Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.36

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ АВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

А. П. Маркеев, А. Г. Сокольский

(Москва)

Предлагается алгоритм построения и исследования орбитальной устойчивости периодических движений Ляпунова, близких положениям равновесия автономных гамильтоновых систем со многими степенями свободы.

1. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений Гамильтона с $N+1$ степенью свободы. Обобщенные координаты и импульсы выберем таким образом, чтобы начало координат фазового пространства было положением равновесия. Аналитическую в окрестности положения равновесия функцию Гамильтона представим в виде ряда

$$H = H_2 + \ldots + H_m + \ldots \tag{1.1}$$

где H_m — однородный полином степени m относительно координат и импульсов, коэффициенты которого зависят от параметров задачи.

Рассмотрим сначала линейную систему с гамильтонианом H_2. Определяющее уравнение представим в виде

$$D(\sigma) = |a_{jk} - \sigma\delta_{jk}| = 0 \tag{1.2}$$

где δ_{jk} ($j,\ k = 0,\ 1,\ \ldots\ N$) — символ Кронекера, a_{jk} — коэффициенты линейной системы дифференциальных уравнений.

Пусть уравнение (1.2) имеет пару чисто мнимых корней вида $\sigma_0 = \pm i\lambda_0$ и пусть среди других корней уравнения (1.2) нет равных σ_0. В этом случае координаты и импульсы q_0, q_j, p_0, p_j ($j = 1, \ldots, N$) можно выбрать так, что функция H_2 будет иметь вид

$$H_2 = {}^1/_2\, \lambda_0 (q_0^2 + p_0^2) + H_2^{(N)} \tag{1.3}$$

где $H_2^{(N)}$ — функция, зависящая только от переменных q_j, p_j. Можно проверить, что дифференциальные уравнения, соответствующие функции Гамильтона (1.3), имеют частное решение

$$\begin{aligned} q_0 &= \alpha_0 \sin(\lambda_0 t + \beta_0), \qquad p_0 = \alpha_0 \cos(\lambda_0 t + \beta_0) \\ q_j &= p_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, N) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где α_0, β_0 — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий. Решение (1.4) — периодическое с периодом $T_0 = 2\pi / |\lambda_0|$.

Если уравнение (1.2) не имеет других корней вида $\pm in_0\lambda_0$ (n_0 — целое число), то согласно теореме Ляпунова о голоморфном интеграле [1] в нелинейной системе дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона H будут существовать периодические движения, период которых близок к T_0. Периодические движения образуют семейство, параметр которого называется амплитудой (или орбитальным параметром) периодического движения ε и зависит от начальных условий. Ляпунов, кроме того, предложил процедуру построения периодических движений в виде рядов по степеням орбитального параметра ε. С тех пор эта задача получила большое развитие и к настоящему времени существует много способов построения периодических движений. В данной работе также предлагается способ построения периодических движений, основанный на методе канонических преобразований. Однако основная цель состоит в разработке алгоритма решения задачи об устойчивости периодических движений в строгом нелинейном смысле. Созданный способ построения периодических движений приспособлен для решения этой основной задачи. Данная работа является продолжением и естественным обобщением работы авторов [1].

2. По отношению к возмущениям координат и импульсов q_0, p_0 периодические движения неустойчивы по Ляпунову, так как их период зависит от начальных условий. Однако представляет интерес задача об орбитальной устойчивости периодических движений.

При решении задачи об устойчивости будем использовать подход, примененный А. Д. Брюно в работе [2].

При таком подходе значение постоянной энергии не фиксируется, а она может изменяться в некотором интервале. Тем самым не используется понижение числа степеней свободы, как это делается при изоэнергетической редукции. Это позволяет исследовать полную окрестность периодического движения, используя канонические преобразования, а в окрестности периодического движения можно ввести такие локальные координаты, что гамильтониан возмущенного движения будет иметь нормальную форму, аналогичную нормальной форме в окрестности положения равновесия. Таким образом, задача об орбитальной устойчивости периодического движения сводится к задаче об устойчивости по Ляпунову по отношению к локальным координатам.

