Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 534.01

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

В. Т. Грумондз

(Москва)

Решается задача о существовании и устойчивости стационарных колебаний механической системы произвольного конечного порядка, правые части уравнений которой представляют собой ряды, расположенные по степеням некоторого, вообще говоря, не обязательно малого параметра. При обращении параметра в нуль система становится линейной, имеющей в характеристическом уравнении пару чисто мнимых корней при остальных корнях с отрицательными вещественными частями. Одним из методов исследования колебаний в системах такого вида является метод Г. В. Каменкова, обладающий рядом существенных положительных особенностей. В работе [1] этот метод развит в основном для систем второго порядка; для систем произвольного порядка указан [1] способ построения периодических решений в виде рядов по степеням параметра.

Ниже предлагается иной способ исследования нелинейных систем произвольного порядка, опирающийся на работу [1] и являющийся развитием метода Г. В. Каменкова. Получены достаточные условия стационарности и устойчивости колебаний относительно области, сформулирована теорема, позволяющая оценить размеры этой области, а также предельное значение μ_0 параметра μ, такое, что при всех $\mu < \mu_0$ свойства стационарности и устойчивости сохраняются.

Рассмотрен пример.

1. Рассмотрим механическую систему, поведение которой описывается следующей автономной системой дифференциальных уравнений (n — любое натуральное число, μ — положительный параметр):

$$\begin{gathered}\dot{x} = -\lambda y + \mu X_1 + \mu^2 X_2 + \ldots, \quad \dot{y} = \lambda x + \mu Y_1 + \mu^2 Y_2 + \ldots \\ \dot{x}_j = \sum_{k=1}^{n} p_{jk} x_k + \mu X_{j1} + \mu^2 X_{j2} + \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, n\end{gathered} \tag{1.1}$$

Сделаем относительно (1.1) следующие предположения.

1°. Правые части (1.1) представляют собой абсолютно сходящиеся ряды в исследуемой области изменения переменных x, y, x_j и параметра μ.

2°. X_l, Y_l, X_{jl} ($j = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots$) — суммы форм относительно переменных x, y, $x_1, \ldots, x_n$ любого конечного порядка ν_{xl}, ν_{yl}, ν_{jl} с постоянными коэффициентами $a_*^{(l)}$, $b_*^{(l)}$, $c_*^{(l)}$ соответственно, так что

$$X_l(x, y, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{k_x+k_y+k_1+\ldots+k_n = m_{xl} \\ k_x+k_y \geqslant 1}}^{\nu_{xl}} a_*^{(l)} x^{k_x} y^{k_y} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

и т. д., причем низшие степени форм m_{xl}, m_{yl}, $m_{jl} \geqslant 1$; символ $*$ означает набор индексов (k_x, k_y, $k_1, \ldots, k_n$).

3°. Корни характеристического многочлена $D(\varkappa) = |p_{ij} - \delta_{ij}\varkappa|$ присоединенной системы, т. е. системы, состоящей из уравнений системы (1.1) за исключением первых двух, удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\varkappa_j < 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) и имеют вид $\varkappa_k = g_k + ih_k$, $\varkappa_{k+\alpha} = g_k - ih_k$, $\varkappa_s = d_s$; $g_k < 0, d_s < 0, k = 1, 2, \ldots, \alpha; s = 2\alpha + 1, \ldots, n$, причем все $\varkappa_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) различны. (Если система $(n + 2)$-го порядка, имеющая пару чисто мнимых корней и n корней с отрицательными вещественными частями, задана в общем виде, то будем считать, что приведение к виду (1.1), которое осуществляется с помощью линейных преобразований известным способом [2], уже сделано.)

4°. Правые части критической системы, т. е. системы, состоящей из первых двух уравнений системы (1.1), обращаются в нуль при $x = y = 0$.

Заметим, что если (1.1) не удовлетворяет последнему условию, то во всяком случае при дополнительном предположении $m_{xl}, m_{yl}, m_{jl} \geqslant 2$ ее можно привести к требуемому виду с помощью соответствующего преобразования [2], которое возможно на основании теоремы § 30 [2] в силу выполнения условия 3°.

