1)) d\tau + O(1),$$

$$\eta(\tau_1, \tau_1) + O(\varepsilon), O(\varepsilon), \varepsilon) = 0$$

не позволяет однозначно определить величину  $\tau_1$  с нужной точностью, так как фаза  $\psi$  определяется с погрешностью  $O(1)$ . Однако вследствие установленной ранее быстрой осцилляции левой части (2.6) относительно  $\tau_1$  (с частотой  $\sim \varepsilon^{-1}$  и амплитудой порядка единицы) можно утверждать, что в  $\varepsilon$ -окрестности значений каждого из корней  $\{\tau_1\}$ , вычисленного без учета погрешностей, находится корень уравнения (2.2). Для этого достаточно, чтобы уравнение

$$(2.7) \quad \langle h_0(\xi(\tau_1, \tau_1), \eta(\tau_1, \tau_1)) \rangle = 0$$

допускало вещественный корень  $\tau_1^*$ , причем

$$(2.8) \quad \omega(\xi(\tau_1^*, \tau_1^*)) + \int_0^{\tau_1^*} \omega'(\xi(\tau, \tau_1^*)) \frac{\partial \xi(\tau, \tau_1^*)}{\partial \tau_1^*} d\tau \neq 0$$

Далее эти условия предполагаются выполненными. Так как корни  $\{\tau_1\}$  достаточно определить с погрешностью  $O(\varepsilon)$ , то допустимые значения  $\tau_1$  в рассматриваемом первом приближении можно выбирать из некоторого непрерывного интервала  $\tau_1 \in [\tau_1', \tau_1'']$  (см. фиг. 1).

Оптимальное значение  $\tau_1$  находится из условия минимума функционала  $J$  (1.3), вычисленного с погрешностью  $O(\varepsilon)$  и рассматриваемого как функция непрерывного аргумента  $\tau_1 \in [\tau_1', \tau_1'']$

$$(2.9) \quad J_0 = g_0(\xi(\tau_1, \tau_1)) \rightarrow \min_{\tau_1}$$

Ниже приводятся необходимые и достаточные условия оптимальности  $\tau_1$  и решения (2.5) системы (2.3). Следует вначале отметить, что система допускает интеграл

$$(2.10) \quad \kappa = -(\eta f_\theta(\xi, \eta)) \omega^{-1}(\xi)$$

Он означает постоянство среднего значения  $q$  с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  на интервале  $\Delta t \sim \varepsilon^{-1}$ . Действительно, дифференцирование (2.10) по  $\tau$

в силу уравнений (2.3) с учетом соотношения  $\partial(\eta f_0) / \partial \eta = f_0$  приводит к тождеству  $d\kappa / d\tau \equiv 0$ . В результате система (2.3) может быть представлена в эквивалентном виде

$$(2.11) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = f_0(\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\omega'(\xi)\kappa - \frac{\partial}{\partial \xi}(\eta f_0)$$

Здесь  $\kappa$  — неизвестный параметр, связанный с искомой величиной  $\tau_1$  условием [6]

$$(2.12) \quad [\omega(\xi)\kappa + (\eta f_0(\xi, \eta))]_{\tau_1} = 0$$

Здесь  $\xi = \xi(\tau, \tau_1, \kappa)$ ,  $\eta = \eta(\tau, \tau_1, \kappa)$  — решение краевой задачи для уравнений (2.11). Если разрешить (2.12) относительно  $\tau_1$ :  $\tau_1 = \tau_1(\kappa)$ , то после подстановки в условие (2.6) следует, что в  $\varepsilon$ -окрестности любого значения  $\kappa$ , принадлежащего некоторой окрестности точки  $\kappa = 0$ :  $\kappa \in [\kappa', \kappa'']$ ,  $\kappa' < 0$ ,  $\kappa'' > 0$  при условии

$$(2.13) \quad \frac{d}{d\kappa} \int_0^{\tau_1(\kappa)} \omega(\xi(\tau, \tau_1(\kappa), \kappa)) d\tau \neq 0$$

существует корень точного уравнения (2.2).