В рассматриваемой задаче конструктивное применение локального метода схематически можно представить в виде последовательности таких операций:

1) получение исследуемого периодического движения в переменных «действие — угол»;

2) введение в окрестности периодического движения локальных координат и получение функции Гамильтона возмущенного движения;

3) переход к новой независимой переменной «угол», линейная нормализация и получение выводов об устойчивости в линейном приближении;

4) возвращение к старой независимой переменной и проведение нелинейной нормализации функции Гамильтона;

5) на основании свойств коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона получение выводов об орбитальной устойчивости периодического движения.

---

[1] *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* Исследование периодических движений, близких лагранжевым решениям ограниченной задачи трех тел. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1975, № 110.

3. Если среди корней определяющего уравнения (1.2) имеется хотя бы одна пара корней с ненулевой вещественной частью, то рассматриваемые периодические движения неустойчивы. Далее будем предполагать, что все корни уравнения (1.2) чисто мнимые и среди них нет равных или нулевых. Тогда можно считать, что квадратичная часть функции Гамильтона (1.1) имеет вид

$$H_2 = \frac{1}{2}\lambda_0(q_0^2 + p_0^2) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(q_j^2 + p_j^2) \tag{3.1}$$

где $|\lambda_j|$ — частоты линейной системы с функцией Гамильтона. Формы H_m в (1.1) имеют вид

$$H_m = \sum_{\nu_0+\ldots+\mu_N=m} h_{\nu_0\mu_0\nu_1\mu_1\ldots\nu_N\mu_N} q_0^{\nu_0} p_0^{\mu_0} q_1^{\nu_1} p_1^{\mu_1} \ldots q_N^{\nu_N} p_N^{\mu_N} \tag{3.2}$$

Для построения периодических движений нелинейной задачи воспользуемся методом канонических преобразований. Представим формы (3.2) в виде

$$H_m = \sum_{\alpha=0}^{m} H_{\alpha,\beta} \quad (\beta = m - \alpha) \tag{3.3}$$

где $H_{\alpha,\beta}$ означает совокупность членов степени α по переменным q_0, p_0 и степени β по остальным переменным. Сделаем теперь такое нелинейное каноническое преобразование

$$q_i, p_i \to q_i^*, p_i^* \quad (i = 0, 1, \ldots, N), \quad (H \to H^*, H_2 = H_2^*) \tag{3.4}$$

чтобы во всех формах (3.3) новой функции Гамильтона H^* нормализовать члены $H^*_{m,0}$ и уничтожить члены $H^*_{m-1,1}$. Такое преобразование будет сходящимся [3, 4].

Преобразование (3.4) можно осуществить, например, с помощью классического метода Биркгофа [5]. Однако этот метод обладает рядом недостатков, особенно ярко проявляющихся при нормализации функций Гамильтона систем со многими степенями свободы до больших порядков относительно координат и импульсов. По этой причине преобразование (3.4), как и вообще все дальнейшие нормализующие преобразования, лучше проводить недавно разработанным методом Депри — Хори, основанным на канонических преобразованиях Ли [6,7]. В связи с этим существенной составной частью предлагаемого метода исследования периодических движений следует считать реализацию описанных алгоритмов на ЭВМ. Основная часть необходимых вычислительных программ нормализации опубликована авторами ранее [1].

Производящую функцию преобразования (3.4), зависящую только от новых (или только от старых) переменных, представим в виде ряда

$$T = T_3 + \ldots + T_m + \ldots$$

Тогда операторное уравнение для определения коэффициентов производящей функции и новой функции Гамильтона имеет вид

$$D_0 T_m = H_m' - H_m^* \quad (m = 3, 4, \ldots) \tag{3.5}$$

[1] *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1976, № 31.

где оператор D_0 определяется следующим образом:

$$D_0 T_m = -\{H_2; T_m\} = -\sum_{i=0}^{N} \left[\frac{\partial H_2}{\partial q_i}\frac{\partial T_m}{\partial p_i} - \frac{\partial H_2}{\partial p_i}\frac{\partial T_m}{\partial q_i}\right]$$

Здесь и далее фигурными скобками обозначается операция вычисления скобок Пуассона. В (3.5) формы H_m' выражаются через «младшие» функции

$$H_\alpha,\ H_\beta^*,\ T_\beta\ (\alpha = 2, \ldots, m;\ \beta = 3, \ldots, m-1) \tag{3.6}$$