Преобразуем, воспользовавшись [3], систему (1.1) так, чтобы присоединенная система при $\mu = 0$ имела канонический вид $w_j^{\cdot} = \varkappa_j w_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), и перейдем в преобразованной системе к действительным переменным $z_1, \ldots, z_n$. В результате переменные $x_1, \ldots, x_n$ и $z_1, \ldots, z_n$ окажутся связанными следующими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
(1.3)\qquad x_j = -2\sum_{k=1}^{\alpha}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{H_j(g_k + ih_k)}{D'(g_k + ih_k)}\right]z_k - \operatorname{Im}\left[\frac{H_j(g_k + ih_k)}{D'(g_k + ih_k)}\right]z_{k+\alpha}\right\} - \\
- \sum_{s=2\alpha+1}^{n}\frac{H_j(d_s)}{D'(d_s)}z_s, \quad D'(\varkappa) = \frac{dD(\varkappa)}{d\varkappa}
\end{aligned}
$$

причем $D'(\varkappa_j) \neq 0$ в силу предположения 3°. Многочлены $H_j(\varkappa)$ строятся с помощью определителя $D(\varkappa)$ известным образом [3].

Введем полярные координаты с помощью замены $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, а затем — новую переменную ρ в виде

$$
(1.4)\qquad r = \rho + \mu\sum_{q=1}^{m_1}\rho^q u_1^{(q)}(\theta), \quad m_1 = \max\{\nu_{x1}, \nu_{y1}\}
$$

где $u_1^{(1)}(\theta), \ldots, u_1^{(m_1)}(\theta)$ — периодические функции θ периода 2π, которые будут определены ниже. Будем считать в дальнейшем, что параметр μ достаточно мал для того, чтобы функция ρ, определяемая из уравнения (1.4) через r и θ, была определенно-положительной относительно r при любых $r > 0$ и всех θ, принадлежащих области исследования, и чтобы во всей области исследования выполнялись неравенства

$$
(1.5)\qquad r > 0, \; H = dr(\rho, \theta)/d\rho > 0
$$

Определим функции $u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(m_1)}$ и постоянные $g_1^{(1)}, \ldots, g_1^{(m_1)}$ следующим образом:

$$u_1^{(1)} = \ldots = u_1^{(m-1)} \equiv 0, \quad m = \min_{l=1,2,\ldots} \{m_{xl}, m_{yl}\}$$

$$u_1^{(q)}(\theta) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\theta [R_1^{(1,q)}(\psi) - g_1^{(q)}]\, d\psi, \quad q = m, \ldots, m_1$$

$$g_1^{(1)} = \ldots = g_1^{(m-1)} = 0, \quad g_1^{(q)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_1^{(1,q)}(\psi)\, d\psi$$

$$R_1^{(1)}(\rho, \theta) = \sum_{q=m}^{m_1} \rho^q R_1^{(1,q)}(\theta)$$

$$R_1(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\substack{k_x+k_y+k_1+\ldots+k_n=m \\ k_x+k_y\geqslant 1}} \rho^{k_x+k_y}(A_*^{(l)} \cos\theta + B_*^{(l)} \sin\theta) \cos^{k_x}\theta \sin^{k_y}\theta z_1^{k_1}, \ldots, z_n^{k_n}$$

Здесь $R_1^{(1)}(\rho, \theta)$ — та часть функции $R_1(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n)$, которая не зависит от $z_1, \ldots, z_n$; $A_*^{(l)}$, $B_*^{(l)}$ — постоянные коэффициенты, являющиеся результататом проделанных преобразований. Тогда система (1.1) примет вид

$$\begin{aligned}
\rho^\cdot H &= \mu L_1(\rho) + \mu P_1(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n) + \mu^2 P_2(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n, \mu) \\
\theta^\cdot &= \lambda + \mu F_1(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n) + \mu^2 F_2(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n, \mu) \\
z_k^\cdot &= g_k z_k - h_k z_{k+\alpha} + \mu Z_{k1} + \mu^2 Z_{k2} + \ldots \\
z_{k+\alpha}^\cdot &= h_k z_k + g_k z_{k+\alpha} + \mu Z_{k+\alpha,1} + \mu^2 Z_{k+\alpha,2} + \ldots \\
z_s^\cdot &= d_s z_s + \mu Z_{s1} + \mu^2 Z_{s2} + \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \alpha; \quad s = 2\alpha + 1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Выражение $L_1(\rho)$ в силу выбора функций $u_1^{(q)}(\theta)$ и постоянных $g_1^{(q)}$ — многочлен с постоянными коэффициентами

$$L_1(\rho) = \sum_{q=m}^{m_1} g_1^{(q)} \rho^q \tag{1.7}$$

Второе слагаемое в правой части первого уравнения (1.6)

$$\mu P_1 = \mu \sum_{k_x+k_y=0}^{m_1-1} \rho^{k_x+k_y} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=1}^{m_1-k_x-k_y} (A_*^{(1)} \cos\theta + B_*^{(1)} \sin\theta) \times \cos^{k_x}\theta \sin^{k_y}\theta z_1^{k_1}, \ldots, z_n^{k_n}$$

Таким образом, правые части (1.6) — абсолютно сходящиеся ряды по степеням параметра μ, коэффициенты которых — формы конечных порядков относительно $z_1, \ldots, z_n$ и ρ с переменными по θ коэффициентами общего периода 2π.