Таким образом, минимизация функционала  $J_0$  (2.9) по  $\tau_1 \in [\tau_1', \tau_1'']$  сводится к минимизации по  $\kappa \in [\kappa', \kappa'']$  с учетом условия (2.12). Необходимое условие локального минимума — равенство нулю полной производной по  $\kappa$

$$dJ_0 / d\kappa = -(\eta_1 d\xi_1 / d\kappa), \quad \xi_1 = \xi_{\tau_1}, \quad \eta_1 = \eta_{\tau_1}$$

Здесь использован тот факт, что  $M_0(\xi_1) \equiv 0$ , т. е.  $dM_0 / d\kappa|_{\tau_1} = 0$ . Производная  $d\xi_1 / d\kappa$  равна

$$\frac{d\xi_1}{d\kappa} = \frac{d\xi}{d\tau} \Big|_{\tau_1} \frac{d\tau_1}{d\kappa} + \frac{D\xi}{D\kappa} \Big|_{\tau_1}, \quad \frac{D\xi}{D\kappa} = \frac{\partial \xi}{\partial \tau_1} \frac{d\tau_1}{d\kappa} + \frac{\partial \xi}{\partial \kappa}$$

На основании (2.11), (2.12) следует

$$(2.14) \quad \frac{dJ_0}{d\kappa} = \kappa \frac{d}{d\kappa} \int_0^{\tau_1} \omega(\xi(\tau, \tau_1, \kappa)) d\tau, \quad \tau_1 = \tau_1(\kappa)$$

Из выражения (2.14) следует, что  $\kappa = 0$  — точка, подозрительная на экстремум. Далее, если (см. (2.8), (2.13))

$$(2.15) \quad \frac{d^2 J_0}{d\kappa^2} \Big|_{\kappa=0} = \frac{d}{d\kappa} \int_0^{\tau_1} \omega(\xi(\tau, \tau_1, \kappa)) d\tau \Big|_{\kappa=0, \tau_1=\tau_1(0)} > 0$$

то  $\kappa = 0$  — точка локального минимума. Здесь  $\tau_1(0)$  — положительный корень уравнения (2.12), взятого при  $\kappa = 0$ . Если во всей окрестности  $\kappa \in [\kappa', \kappa'']$

$$(2.16) \quad \kappa \int_0^{\tau_1} \omega(\xi) d\tau \geq \int_0^{\kappa} d\kappa_1 \int_0^{\tau_1(\kappa_1)} \omega(\xi(\tau, \tau_1(\kappa_1), \kappa_1)) d\tau$$

то  $\kappa = 0$  — точка глобального минимума функционала  $J_0(\kappa)$ , так как

$$J_0(\kappa) = J_0(0) + \kappa \int_0^{\tau_1} \omega(\xi) d\tau - \int_0^{\kappa} d\kappa_1 \int_0^{\tau_1(\kappa_1)} \omega(\xi(\tau, \tau_1(\kappa_1), \kappa_1)) d\tau$$

Установление соотношения (2.14) представляет основной результат исследования задачи оптимального управления (1.1)—(1.3).

Следует отметить, что система (2.11) гамильтонова:  $\omega(\xi)\kappa + (\eta f_0) = \text{const}$ , а так как оптимальное значение  $\kappa = 0$ , то из условия трансверсальности (2.12) следует, что  $(\eta f_0(\xi, \eta)) = 0$ . Здесь  $\xi, \eta$  — решение системы (2.11) при  $\kappa = 0$ , где  $\tau_1 = \tau_1(0)$  — корень уравнения  $(\eta(\tau_1, \tau_1, 0) \cdot f_0(\xi(\tau_1, \tau_1, 0), \eta(\tau_1, \tau_1, 0))) = 0$ . Таким образом, если разрешить уравнение (2.10) при  $\kappa = 0$  относительно какой-либо переменной и подставить в систему (2.11) (при  $\kappa = 0$ ), то ее порядок уменьшается на единицу. В случае системы с одной степенью свободы решение задачи оптимального управления приводится к квадратуре и конечному уравнению, определяющему  $\tau_1(0)$ . Как следует из изложенного, порядок интегрируемой исходной системы  $(2n + 2)$ -го порядка может быть уменьшен на три. При этом весьма существенно, что медленные переменные интегрируются независимо от быстрой фазы. Это позволяет ввести медленное время  $\tau = \varepsilon t$ , что значительно уменьшает объем вычислений при численном решении краевой задачи.