с помощью скобок Пуассона $\{F_\alpha; T_\beta\} = D_\beta F_\alpha$, где функции F_α в свою очередь выражаются через функции (3.6) с помощью аналогичных скобок Пуассона. Например

$$\begin{aligned} &H_3' = H_3, \quad H_4' = H_4 + {}^1/_2 D_3 (H_3 + H_3^*) \\ &H_5' = H_5 + {}^1/_2 D_3 [H_4 + H_4^* + {}^1/_6 D_3 (H_3 - H_3^*)] + \\ &+ {}^1/_2 D_4 (H_3 + H_3^*) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Если при решении конкретной задачи требуется рассмотрение в функции Гамильтона H членов H_m, порядок которых выше пятого, то H_m' ($m \geqslant 6$) можно вычислить по формулам, предложенным авторами (см. сноску на стр. 54).

Уравнение (3.5) распадается на группы, соответствующие членам $H_{\alpha,\beta}$ в представлении (3.3). Поэтому нормализацию таких членов можно производить независимо один от другого. При нормализации членов $H_{\alpha,\beta}$ из формы (3.2) появляются знаменатели вида

$$d_{\alpha,\beta} = |\lambda_0|(\nu_0 - \mu_0) + \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|(\nu_j - \mu_j) \tag{3.8}$$

$$\nu_0 + \mu_0 = \alpha, \quad \sum_{j=1}^{N} (\nu_j + \mu_j) = \beta$$

Пусть выполнено условие Ляпунова существования периодических движений, период которых близок к $2\pi/|\lambda_0|$, т. е. пусть параметры задачи таковы, что для всех целых n_0 выполнены неравенства

$$\lambda_j \neq n_0 \lambda_0 \quad (j = 1, \ldots N) \tag{3.9}$$

Учитывая (3.9) и то, что величины λ_i ($i = 0, 1, \ldots, N$) не равны нулю, легко убедиться, что во всех формах H_m^* в новой функции Гамильтона члены вида $H_{m-1,1}^*$ можно уничтожить полностью, так как соответствующие этим членам знаменатели $d_{\alpha,\beta}$ в нуль не обращаются. Из этого также следует, что в формах нечетной степени (т. е. в H_{2m-1}^*) члены $H_{2m-1,0}^*$ можно уничтожить. В формах четной степени эти члены можно нормализовать и представить в виде

$$H_{2m,0}^* = b_{2m} 2^{-m} (q_0^{*2} + p_0^{*2})^m \tag{3.10}$$

где b_{2m} ($2m = 4, 6, \ldots$) зависят лишь от параметров задачи.

Если уравнения (3.5) для всех m уже решены и найдены соответствующие члены разложения производящей функции, то полученное таким образом преобразование (3.4) будет иметь вид (D — дифференциальный оператор Ли)

$$
(3.11)\qquad q_i = q_i^* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k q_i^*, \quad p_i = p_i^* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k p_i^* \quad (i = 0, 1, \ldots, N)
$$

$$
D = \sum_{m=3}^{\infty} D_m, \quad D^0 f \equiv f, \quad D^1 f \equiv Df = \{f; T\}, \ldots,
$$

$$
D^{k+1} f = D(D^k f), \ldots
$$

Здесь f — произвольная функция переменных q_i^*, p_i^* (или переменных q_i, p_i).

Итак, пусть преобразование (3.4) осуществлено. Тогда, оставляя для координат, импульсов и гамильтониана прежние обозначения (без звездочек), заметим, что в новую функцию Гамильтона H совокупность переменных q_j, p_j ($j = 1, \ldots, N$) входит в степени не ниже второй. Это означает, что уравнения движения допускают частные решения, соответствующие периодическим движениям Ляпунова, для которых $q_j = p_j = 0$, а изменение переменных q_0, p_0 описывается уравнениями

$$
(3.12)\qquad \frac{dq_0}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_0} = \left[\lambda_0 + \sum_{m=2}^{\infty} m 2^{1-m} b_{2m} (q_0^2 + p_0^2)^{m-1}\right] p_0
$$

$$
\frac{dp_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_0} = -\left[\lambda_0 + \sum_{m=2}^{\infty} m 2^{1-m} b_{2m} (q_0^2 + p_0^2)^{m-1}\right] q_0
$$