2. Наличие некритических переменных $z_1, \ldots, z_n$ в (1.6) существенно усложняет задачу по сравнению с той, которая решена в [1] для систем второго порядка. Для исследования системы (1.6), в отличие от [1], поступим следующим образом: будем одновременно отыскивать некоторое предельное значение μ^* параметра μ и некоторые ограничения на область

начальных значений переменных $z_1, \ldots, z_n$, ρ, такие, что если $0 < \mu \leqslant \mu^*$, а изображающая точка $M(t)$ принадлежит при $t = t_0$ этой области, то и при всех $t > t_0$ она также остается в этой области, а колебания системы стационарны в смысле [1].

Предположим, что многочлен $L_1(\rho)$ имеет положительные корни $\rho_1, \ldots, \rho_\gamma$ $(\gamma \leqslant m_1 - m)$ и пусть некоторый корень ρ_j из их числа имеет нечетную кратность s. Обозначим $L_1^{(s)}(\rho_j) = (d^{(s)}L_1(\rho) \,/\, d\rho^s)_{\rho=\rho_j}$. Выберем любые положительные числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \varepsilon_1 < \rho_{j+1} - \rho_j, \quad 0 < \varepsilon_2 < \rho_j - \rho_{j-1} \tag{2.1}$$

Определим в пространстве координат $\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n$ множества (A_0 — некоторое положительное число)

$$N_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, A_0) = G_0 \cap K_{01} \cap K_{02}$$
$$\Gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, A_0) = G' \cup K_1' \cup K_2'$$
$$N(\varepsilon_1, \varepsilon_2, A_0) = G \cap K_1 \cap K_2$$

Здесь

$$G_0 : |z|^2 < A_0^2, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad \rho > 0$$
$$K_{01} : z_k \text{ — любые}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad 0 < \rho < \rho_\alpha$$
$$K_{02} : z_k \text{ — любые}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad \rho_\beta < \rho$$
$$G' : |z|^2 = A_0^2, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad \rho_\beta \leqslant \rho \leqslant \rho_\alpha$$
$$K_1' : |z|^2 \leqslant A_0^2, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad \rho = \rho_\alpha$$
$$K_2' : |z|^2 \leqslant A_0^2, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad \rho = \rho_\beta$$
$$G : |z|^2 \leqslant A_0^2, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad \rho > 0$$
$$K_1 : z_k \text{ — любые}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad 0 < \rho \leqslant \rho_\alpha$$
$$K_2 : z_k \text{ — любые}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad \rho_\beta \leqslant \rho$$
$$\rho_\alpha = \rho_j + \varepsilon_1, \quad \rho_\beta = \rho_j - \varepsilon_2, \quad |z|^2 = z_1^2 + \ldots + z_n^2$$

В случае $n = 1$ область N представляет собой отрезок кольцевого цилиндра в трехмерном пространстве.

Рассмотрим функции Ляпунова $V_1 = \rho$, $V_2 = {}^1/_2 \, |z|^2$, определенно-положительные по части переменных.

Лемма 1. $N = N_0 \cup \Gamma$, причем Γ — вся граница области N_0.

Доказательство леммы очевидно.

Лемма 2. Пусть для системы дифференциальных уравнений вида

$$\rho^\cdot = F(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n), \quad \theta^\cdot = \Phi(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n) \tag{2.2}$$
$$z_k^\cdot = Z_k(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n), \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

где функции F, Φ, Z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны вместе со своими частными производными, выполняются условия $V_2^\cdot < 0$ для всех $(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n) \in G'$, $V_1^\cdot < 0$ для всех $(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n) \in K_1'$, $V_1^\cdot > 0$ для всех $(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n) \in K_2'$, где $V_1^\cdot$, $V_2^\cdot$ — производные функций V_1, V_2 в силу системы (2.2). Тогда всякая изображающая точка $M(t)$ с координатами $(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n)$, удовлетворяющая условию $M(t_0) \in N$ при $t = t_0$, удовлетворяет условию $M(t) \in N_0$ при всех $t > t_0$.