В результате построений п. 1,2 получено приближенное решение задачи оптимального управления

$$(2.17) \quad u = u_0^*(a, \psi, \eta^*), \quad J^* = J_0(0) \\ \xi^* = \xi(\tau, \tau_1(0), 0), \quad \eta^* = \eta(\tau, \tau_1(0), 0)$$

Исследование конкретных задач управления движением нелинейных колебательных систем показывает, что изложенный подход применим в некоторых случаях даже тогда, когда функция  $u^*$  (1.5) разрывна, причем число разрывов первого рода может быть  $\sim [\varepsilon^{-1}]$  на рассматриваемом интервале времени [3, 11]. В этих задачах величина  $q \sim \varepsilon$  оказывает малое влияние ( $\sim \varepsilon$ ) на управление и функционал, а ее оптимальное среднее значение находится непосредственно из уравнений движения. В результате применения метода усреднения часто удается доказать, что в первом приближении имеют место локально оптимальные управления, а для решения задачи требуется проинтегрировать уравнения (1.1) с известными разрывными правыми частями. Обоснование метода усреднения для таких систем может быть проведено на основе работы [12], где рассмотрена стандартная система [1].

При  $\omega(a) \geq \omega_0 > 0$  и достаточно малом  $\varepsilon$  между  $\psi$  и  $t$  устанавливается взаимно-однозначное соответствие, поэтому делением на  $\psi' = \omega(a) + O(\varepsilon)$  система сводится к стандартной вида  $x' = \varepsilon X(t, x) + O(\varepsilon^2)$ , для которой справедливо утверждение [12].

Пусть функция  $X(t, x)$  равномерно ограничена, а

$$\int_{t_0}^t dt' \int_c^x X(t', x') dx', \quad t \in [t_0, \infty), \quad x, c \in D$$

непрерывно дифференцируема; имеют место равномерные пределы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X(t, x) dt = X_0(X), \quad x \in D$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [Z(t, x_1, \dots, x_i + r_k, \dots, x_n) - Z(t, x)] r_k^{-1} dt = 0,$$

$$Z(t, x) \equiv X(t, x) - X_0(x)$$

Здесь  $x + r_k \in D$ ,  $r_k$  — убывающая последовательность чисел. При этом предполагается, что  $X_0(x)$  удовлетворяет условию Липшица для  $x \in D$ , решение  $\xi(\tau)$  уравнения  $d\xi/d\tau = X_0(\xi)$  лежит [в  $D$  для  $\tau \in [0, \infty)$  вместе со своей  $\rho$ -окрестностью, а решение  $x(t, \varepsilon)$  исходной системы, удовлетворяющее условию  $x(t_0, \varepsilon) = \xi(0)$ , единственно. Тогда для любого  $\eta > 0$  и сколь угодно большого  $L$  существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  для решения  $x(t, \varepsilon)$  имеет место неравенство  $|x(t, \varepsilon) - \xi(\tau)| < \eta$  для  $t \in [t_0, L\varepsilon^{-1}]$ .