В переменных действие I — угол W, связанных с q_0, p_0 указанными ниже формулами, уравнения (3.12) принимают вид

$$
(3.13)\qquad \frac{dI}{dt} = 0, \quad \frac{dW}{dt} = \lambda_0 + \sum_{m=2}^{\infty} m b_{2m} I^{m-1}
$$

$$
q_0 = \sqrt{2I} \sin W, \quad p_0 = \sqrt{2I} \cos W
$$

Решение этих уравнений будет таким (Ω_0 — частота, T_0 — период периодического движения):

$$
(3.14)\qquad I = I_0 = \mathrm{const}, \quad W = \Omega_0 (I_0)(t - t_0) + W_0
$$

$$
\Omega_0 = \lambda_0 + \sum_{m=2}^{\infty} m b_{2m} I_0^{m-1}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{|\Omega_0|}
$$

Видно, что при $I_0 \to 0$ период движений стремится к величине $2\pi / |\lambda_0|$.

4. Будем исследовать устойчивость периодического движения (3.14) по отношению к возмущениям частоты периодического движения (или, что то же самое, по отношению к возмущению переменной действие I_0 невозмущенного периодического движения) и по отношению к возмущениям q_j, p_j, ($j = 1, \ldots, N$). Пусть $\varepsilon = \sqrt{2I_0}$ — малая, но конечная, величина (рассматриваются только малые периодические движения). Пусть I — переменная действие возмущенного движения, связанная с I_0 соотноше-

нием

(4.1) $$I = {}^1/_2\varepsilon^2 + r_0$$

где r_0 — возмущение переменной действие. Знак величины r_0 произволен. При этом q_j, p_j — величины первого, а r_0 — второго порядка малости и по своему смыслу все эти величины в отличие от ε — бесконечно малые величины.

Используя (4.1), запишем декартовы координаты q_0, p_0 возмущенного движения через r_0 и ε в виде

(4.2) $$q_0 = \sqrt{2I}\sin W, \quad p_0 = \sqrt{2I}\cos W$$

$$\sqrt{2I} = \varepsilon\left\{1 + \frac{r_0}{\varepsilon^2} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m-1)!!}{(m+1)!}\left(\frac{r_0}{\varepsilon^2}\right)^{m+1}\right\} =$$

$$= \varepsilon + \frac{r_0}{\varepsilon} - \frac{r_0^2}{2\varepsilon^3} + O(r_0^3)$$

Частота исследуемого периодического движения (3.14), выраженная через ε, принимает вид (через c_{00} обозначена величина b_4 из (3.10))

(4.3) $$\Omega_0 = \sum_{m=0}^{\infty}\Omega_0^{(m)}\varepsilon^m = \lambda_0 + c_{00}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

$$\Omega_0^{(0)} = \lambda_0, \quad \Omega_0^{(2m-1)} = 0, \quad \Omega_0^{(2m)} = (m+1)2^{-m}b_{2m+2}$$

Подставляя в функцию Гамильтона величины (4.2) и собирая члены одинакового порядка относительно q_j, p_j и $\sqrt{|r_0|}$, получим гамильтониан возмущенного движения в виде

(4.4) $$K = K_2 + K_3 + K_4 + \ldots$$

$$K_2 = \Omega_0 r_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(q_j^2 + p_j^2) + \sum_{m=1}^{\infty}\hat{H}_{m,2}, \quad K_3 = \sum_{m=0}^{\infty}\hat{H}_{m,3}$$

$$K_4 = B_{00}r_0^2 + \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{\overline{H}}_{m,2}\right]r_0 + \sum_{m=0}^{\infty}\hat{H}_{m,4}$$

$$\overline{H}_{m,2} = \left(q_0\frac{\partial}{\partial q_0} + p_0\frac{\partial}{\partial p_0}\right)H_{m,2}$$

$$B_{00} = c_{00} + \sum_{m=1}^{\infty}B_{00}^{(2m)}\varepsilon^{2m}, \quad B_{00}^{(2m)} = (m+1)(m+2)2^{-(m+1)}b_{2m+4}$$

Индекс $\wedge$ означает, что вместо q_0 и p_0 в соответствующие формы надо подставить выражения $\varepsilon\sin W$ и $\varepsilon\cos W$.