Доказательство. Доказательство леммы разобьем на доказательства следующих утверждений: А) если $M(t_0) \in N_0$, то $M(t) \in N_0$ при всех $t > t_0$; Б) если $M(t_0) \in \Gamma$, то $M(t) \in N_0$ при всех $t > t_0$. Докажем утверждение А. Допустим противное: существует $T > t_0$, такое, что $M(T) \in \Gamma$, причем в момент $t = T$ происходит первое с момента $t = t_0$ попадание точки $M(t)$ на Г. Согласно лемме 1, Г — вся граница области N_0, поэтому возможны лишь следующие случаи:

$$1)\ M(T) \in G',\quad 2)\ M(T) \in K_1',\quad 3)\ M(T) \in K_2'$$

Рассмотрим первую возможность. Из непрерывности $V_2^{\cdot}$ следует, что существует $t^* \in [t_0, T)$, такое, что для всех $M(t)$, где $t \in [t^*, T]$, выполняется $V_2^{\cdot} < 0$. Для $V_2(t)$ вдоль траектории изображающей точки $M(t)$ имеем

$$V_2(t) = V_2(t^*) + \int_{t^*}^{t} V_2^{\cdot} dt \tag{2.3}$$

В силу сделанных предположений $V_2(t^*) < {}^1/_2 A_0^2$, $V_2(T) = {}^1/_2 A_0^2$, а в силу выбора t^* производная $V_2^{\cdot}(t) < 0$ для всех $t \in [t^*, T]$, что противоречит равенству (2.3), в котором положено $t = T$. Аналогичными рассуждениями доказываются утверждения в случаях 2 и 3, а также утверждение Б. Заметим только, что при доказательстве последнего необходимо использовать уравнения типа (2.3) одновременно для V_1 и V_2.

Теорема 1. Пусть ρ_j — положительный корень нечетной кратности s многочлена $L_1(\rho)$ и пусть $L_1^{(s)}(\rho_j) < 0$. Тогда существуют такие μ^*, A_0^* и такие ε_1^*, ε_2^*, удовлетворяющие условиям (2.1), что для всех $\mu < \mu^*$ и для всех $t \in (t_0, \infty)$ изображающая точка $M(t) \in N_0(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, A_0^*)$, если только $M(t_0) \in N(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, A_0^*)$.

Доказательство. Рассмотрим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &L_1(\rho_\alpha) + P_{10}(\rho_\alpha, A_0) + \mu P_{20}(\rho_\alpha, \mu, A_0) < 0 \\ &L_1(\rho_\beta) - P_{10}(\rho_\beta, A_0) - \mu P_{20}(\rho_\beta, \mu, A_0) > 0 \\ &g' A_0 + E(\rho_\alpha, \mu, A_0) < 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь

$$P_{10}(\rho, A_0) = \sum_{k_x+k_y=0}^{m_1-1} \rho^{k_x+k_y} \sum_{k_1+\ldots+k_n=1}^{m_1-k_x-k_y} ([A_*^{(1)}]^2 + [B_*^{(1)}]^2)^{1/2} A_0^{k_1+\ldots+k_n}$$

$$E(\rho_\alpha, \mu, A_0) = S \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k_x+k_y+k_1+\ldots+k_n=\eta \\ k_x+k_y\geqslant 1}}^{m_l} f^{k_x+k_y} |C_*^{(j,l)}| A_0^{k_1+\ldots+k_n}$$

$$\eta = \min_{\substack{l=1,2,\ldots \\ j=1,2,\ldots,n}} \{m_{jl}\},\quad m_l = \max\{\nu_{xl}, \nu_{yl}\}$$

$$f = \rho_\alpha + \mu(\sigma_1^{(1)}\rho_\alpha + \ldots + \sigma_1^{(m_1)}\rho_\alpha^{m_1}),\quad g' = \max_{\substack{k=1,2\ldots,\alpha \\ s=2\alpha+1,\ldots,n}} \{g_k, d_s\} < 0$$

$$S = \max_{\substack{k=1,2,\ldots,\alpha \\ j=1,2,\ldots,n \\ s=2\alpha+1,\ldots,n}} \left\{ \left| \operatorname{Re} \frac{D_{ji}(g_k + ih_k)}{H_i(g_k + ih_k)} \right|, \left| \operatorname{Im} \frac{D_{ji}(g_k + ih_k)}{H_i(g_k + ih_k)} \right|, \left| \frac{D_{ji}(d_s)}{H_i(d_s)} \right| \right\}$$

$$|P_1| \leqslant P_{10},\quad |P_2| \leqslant P_{20},\quad |u_1^{(q)}(\theta)| \leqslant \sigma_1^{(q)},\quad \left| \frac{du_1^{(q)}}{d\theta} \right| \leqslant \sigma_{10}^{(q)}$$

$$0 \leqslant \theta < 2\pi,\quad q = m, \ldots, m_1$$

P_{20} — ряд по степеням μ с коэффициентами, аналогичными выражению P_{10}; $\sigma_1^{(q)}$, $\sigma_{10}^{(q)}$ — положительные числа, ограничивающие периодические функции $|u_1^{(q)}|$, $|du_1^{(q)}/d\theta|$; D_{ji} — представляет собой алгебраическое дополнение элемента, стоящего в j-й строке и i-м столбце определителя $D(\varkappa)$, и характеризует коэффициенты преобразования, обратного к (1.3).