Эта теорема, как и аналогичная в случае гладких правых частей [1], не гарантирует оценки  $|x - \xi| \sim \varepsilon$ . Если сформулированные выше условия дополнить требованиями: функция  $\int Z(t, x) dt$  имеет непрерывные производные по  $x \in D$ , функция  $N$  — среднее значение функции  $Z$  по  $t$  на интервале  $[t_0, t_0 + T]$  при  $T \rightarrow \infty$  убывает достаточно быстро, т. е. существуют такие постоянные  $T_0 > 0$ ,  $d_0 > 0$ , что при  $T > T_0$  равномерно в рассматриваемой области выполняется неравенство  $|N| \leq d_0 T^{-1}$ . Тогда справедлива более точная оценка:  $|x - \xi| \leq d\varepsilon$  для  $t \in [t_0, L\varepsilon^{-1}]$ , где  $0 < d < \infty$ .

Отметим, что к системе (1.1), (1.6) можно применить общую схему построения более высоких приближений по степеням  $\varepsilon$  [1], в частности, методику канонического усреднения [6].

**3. Примеры.** 1. Рассматривается вращательная система с одной степенью свободы, близкая к консервативной

$$(3.1) \quad \begin{aligned} m(x) x'' + \frac{1}{2} m' x'^2 + V'(x) &= \varepsilon u + \varepsilon f(x, x') \\ \infty > x_2' > x' > x_1' > 0, \quad \infty > m_2 > m > m_1 > 0 \\ \infty > V_2 > V > V_1 > -\infty \end{aligned}$$

Здесь  $x$  — обобщенная координата,  $x' = dx/dt$  — скорость вращения, «масса»  $m(x)$ , «потенциал»  $V(x)$  и возмущающая функция  $f$  —  $2\pi$ -периодические функции  $x$ ;  $u$  — скалярное управление. Предполагается также, что  $m$ ,  $V$  и  $f$  — достаточно гладкие функции; начальные условия заданы:  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = x_0' > 0$ .

При  $\varepsilon = 0$  уравнение (3.1) интегрируется

$$a = \frac{1}{2} m x'^2 + V, \quad t + \gamma = \int dx / x'(a, x)$$

Здесь  $a$  — полная энергия,  $\gamma$  — фазовая постоянная. При помощи замены  $(x, x') \rightarrow (a, \psi)$  система (3.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} a' &= \varepsilon x' (u + f), \quad x'(a, x) = (2/m)^{1/2} (a - V)^{1/2}, \quad a(0) = a_0 \\ \psi' &= \omega(a) + O(\varepsilon), \quad \omega(a) = 2\pi / \oint dx / x', \quad \psi(0) = \psi_0 \end{aligned}$$

Так как общее невозмущенное решение известно лишь неявно, то усреднение в первом приближении может быть проведено при помощи соотношения  $d\psi = \omega(a) dx / x'$ .

Пусть рассматривается задача:  $|u| \leq u_0$ ,  $M = a - a_1$  ( $a_1 > V_2$ ),  $g = \varepsilon t$ . Тогда если среднее внешних сил  $\varepsilon f$  за оборот равно нулю:  $\langle f(\xi) \rangle \equiv 0$ , то приближенное решение единственно

$$u^* = u_0 \operatorname{sign}(a_1 - a_0), \quad u_0 \tau \operatorname{sign}(a_1 - a_0) = \int_{a_0}^{\xi} \frac{d\xi'}{\omega(\xi')}$$

$$\omega(\xi) = \langle x'(\xi) \rangle, \quad \tau_1 = \tau(a_1, a_0), \quad \tau = \varepsilon t$$

В частности, если  $\dot{\psi} = \text{const}$ , то

$$\xi^{1/2} = a_0^{1/2} + (a_1^{1/2} - a_0^{1/2}) \tau \tau_1^{-1}, \quad \tau_1 = |a_1^{1/2} - a_0^{1/2}| u_0^{*-1}$$

Если же  $\langle f(\xi) \rangle \neq 0$ , то решение определяется уравнением для  $\xi$  с начальными и краевыми условиями

$$d\xi/d\tau = u_0 \omega(\xi) \operatorname{sign}(a_1 - a_0) + \langle f(\xi) \rangle, \quad \xi(0) = a_0, \quad \xi(\tau_1) = a_1$$

Эта задача не всегда имеет решение, т. е.  $\tau_1 > 0$ .