Функция Гамильтона (4.4) имеет период 2π по переменной W. В (4.4) точками обозначены члены, порядок малости которых относительно возмущений не ниже пятого. Гамильтониан возмущенного движения зависит, во-первых, от исходных параметров задачи U и, во-вторых, от параметра ε, характеризующего амплитуду периодического движения (3.14). Отметим, что в задаче об устойчивости зависимость от начального момента времени t_0 несущественна.

При исследовании устойчивости в конкретной механической системе оказывается, что в процессе нормализации особыми являются такие значения параметров U, при которых возможны резонансы первого (условие Ляпунова существования периодических движений), второго (порождающие точки областей параметрического резонанса), третьего и четвертого порядков (порождающие точки для соответствующих резонансных поверхностей). В общем виде такие резонансы можно записать:

$$\sum_{j=1}^{N} n_j\lambda_j = n_0\lambda_0 \qquad \left(\sum_{j=1}^{N} |n_j| = n\right) \tag{4.5}$$

где n — порядок резонанса, n_0 — произвольное целое число.

При решении вопроса о том, какие из резонансов (4.5) надо учитывать для полного исследования устойчивости в многомерных гамильтоновых системах, для конкретной задачи следует принять во внимание следующие два замечания:

а) частоты системы, линеаризованной в окрестности положения равновесия, зависят от параметров U известным образом и, следовательно, в рассматриваемой области изменения параметров на них наложены какие-то ограничения; поэтому из всех резонансов (4.5) надо отобрать только принципиально возможные;

б) структура функции Гамильтона часто такова, что некоторые из принципиально возможных резонансов не проявляются в процессе нормализации (т. е. не приводят к появлению нулевых знаменателей в производящей функции) и, следовательно, рассматривать их не имеет смысла.

Эти два замечания позволяют значительно облегчить исследование резонансных случаев в конкретной задаче.

5. Исследуем устойчивость линейной системы с функцией Гамильтона K_2 (см. (4.4)).

Прежде всего заметим, что значения параметров U, для которых выполнено соотношение (4.5), где $n=2$, а n_0 — произвольное ненулевое целое число, являются порождающими для областей неустойчивости (области параметрического резонанса) в пространстве параметров U, ε. Без ограничения общности такие резонансы можно записать в виде

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 = n_0\lambda_0 \quad (n_1 \geqslant 0) \tag{5.1}$$

где $n_1 + |n_2| = 2$. Резонансы (5.1) при $n_1 = n_2 = 1$ называются параметрическими резонансами комбинационного типа, а при $n_1 = 2$, $n_2 = 0$ (или $n_1 = 0$, $n_2 = 2$) — основного типа. Резонансы (5.1), для которых $n_1 n_2 < 0$, не являются порождающими для областей неустойчивости [8]. Поэтому будем считать числа n_1, n_2 положительными.

Опишем процедуру нормализации квадратичной части функции Гамильтона возмущенного движения. Функцию K_2 представим в виде

$$K_2 = \Omega_0 [r_0 + G_2(q_j, p_j, W)] \tag{5.2}$$

$$G_2 = \sum_{m=0}^{\infty} G_{m,2}\varepsilon^m, \quad G_{0,2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j}{\lambda_0}(q_j^2 + p_j^2)$$

$$G_{m,2} = \frac{1}{\lambda_0}F_{m,2} - \frac{1}{\lambda_0}\sum_{k=1}^{m} G_{m-k,2}\Omega_0^{(k)}, \quad F_{m,2} = \hat{H}_{m,2}\varepsilon^{-m} \quad (m=1, 2, \ldots)$$

Функции $G_{m,2}$ (а также $F_{m,2}$) имеют нулевой порядок относительно ε, являются 2π-периодическими функциями W и записываются через конечные ряды синусов и косинусов целых кратностей величины W, причем их максимальная кратность не превышает m.

Для приведения функции (5.2) к нормальному виду необходимо сначала провести ее нормализацию по переменным q_j, p_j ($j = 1, \ldots, N$). Для этого перейдем к новой независимой переменной W. Тогда функцией Гамильтона, описывающей изменение переменных q_j, p_j, будет функция G_2. Эта функция соответствует неавтономной канонической системе с N степенями свободы.