Без ограничения общности полагаем, что область абсолютной сходимости рядов, упомянутых в предположении 1° в п. 1, такова, что ряды в левых частях неравенств (2.4) сходятся в некоторой замкнутой ограниченной области значений переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, A_0$, содержащей точку $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = A_0 = 0$. Выберем в этой области любые ε_1^*, ε_2^*, удовлетворяющие условиям (2.1). Так как $L_1^{(s)}(\rho_j) < 0$, то $L_1(\rho_\alpha^*) < 0$, $L_1(\rho_\beta^*) > 0$, где $\rho_\alpha^* = \rho_j + \varepsilon_1^*$, $\rho_\beta^* = \rho_j - \varepsilon_2^*$. Из вида первых двух неравенств (2.4) следует, что при условии $L_1(\rho_\alpha^*) < 0$, $L_1(\rho_\beta^*) > 0$ найдутся такие числа $\mu' > 0$, $A_0^* > 0$, что для всех $\mu < \mu'$, $A_0 \leqslant A_0^*$ первые два неравенства (2.4) будут выполняться. Выберем теперь такое $\mu^* \leqslant \mu'$, чтобы при всех $\mu < \mu^*$ и при выбранном $A_0 = A_0^*$ выполнялось последнее неравенство (2.4). Очевидно, что в силу вида выражения $g'A_0 + E$ это всегда можно сделать, поскольку $g' < 0$, а $A_0 = A_0^*$ уже выбрано. Тогда для всех $\mu < \mu^*$ при $A_0 = A_0^*$ условия (2.4) будут выполняться. Однако первые два условия (2.4) обеспечивают выполнение неравенств $V_1^{\boldsymbol{\cdot}} < 0$ на K_1', $V_1^{\boldsymbol{\cdot}} > 0$ на K_2' соответственно, а последнее условие (2.4)— неравенства $V_2^{\boldsymbol{\cdot}} < 0$ на G', где V_1, V_2, K_1', K_2', G' определены выше, а производные взяты в силу (1.6), в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Отсюда, согласно лемме 2, следует теорема 1.

Таким образом, при сформулированных условиях в исследуемой системе существуют стационарные в смысле [1] колебания, отвечающие корню ρ_j; ими являются все движения, для которых изображающая точка при $t = t_0$ принадлежит N.

Теорема 2. Пусть ρ_j — положительный корень нечетной кратности s многочлена $L_1(\rho)$. Тогда если $L_1^{(s)}(\rho_j) < 0$, то при всех $\mu < \mu^*$ стационарные колебания устойчивы относительно области $N(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, A_0^*)$ и неустойчивы относительно области $N_1 = G \cap \overline{K}_{02}$; если $L_1^{(s)}(\rho_j) > 0$, то существуют положительные числа μ', A_0' и ε_1', ε_2', удовлетворяющие условиям (2.1), такие, что при всех $\mu < \mu'$ движение системы неустойчиво относительно области $N_2 = N(\varepsilon_1', \varepsilon_2', A_0')$. (Здесь через $\overline{K}_{02}$ обозначено дополнение к области K_{02}; устойчивость относительно области понимается в смысле работы [4].)

Доказательство. Устойчивость относительно области N очевидна. Для доказательства неустойчивости достаточно заменить направление изменения t вдоль траектории изображающей точки исследуемой системы на противоположное и в качестве начального положения изображающей точки исследуемой системы выбрать ту точку M_0 области N_1 без границы (соответственно N_2 без границы), в которую попадает при некотором фиксированном $\tau > t_0$ изображающая точка $M_-(t)$ системы при измененном направлении t, принадлежащая при $t = t_0$ границе N_1 (соответственно N_2). Очевидно, что, по крайней мере, изображающая точка $M(t)$, начинающая свое движение в M_0, через конечное время $\tau - t_0$ покидает область N_1 (соответственно N_2). Существование значений μ', A_0', ε_1', ε_2', обеспечивающих необходимые знаки производных на границах области N_2, следует, как и в теореме 1, из рассмотрения первых двух неравенств (2.4), в которых, однако, знаки вторых и третьих слагаемых, а также знаки самих неравенств заменены на противоположные.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть $\mu_1 = \varphi_1(\varepsilon_1)$, $\mu_2 = \varphi_2(\varepsilon_2)$ — решения при некотором $A_0^{**} > 0$ и при условиях (2.1) уравнений, получающихся из первых двух неравенств (2.4) заменой знака неравенства на знак равенства; пусть, кроме того, $\mu_{10} = \max \varphi_1(\varepsilon_1) = \varphi_1(\varepsilon_{10})$, $\mu_{20} = \max \varphi_2(\varepsilon_2) = \varphi_2(\varepsilon_{20})$, где ε_{10}, ε_{20} удовлетворяют условиям (2.1). Тогда во всяком случае величина $\mu^{**} = \min \{\mu_{10}, \mu_{20}, \sup \mu'\}$, где μ' — такие значения μ, для которых при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{10}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{20}$ выполняются условия (1.5) и последнее условие (2.4), может быть выбрана в качестве предельного значения параметра μ, соответствующего значениям A_0^{**}, ε_{10}, ε_{20}, ρ_j.