Для иллюстрации развитой в п. 2 методики приводится анализ примера «гладкой» системы, когда  $m(x) \equiv 1$ ,  $V = \text{const}$ , конечное условие (1.2) состоит в том, чтобы  $x^*(\tau_1) = v_1(x^*, v_1 > 0)$ , а функционал взят в виде:  $J = b(\tau_1)$ , где  $db/d\tau = k + u^2$ ,  $b(0) = 0$ ,  $k > 0$ . В такой постановке  $x$  — фаза,  $x^*$  — медленная переменная. Согласно п. 1  $u^* = 1/2p$ , где  $p$  — сопряженная  $x^*$  переменная. Решение краевой задачи типа (2.11) равно

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \xi(\tau, \tau_1, \kappa) &= (\kappa/4)(\tau - \tau_1)^2 - (\tau - \tau_1)\tau_1^{-1}(\Delta v + \kappa\tau_1^2/4) + v_1 \\ \eta(\tau, \tau_1, \kappa) &= -\kappa(\tau - \tau_1) - 2\tau_1^{-1}(\Delta v + \kappa\tau_1^2/4), \quad \Delta v \equiv v_0 - v_1 \end{aligned}$$

На основе (3.2)

$$J_0(\tau_1, \kappa) = 2k\tau_1 - \kappa^2\tau_1^3/24 - \kappa\tau_1\Delta v/2 - \kappa v_1\tau_1$$

Теперь должен быть найден минимум  $J_0$  по  $\kappa$  с учетом условия типа (2.12):  $(v_1\kappa - k)\tau_1^2 + (\Delta v + \kappa\tau_1^2/4)^2 = 0$ . Как и следовало ожидать, неявная производная  $J_0$  в точке  $\kappa = 0$  равна нулю, так как

$$\begin{aligned} \frac{dJ_0}{d\kappa} \Big|_{\kappa=0} &= 2k \frac{d\tau_1}{d\kappa} \Big|_{\kappa=0} - \tau_1(0) \frac{\Delta v}{2} - v_1\tau_1(0), \\ \frac{d\tau_1}{d\kappa} \Big|_{\kappa=0} &= \frac{\tau_1(0)}{2k} \left( v_1 + \frac{\Delta v}{2} \right) \end{aligned}$$

Вторая производная (см. (2.15)) положительна

$$\frac{d^2J_0}{d\kappa^2} \Big|_{\kappa=0} = \frac{\tau_1^3(0)}{24} + \frac{\tau_1(0)}{2k} \left( v_1 + \frac{\Delta v}{2} \right)^2 > 0$$

Приближенное решение задачи оптимального управления имеет следующий простой вид:

$$u^* = -\Delta v \tau_1^{-1}(0), \quad J_0^* = 2k^{1/2} |\Delta v|, \quad \tau_1(0) = |\Delta v| k^{-1/2}, \quad \xi = v_0 - \Delta v \tau_1^{-1}(0) \tau$$

2. Рассматривается управляемое плоское движение точки в гравитационном поле [8,10]. В безразмерных переменных времени  $t$  и полярных координатах  $(r, \varphi)$  уравнения движения имеют вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} r^* &= v_r, \quad v_r^* = v_\varphi^2 r^{-1} - r^{-2} + \varepsilon u_r, \quad r(0) = r_0, \quad v_r(0) = v_{r0} \\ \varphi^* &= v_\varphi r^{-1}, \quad v_\varphi^* = -v_r v_\varphi r^{-1} + \varepsilon u_\varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad v_\varphi(0) = v_{\varphi 0} \end{aligned}$$