Нормализацию функции Гамильтона G_2 можно провести обычным способом, например, используя алгоритм, аналогичный алгоритму Биркгофа, или алгоритм Депри — Хори. При этом на каждом шаге нормализации формы $G_{m,2}$ приходится решать системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Однако в рассматриваемом случае эти уравнения имеют малый параметр ε, а «время» W входит в правые части дифференциальных уравнений специальным образом. Поэтому нормализацию неавтономной канонической системы с функцией Гамильтона G_2 можно свести к нормализации автономной системы (но уже с $N + 1$ степенью свободы), т. е. к решению системы алгебраических уравнений.

Для этого прежде всего заметим, что при нормализации функции G_2 операторное уравнение (3.5) принимает вид

$$\Delta_0 T_{m,2} = G'_{m,2} - G^*_{m,2} \tag{5.3}$$

$$\Delta_0 = D_0 - \frac{\partial}{\partial W}, \quad D_0 T_{m,2} = -\{G_{0,2};\ T_{m,2}\}$$

Здесь $T_{m,2}$ и $G^*_{m,2}$ — члены степени m в разложении производящей функции искомого преобразования T_2 и новой функции Гамильтона $G_2{}^*$ в ряды по малому параметру. Функции $G'_{m,2}$ вычисляются по формулам, аналогичным (3.7). Однако процедуру решения уравнений (5.3) можно представить в несколько ином виде.

Введем фиктивные переменные q_W, p_W по формулам

$$q_W = \varepsilon \sin W, \quad p_W = \varepsilon \cos W \tag{5.4}$$

После этой замены время W в функцию Гамильтона G_2 явно входить не будет, так как в функцию K_2 в (4.4) величины ε и W входят только в виде комбинаций (5.4), а в частоте (4.3) величину ε^2 можно заменить на выражение $q_W{}^2 + p_W{}^2$. Получившийся гамильтониан принимает вид

$$L = L_2 + \ldots + L_m + \ldots \tag{5.5}$$

$$L_m = \check{G}_{m-2,2}\varepsilon^{m-2} = \sum_{\nu_0+\ldots+\mu_N=m} g_{\nu_0\mu_0\nu_1\mu_1\ldots\nu_N\mu_N} q_W^{\nu_0} p_W^{\mu_0} \ldots q_N^{\nu_N} p_N^{\mu_N} \tag{5.6}$$

где индекс $\check{}$ означает, что в соответствующих функциях величины ε, W исключены при помощи подстановки (5.4); в (5.6) $m \geqslant 3$, а функция L_2 определяется ниже. Отметим, что действия оператора с индексом $\check{}$ и оператора с индексом $\hat{}$ из п. 4 взаимно противоположны и, таким образом, по функциям $H_{m,2}$ из второго соотношения (4.5) можно сразу же получить функции $\check{G}_{m,2}$. Для этого надо только в функциях $H_{m,2}$ сделать формальную замену $q_0 \to q_W$, $p_0 \to p_W$ и воспользоваться последними тремя формулами (5.2). Производящую функцию искомого нормализующего преобразования S_2 и новую функцию Гамильтона L^* также представим в виде ряда (5.5).

Используя правило дифференцирования сложных функций, оператор Δ_0 перепишем в виде

$$\Delta_0 = D_0 - \left[p_W \frac{\partial}{\partial q_W} - q_W \frac{\partial}{\partial p_W}\right]$$

Тогда операторное уравнение (5.3) будет

$$\Delta_0 S_{m-2,\,2} = L_m' - L_m^*$$

$$\Delta_0 S_{m-2,\,2} = -\{L_2;\ S_{m-2,\,2}\}$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(q_W^2 + p_W^2) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j}{\lambda_0}(q_j^2 + p_j^2)$$

Функции L_m' вычисляются по младшим функциям с помощью формул (3.7), где операторы D_m надо заменить на операторы $D_{m-2,2}$, действие которых на произвольную функцию переменных q_W, p_W, q_j, p_j ($j = 1, \ldots, N$) описывается соотношениями

$$D_{m-2,\,2}F = \{F;\ S_{m-2,\,2}\} = \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial S_{m-2,\,2}}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial S_{m-2,\,2}}{\partial q_j}\right] \tag{5.7}$$