Доказательство теоремы вытекает из непосредственного рассмотрения неравенств (2.4), (1.5).

Теоремы 1, 2 устанавливают условия существования и устойчивости стационарных колебаний, теорема 3 указывает способ отыскания значения μ^{**} и параметров A_0^{**}, ε_{10}, ε_{20} области N. Очевидно, что в общем случае $\mu^{**} \leqslant \mu^*$.

Если систему (1.1) рассматривать как систему уравнений возмущенного движения, то сформулированные выше теоремы дадут решение задачи об устойчивости относительно области в критическом случае пары чисто мнимых корней характеристического уравнения, поскольку, согласно условиям 2°, 4°, многочлен $L_1(\rho)$ всегда имеет нулевой корень, а область N в этом случае содержит начало координат. Теорема 3 позволяет сделать оценку области притяжения.

Все изложенное выше, включая и теоремы 1—3, справедливо также в случае, когда в исследуемых системах функции X_l, Y_l, X_{jl} ($j = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots$) имеют в качестве коэффициентов непрерывные равномерно ограниченные при $t \in (-\infty, \infty)$, для X_1, Y_1 — периодические, для остальных X_l, Y_l, X_{jl} — не обязательно периодические функции времени, а в правых частях системы содержатся дополнительные слагаемые в виде абсолютно сходящихся при $t \in (-\infty, \infty)$ рядов

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu^{l-1} F_{l-1}(t), \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{l-1} \Phi_{l-1}(t), \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{l} \chi_{jl}(t)$$

соответственно, где $F_{l-1}(t)$, $\Phi_{l-1}(t)$, $\chi_{jl}(t)$ — также непрерывные и равномерно ограниченные функции t, $t \in (-\infty, \infty)$, причем F_0, F_1, Φ_0, Φ_1 — периодические функции от t при условии сохранения всех остальных предположений относительно исследуемых систем.

Действительно, в этом случае исследуемые системы можно преобразовать согласно [1] к такому виду, где функции, играющие роль функций $F_0(t)$, $F_1(t)$, $\Phi_0(t)$, $\Phi_1(t)$ в критической системе, обратятся в нуль, а функции, играющие роль X_1, Y_1, будут иметь лишь не зависящие от времени коэффициенты. Очевидно, что все прочее рассмотрение остается прежним, за исключением, разумеется, вида выражений, входящих в условия (2.4), на котором отразится это преобразование и присутствие дополнительных слагаемых в (1.1).

3. В качестве приложения полученных результатов исследуем характер колебаний относительно фиксированного в пространстве направления ξ некоторого твердого тела, находящегося в потоке жидкости и снабженного органами управления. Будем считать, что выталкивающая сила равна весу тела и приложена в центре тяжести, тело испытывает действие гидродинамических и управляющих сил и моментов, причем управляющие воздействия создаются установленными на теле водометными движителями или гребными винтами [5], и движется лишь в горизонтальной плоскости; в этой же плоскости расположен вектор скорости $\mathbf{v}_\infty$ набегающего потока жидкости, причем $v_\infty = \mathrm{const}$, $\varphi_v = \mathrm{const}$, $0 \leqslant \varphi_v < 2\pi$, где φ_v — угол между этим вектором скорости и направлением ξ.

Связанная с телом система координат $Axyz$ имеет начало в центре тяжести, а координатными плоскостями служат плоскости симметрии тела. Пусть m — масса тела, L — длина, S — площадь миделева сечения, I_y — момент инерции относительно вертикальной оси y, λ_{55} — присоединенный момент инерции, λ_{11}, λ_{33} — присоединенные массы, причем $\lambda_{11} = \lambda_{33}$.