В (3.3)  $u_r, u_\varphi$  — управляющие функции,  $\varepsilon$  — малый параметр. При  $\varepsilon = 0$  система интегрируется

$$(3.4) \quad \begin{aligned} 1/2(v_r^2 + v_\varphi^2) - r^{-1} &= E, \quad r v_\varphi = K, \quad r = p(1 + e \cos x)^{-1} \\ r &= 1/2 |E|^{-1} (1 - e \cos \xi), \quad t + \delta = (2 |E|)^{-3/2} (\xi - e \sin \xi) \end{aligned}$$

Здесь  $E < 0$  — энергия,  $K > 0$  — кинетический момент,  $p = K^2$  — фокальный параметр,  $0 < e = (1 + 2EK^2)^{1/2} < 1$  — эксцентриситет орбиты,  $x = \varphi - \gamma$ ;  $\gamma, \delta$  — произвольные постоянные. Движение точки ограниченное, периодическое с периодом  $T$ , зависящим только от энергии:  $T(E) = 2\pi (2 |E|)^{-3/2}$ ; угловая переменная  $\varphi$  за период получает приращение  $2\pi$ , так как

$$(3.5) \quad x = \psi - \int_0^x \left[ \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos y)^2} - 1 \right] dy, \quad \psi = \frac{2\pi}{T} (t + \delta)$$

Приведенные формулы (3.4), (3.5) позволяют перейти при  $\varepsilon \neq 0$  к системе типа (1.1)

$$(3.6) \quad \begin{aligned} E^* &= \varepsilon(v_r u_r + v_\varphi u_\varphi), \quad K^* = \varepsilon r u_\varphi \\ \gamma^* &= \varepsilon e^{-1} p^{1/2} [u_r \cos x + (2 + e \cos x)(1 + e \cos x)^{-1} u_\varphi \sin x] \\ \psi^* &= 2\pi T^{-1} - (1 - e^2)^{3/2} (1 + e \cos x)^{-2} \gamma^* + \{(1 + e)(1 + \\ &+ e \cos x)^{-1} \sin x \partial [(1 - e)^{1/2} (1 + e)^{-1/2}] / \partial e - \partial [e(1 - e^2)^{1/2} (1 + \\ &+ e \cos x)^{-1}] / \partial e \sin x\} e^* \end{aligned}$$

Начальные данные в (3.6) вычисляются при помощи формул (3.3) — (3.5), а

$$\begin{aligned} e^{\cdot} &= \varepsilon p^{1/2} \{u_r \sin x + u_\varphi [e(1 + \cos^2 x) + 2 \cos x] (1 + e \cos x)^{-1}\} \\ p^{\cdot} &= 2\varepsilon p^{3/2} u_\varphi (1 + e \cos x)^{-1} \end{aligned}$$

Для (3.6) ставится следующая задача оптимального управления:

$$(3.7) \quad E(t_1) = E_1 \leq 0, \quad J = l\tau_1 + \int_0^{\tau_1} u^2 d\tau$$

$$(l > 0, \quad u^2 = u_r^2 + u_\varphi^2)$$

Построение краевой задачи проводится на основе п. 1. Угловая переменная фактически не входит в правую часть системы, поэтому сопряженная ей переменная  $p_\gamma$  тождественно равна нулю, так как  $p_\gamma^{\cdot} = -\partial H / \partial \gamma = 0$ ,  $p_\gamma(t_1) = 0$ . Далее, на основе оценки  $p_\psi = O(\varepsilon)$  для  $t_1 \sim \varepsilon^{-1}$  следует, что в первом приближении

$$(3.8) \quad u_r^* = 1/2 p_E v_r, \quad u_\varphi^* = 1/2 (p_E v_\varphi + p_K r)$$

Здесь  $p_\psi$ ,  $p_E$ ,  $p_K$  — соответствующие сопряженные переменные. Усреднение системы (3.6) аналогично примеру 1 проводится при помощи соотношения  $d\psi = 2\pi T^{-1} p^{3/2} (1 + e \cos x)^{-2} dx$ . Из усредненной системы следует, что  $p_K \equiv 0$ , так как

$$\frac{dp_K}{d\tau} = - \left( \frac{p_K}{4} \frac{\partial \langle r^2 \rangle}{\partial K} + p_E \frac{\partial \langle v_\varphi r \rangle}{\partial K} \right) p_K, \quad p_K(\tau_1) = 0$$