Таким образом, вместо неавтономной системы с гамильтонианом G_2 можно нормализовывать автономную систему (но с числом степеней свободы на единицу большим) с гамильтонианом (5.5). При этом предлагаемая здесь процедура нормализации будет отличаться от обычной нормализации автономной системы с $N+1$ степенью свободы только тем, что при вычислении скобок Пуассона в величинах (3.7), а также при получении явного вида (3.11) рассматриваемого преобразования надо проводить дифференцирование не по всем переменным q_W, p_W, q_j, p_j ($j = 1, \ldots, N$), а, согласно (5.7), только по переменным q_j, p_j.

В гамильтониан (5.5) переменные q_j, p_j входят только квадратичным образом (в (5.6) $\nu_1 + \mu_1 + \ldots + \nu_N + \mu_N = 2$). Поэтому помешать нормализации могут только резонансы вида (4.5) при $n=2$.

Если все такие резонансы отсутствуют, то гамильтониан (5.5) можно привести к следующему нормальному виду:

$$L^* = r_W + \sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{\lambda_j}{\lambda_0} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m,\,j} r_W^m\right\} r_j \tag{5.8}$$

$$q^* = \sqrt{2r}\sin\varphi, \quad p^* = \sqrt{2r}\cos\varphi$$

Функция (5.8) записана в «полярных» координатах r_W, φ_W, r_j, φ_j, связанных с новыми переменными q_W^*, p_W^*, q_j^*, p_j^* формулами указанного вида. Величины $a_{2m,j}$ зависят от параметров задачи U.

Пусть теперь выполнено резонансное соотношение (5.1). Тогда нормальная форма гамильтониана (5.5) будет такой:

$$L^* = r_W + \sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{\lambda_i}{\lambda_0} + \sum_{m=1}^{n_0'} a_{2m,\,j} r_W^m\right\} r_j +$$
$$+ a\sqrt{r_W^{|n_0|} r_1^{n_1} r_2^{n_2}} \sin(n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2 - n_0\varphi_W) + O(r_W^{\gamma})$$
$$\gamma = \frac{|n_0| + 1}{2}, \quad n_0' = \left[\frac{1}{2}|n_0|\right]$$

где величина a также зависит от параметров U, а квадратные скобки означают взятие целой части числа.

Преобразование

(5.9) $$q_W,\ p_W,\ q_j,\ p_j \to q_W^*,\ p_W^*,\ q_j^*,\ p_j^* \quad (j = 1, \ldots, N)$$

при достаточно малых ε (т. е. q_W, p_W) будет сходящимся относительно q_W, p_W и осуществляется по формулам, аналогичным формулам (3.11), в которых опять операторы D_m надо заменить на операторы $D_{m-2,2}$ из (5.7). Из вида этих операторов также ясно, что, как и следовало ожидать, фиктивные переменные q_W, p_W после проведенной нормализации не изменились.

Сделаем теперь преобразование, обратное к (5.4), и возвратимся к старой независимой переменной t. Если задать еще преобразование r_0, $W \to r_0^*$, W^* по формулам

(5.10) $$r_0 = r_0^* + \partial S_2 / \partial W, \quad W = W^*$$

то вместе с (5.9) получим каноническое преобразование, нормализующее функцию (5.2) по всем переменным. В нерезонансном случае нормальный вид этой функции будет таким (для r_0 оставлено прежнее обозначение):

(5.11) $$K_2^* = \Omega_0 r_0 + \sum_{j=1}^{N} \Omega_j r_j$$

а в резонансном

(5.12) $$K_2^* = \Omega_0 r_0 + \sum_{j=1}^{N} \Omega_j' r_j + A\varepsilon^{|n_0|}\sqrt{r_1^{n_1} r_2^{n_2}} \sin(n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2 - n_0 W) +$$
$$+ O(\varepsilon^{|n_0|+1})$$

Здесь введены обозначения

$$\Omega_j = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_j^{(m)} \varepsilon^m, \quad \Omega_j' = \sum_{m=0}^{2n_0'} \Omega_j^{(m)} \varepsilon^m, \quad A = a\lambda_0 2^{-|n_0|/2}$$

$$\Omega_j^{(0)} = \lambda_j, \quad \Omega_j^{(2m-1)} = 0, \quad \Omega_j^{(2m)} = \frac{\lambda_j}{\lambda_0}\Omega_0^{(2m)} + \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} a_{2k,\,j}\Omega_0^{(2m-2k)}$$