Воспользуемся известными уравнениями движения тела в жидкости в горизонтальной плоскости (см., например, [5]), аппроксимируем зависимости гидродинамических сил и моментов от угла дрейфа $\beta = \varphi - \varphi_v$ (φ — угол между осью Ax и направлением ξ) полиномами Лагранжа и введем безразмерные переменные τ, v_x', v_z', φ', w_y' согласно соотношениям

$$t = \frac{\sqrt{S}}{v_\infty}\tau, \quad v_x = v_x'\frac{mv_\infty}{m+\lambda_{11}}, \quad v_z = v_z'\frac{mv_\infty}{m+\lambda_{11}}$$

$$\varphi = \frac{mS}{I_y+\lambda_{55}}\varphi', \quad \omega_y = \omega_y'\frac{mv_\infty\sqrt{S}}{I_y+\lambda_{55}}$$

Зададимся в общем случае следующей структурой безразмерных управляющих сил и моментов:

$$F_x = -c_{x0}(\varphi_v)\frac{\rho S^{3/2}}{2m} + l_{x1}v_x' + l_{x2}v_z' + \mu\,[n_{x1}v_x'^3 + n_{x2}v_z'^3]$$

$$F_z = -c_{z0}(\varphi_v)\frac{\rho S^{3/2}}{2m} + l_{z1}v_x' + l_{z2}v_z' + \mu\,[n_{z1}v_x'^3 + n_{z2}v_z'^3]$$

$$M_y = -m_{y0}(\varphi_v)\,\rho\frac{SL}{2m} + k_\varphi\varphi' + \mu\,[n_\varphi\varphi'^3 + n_\omega\omega'^3]$$

где $c_{x0}(\varphi_v)$, $c_{z0}(\varphi_v)$, $m_{y0}(\varphi_v)$ — полиномы, являющиеся функциями полиномов, аппроксимирующих гидродинамические характеристики, и заменим $\varphi' = -|k_\varphi|^{-1/2}\varphi''$. Тогда, предполагая, что

$$k_\varphi < 0, \quad l_{x1} + l_{z2} < 0, \quad (l_{z1} + l_{z2})^2 + 4(l_{x2}l_{z1} - l_{x1}l_{z2}) < 0$$

получим, как легко проверить, систему уравнений вида (1.1), которая при $\mu = 0$ содержит в характеристическом уравнении пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda$ (вследствие $k_\varphi < 0$) и два комплексно-сопряженных корня с действительной частью, равной $l_{x1} + l_{z2}$, причем

$$x = \varphi'', \quad y = \omega', \quad x_1 = v_x', \quad x_2 = v_z', \quad \lambda = |k_\varphi|^{1/2}, \quad \mu = \frac{mS}{I_y + \lambda_{55}}$$

а из совокупности коэффициентов, присутствующих в правых частях, ненулевыми являются тридцать.

Для приведения системы к каноническому виду дополнительно потребуем $l_{z1} + l_{z2} \neq l_{x1} + l_{x2}$. Корни многочлена $L_1(\rho)$ запишутся в виде

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_{2,3} = \pm\left[-\frac{2}{3}\frac{m_{y1}^2(\varphi_v)\rho\sqrt{S}L^2}{A(\varphi_v)mn_\omega}\right]^{1/2}$$

Функции $m_{y1}(\varphi_v)$, $A(\varphi_v)$ — полиномы, коэффициенты которых определяются коэффициентами аппроксимирующих полиномов. Таким образом, получаем, что если $n_\omega < 0$, а угол φ_v таков, что $A(\varphi_v) > 0$, $m_{y1}(\varphi_v) \neq 0$, то существуют при достаточно малых μ стационарные колебания, устойчивые относительно области N; положение равновесия неустойчиво. Если $n_\omega > 0$, а угол φ_v таков, что $A(\varphi_v) < 0$, $m_{y1}(\varphi_v) \neq 0$, то колебания относительно N неустойчивы; положение равновесия устойчиво относительно области.