Здесь и далее для усредненных переменных используются старые обозначения. В результате строится явное решение краевой задачи и находятся выражения для управлений (3.8)

$$(3.9) \quad E(\tau) = E_0 \left( 1 + \frac{\rho\tau}{2 - \rho\tau_1} \right), \quad p_E(\tau) = \frac{-2\rho}{2 - (\tau_1 - \tau)\rho}$$

$$K(\tau) = K_0 (1 - 1/2\rho\tau_1) [1 - 1/2\rho(\tau_1 - \tau)]^{-1}, \quad \tau_1 = \sqrt{2} \| |E_1|^{1/2} - |E_0|^{1/2} \| l^{-1/2}$$

$$\rho = (2l / |E_1|)^{1/2} \text{sign} [1 - (E_0 / E_1)^{1/2}], \quad u_r^* = 1/2 p_E(\tau) v_r, \quad u_\varphi^* = 1/2 p_E(\tau) v_\varphi$$

Здесь скорости  $v_r$  и  $v_\varphi$  могут быть выражены через  $\varphi$  и  $\gamma$ , причем  $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$ , так как из (3.6) следует, что среднее значение  $\gamma^{\cdot}$  равно нулю; поэтому

$$v_r = \varepsilon p^{-1} K \sin(\varphi - \gamma_0), \quad v_\varphi = p^{-1} K [1 + e \cos(\varphi - \gamma_0)]$$

Усредненные медленные переменные  $e$ ,  $p$  выражаются через  $E(\tau)$  и  $K(\tau)$  согласно (3.9). Если эксцентриситет  $e$  «мал», то радиальная составляющая управления  $u_r^* \sim e$  также мала, а трансверсальная  $u_\varphi^* \sim 1$  является медленно изменяющейся функцией, на которую налагаются малые вибрации, амплитуда которых  $\sim e$ .

3. Развитая методика может быть применена для решения некоторых задач оптимального управления вращениями твердого тела относительно центра масс [10] (случай Эйлера). Движение рассматривается в связанной с главными центральными осями инерции системе координат, а управление осуществляется малыми моментами  $\varepsilon M_x$ ,  $\varepsilon M_y$ ,  $\varepsilon M_z$ . Пусть тело динамически симметрично относительно оси  $z$ , т. е. моменты инерции удовлетворяют условиям  $I_x = I_y \neq I_z$ . Тогда уравнения движения имеют вид

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \omega_x^{\cdot} + (d-1)\omega_y\omega_z &= \varepsilon u_x, & u_x &= M_x I_x^{-1}, & \omega_x(0) &= \omega_{x0} \\ \omega_y^{\cdot} + (1-d)\omega_x\omega_z &= \varepsilon u_y, & u_y &= M_y I_y^{-1}, & \omega_y(0) &= \omega_{y0} \\ \omega_z^{\cdot} &= \varepsilon u_z, & d &= I_z I_x^{-1} \neq 1, & u_z &= M_z I_z^{-1}, & \omega_z(0) &= \omega_{z0} \end{aligned}$$

Заменой

$$\omega_x = a \cos \psi, \quad \omega_y = a \sin \psi, \quad \omega_z = c \quad (a > 0, c \neq 0)$$

система (3.10) приводится к стандартному виду (1.1)

$$\begin{aligned} a^{\cdot} &= \varepsilon (u_x \cos \psi + u_y \sin \psi), & c^{\cdot} &= \varepsilon u_z, & a(0) &= a_0 = (\omega_{x0}^2 + \omega_{y0}^2)^{1/2} \\ \psi^{\cdot} &= (d-1)c + \varepsilon a^{-1} (u_y \cos \psi - u_x \sin \psi), & c(0) &= c_0 = \omega_{z0}, & \psi(0) &= \psi_0 \end{aligned}$$

Пусть требуется за минимальное время  $t_1$  затормозить до нуля скорость вращения вокруг осей  $x$  и  $y$ , а величина  $\omega_z \neq 0$  при этом может быть произвольной, и пусть управления ограничены эллипсоидом:  $u_x^2 l_x^{-2} + u_y^2 l_y^{-2} + u_z^2 l_z^{-2} \leq 1$ , где  $l_x, l_y, l_z$  — постоянные. Тогда приближенный синтез управления находится в явном виде

$$u_x = -l_x \omega_x r^{-1}, \quad u_y = -l_y \omega_y r^{-1}, \quad u_z \equiv 0; \quad r = (l_x^2 \omega_x^2 + l_y^2 \omega_y^2)^{1/2}$$

Явно находятся также решение уравнений и минимальное время

$$a = a_0 - \langle R \rangle \tau, \quad c = c_0, \quad \tau_1 = a_0 \langle R \rangle^{-1}$$

$$\langle R \rangle = 2 \frac{l_x}{\pi} \begin{cases} E(\sqrt{k}), & 0 \leq k < 1, \quad k = 1 - l_y^2 l_x^{-2} \\ \sqrt{1-k} E(\sqrt{k/(k-1)}), & 0 > k > -\infty \end{cases}$$

Здесь  $E$  — полный эллиптический интеграл второго рода. Такое же решение имеет эта задача, если тело лишь близко к динамически симметричному, так как среднее от малых добавок к гироскопическим членам равно нулю.

Пусть множество управлений теперь ограничено цилиндрической областью:  $u_x^2 + u_y^2 \leq l^2, |u_z| \leq h$ . Такая схема управлений создается парой фиксированных двигателей, вырабатывающих ограниченный момент относительно оси симметрии  $z$  и пары находящихся на оси  $z$  верньерных двигателей, создающих ограниченные окружностью моменты сил относительно осей  $x$  и  $y$ . Пусть далее краевые условия имеют вид:  $a(t_1) = a_1, c(t_1) = c_1 = \omega_{z1}$ . Таким образом поставленная задача приводит к особым управлениям  $u_x = \cos \psi \operatorname{sign} p, u_y = \sin \psi \operatorname{sign} p, u_z = \operatorname{sign} q$ .

Здесь  $\operatorname{sign} p$  и  $\operatorname{sign} q$  — кусочно-постоянные функции  $\tau$ , имеющие конечное число разрывов и такие, что

$$\int_0^{\tau_1} \operatorname{sign} p \, d\tau = \frac{a_1 - a_0}{l}, \quad \int_0^{\tau_1} \operatorname{sign} q \, d\tau = \frac{\omega_{z1} - \omega_{z0}}{h}$$

$$\tau_1 = \max \{ |a_1 - a_0| l^{-1}, |\omega_{z1} - \omega_{z0}| h^{-1} \}$$

Аналогично изложенному могут быть решены некоторые другие задачи управления вращениями несимметричного твердого тела при помощи малых управляющих моментов с учетом возмущающих сил различной природы (гироскопических, гравитационных, вязкого трения и др.).

Поступила 9 VI 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
2. Акуленко Л. Д., Черноусько Ф. П. Метод осреднения в задачах оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 4.
3. Понтрягин П. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
5. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
6. Акуленко Л. Д. Асимптотическое решение некоторых задач типа оптимального быстрогодействия. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
7. Powers W. F., Tapley V. D. Canonical transformation applications to optimal trajectory analysis. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 3.
8. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М., «Наука», 1975.
9. Jacobson R. A., Powers W. F. Asymptotic solution to the problem of optimal low-thrust energy increase. AIAA Journal, 1972, vol. 10, No. 12.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 1. Механика. М., «Наука», 1965.
11. Акуленко Л. Д., Роцин Ю. Р. Оптимальное управление движением системы «типа маятника» перемещением точки подвеса. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1.
12. Самойленко А. М. Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В сб.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, вып. 1. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.