Область N в исходных переменных определяется следующими неравенствами:

$$\frac{\varphi^2}{A_\alpha^2} + \frac{\omega^2}{B_\alpha^2} \leqslant 1, \quad \frac{\varphi^2}{A_\beta^2} + \frac{\omega^2}{B_\beta^2} \geqslant 1 \tag{3.1}$$

$$(H_{10}v_x + H_{20}v_z)^2 + (H_{11}v_x + H_{21}v_z)^2 \leqslant \left(\frac{A_0 m v_\infty}{m + \lambda_{11}}\right)^2$$

$$A_\alpha = \frac{mS}{\sqrt{|k_\varphi|(I_y + \lambda_{55})}}r_\alpha, \quad B_\alpha = \frac{mv_\infty\sqrt{S}}{I_y + \lambda_{55}}r_\alpha$$

$$H_{10} = \frac{T_2}{\Delta}, \quad H_{20} = -\frac{S_2}{\Delta}, \quad H_{11} = -H_{21} = -\frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta = \frac{1}{h_1}(l_{z1} + l_{z2} - l_{x1} - l_{x2})$$

$$T_2 = \frac{1}{h_1}(g_1 + l_{z1} - l_{x1}), \quad S_2 = \frac{1}{h_1}(g_1 + l_{x2} - l_{z2})$$

$$g_1 = {}^1/_2(l_{x1} + l_{z2}), \quad h_1 = {}^1/_2|(l_{x1} + l_{z2})^2 + 4(l_{x2}l_{z1} - l_{x1}l_{z2})|^{1/2}$$

$$r_\alpha = (\rho_2 + \varepsilon_{10})\{1 - \mu^{**}[\sigma_1^{(1)} + (\rho_2 + \varepsilon_{10})^2\sigma_1^{(3)}]\}$$

$$r_\beta = (\rho_2 - \varepsilon_{20})\{1 + \mu^{**}[\sigma_1^{(1)} + (\rho_2 - \varepsilon_{20})^2\sigma_1^{(3)}]\}$$

(A_β, B_β получаются из A_α, B_α заменой r_α на r_β).

В случае устойчивого положения равновесия второе неравенство в (3.1) нужно отбросить.

Заметим, что в рассматриваемом частном примере колебания (в случае их существования) по переменной φ будут не только стационарными, но и периодическими, что вытекает из теоремы Бендиксона [6]. Приближенное выражение для них будет следующим:

$$\varphi(t) = -\mu \frac{\rho_2}{\sqrt{|k_\varphi|}} [1 + \mu (u_1^{(1)}(\lambda\tau) + \rho_2^2 u_1^{(3)}(\lambda\tau))] \cos\lambda\tau$$

$$u_1^{(1)}(\lambda\tau) = \frac{1}{4\lambda}\left[\frac{m_{y1}(\varphi_v)\rho SL}{2m\lambda}(\cos 2\lambda\tau - 1) - \frac{m_{y1}^2(\varphi_v)\rho\sqrt{S}L^2}{2mA(\varphi_v)}\sin 2\lambda\tau\right]$$

$$u_1^{(3)}(\lambda\tau) = \frac{1}{32\lambda}\left[\frac{n_\varphi}{\lambda^3}\cos 4\lambda\tau + n_\omega \sin 4\lambda\tau + \right.$$

$$\left. + 4\frac{n_\varphi}{\lambda^3}\cos 2\lambda\tau - 8n_\omega \sin 2\lambda\tau - 5\frac{n_\varphi}{\lambda^3}\right]$$

Получение числовых результатов требует использования гидродинамических характеристик конкретного вида. В этом случае числовые расчеты позволяют выделить область Φ_{10}, значений φ_v, в которой при $n_\omega > 0$ положение равновесия $v_x = v_z = \varphi = \omega_y = 0$ устойчиво относительно N, а колебания неустойчивы, и область Φ_{20} значений φ_v, в которой при $n_\omega < 0$ положение равновесия устойчиво, а колебания неустойчивы, а также определить соответствующие этим случаям μ^{**}, A_0^{**}, ε_{10}, ε_{20} и область N. Порядки величин при расчетах, например для $\varphi_v = 50° \cdot (\varphi_v \in \Phi_{20})$, получаются следующими: $\mu^{**} \sim 10^{-4}$, $\varepsilon_{10} \sim 1$, $\varepsilon_{20} \sim 1$, $\rho_2 \sim 10$, $A_0 \sim 10^{-1}$.

Таким образом, движение тела оказывается состоящим из стационарных колебаний относительно заданного направления ξ и некоторого, вообще говоря, небольшого дрейфа в горизонтальной плоскости, причем параметры этих движений оцениваются неравенствами (3.1).

Автор благодарит участников семинара по аналитической механике и его руководителя В. В. Румянцева за обсуждение работы.

Поступила 8 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каменков Г. В.* Исследование нелинейных колебаний с помощью функций Ляпунова. Избранные тр., т. 1. М., «Наука», 1971.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1956.
3. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
4. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения в случаях, близких к критическим. Избранные тр., т. 1. М., «Наука», 1971.
5. *Пантов Е. Н., Махин Н. Н., Шереметов Б. Б.* Основы теории движения подводных аппаратов. Л., «Судостроение», 1973.
6. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Успехи матем. наук, 1941, т. 9, № 1.