Рассмотрим случай параметрического резонанса. Из поверхностей, для которых в области изменения параметров задачи U выполнено соотношение (5.1), при малых значениях ε будут исходить области параметрического резонанса (области неустойчивости). Согласно [8] на поверхностях, ограничивающих эти области в пространстве параметров U, ε, будут выполнены соотношения

$$|n_1(\lambda_0\Omega_1 - \lambda_1\Omega_0) + n_2(\lambda_0\Omega_2 - \lambda_2\Omega_0)| = |\lambda_0 A|\sqrt{n_1^{n_1}n_2^{n_2}}\varepsilon^{|n_0|} \tag{5.13}$$

При этом, если правая часть последнего соотношения больше левой, то рассматриваемое периодическое движение будет неустойчиво, а если меньше, то имеет место устойчивость в первом приближении.

В пространстве параметров U, ε уравнения двух поверхностей (5.13) можно искать в виде рядов по ε, использовав разложения в ряды величин Ω_0, Ω_1, Ω_2.

6. Пусть теперь параметры задачи U, ε таковы, что имеет место устойчивость рассматриваемого периодического движения в линейном приближении. Тогда, проведя нормализацию линейной системы указанным в п. 5 способом, функцию Гамильтона (4.4) можно привести к виду

$$K^* = K_2^* + K_3^* + K_4^* + \ldots \tag{6.1}$$

$$K_3^* = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{K}_{m,3}$$

$$K_4^* = B_{00}r_0^2 + \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{K}_{m,2}\right]r_0 + \sum_{m=0}^{\infty}\hat{K}_{m,4}$$

Здесь K_2^* имеет вид (5.11), а функции $\hat{K}_{m,i}$ ($m = 0, 1, \ldots; i = 2, 3, 4$) имеют порядок m относительно ε (т. е. относительно фиктивных переменных q_W, p_W из п. 5) и порядок i относительно q_j, p_j ($j = 1, \ldots, N$). Эти функции просто вычисляются по формулам, аналогичным (3.7). Например

$$\begin{aligned} &K_{0,3} = H_{0,3}, \quad K_{1,3} = H_{1,3} + D_{1,2}H_{0,3} \\ &K_{2,3} = H_{2,3} + D_{1,2}H_{1,3} + D_{2,2}H_{0,3}, \quad K_{1,2} = \bar{H}_{1,2} \\ &K_{2,2} = \bar{H}_{2,2} + D_{1,2}\bar{H}_{1,2}, \quad K_{0,4} = H_{0,4} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2}H_{1,2}\left[q_W\frac{\partial}{\partial p_W} - p_W\frac{\partial}{\partial q_W}\right]S_{1,2} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Для выяснения вопроса об устойчивости в строгом (нелинейном) смысле процесс нормализации гамильтониана возмущенного движения надо продолжить.

Помешать нелинейной нормализации гамильтониана (6.1) могут резонансы

$$\sum_{j=1}^{N} n_j\Omega_j = n_0\Omega_0 \quad \left(\sum_{j=1}^{N}|n_j| = n = 3, 4\right) \tag{6.3}$$

В области изменения параметров U, ε соотношения (6.3) представляют собой уравнения резонансных поверхностей третьего и четвертого порядков, которые находятся аналогично границам областей параметрического резонанса в п. 5. Порождающими для этих резонансных поверхностей являются значения параметров U, удовлетворяющие соотношениям (4.5).

Рассмотрим сначала значения параметров U, ε, не принадлежащие резонансным поверхностям третьего и четвертого порядков. В этом случае, воспользовавшись описанным в п. 5. способом нормализации, в функции Гамильтона (6.1) форму K_3^* можно уничтожить полностью. Нормализация членов четвертого порядка разбивается на три независимых один от другого этапа:

а) Нормализация членов, пропорциональных r_0^2. Эти члены уже нормализованы.

б) Нормализация членов, пропорциональных r_0. Можно показать, что нормализация этих членов сводится к усреднению функции $\widehat{K_{1,2}}+\widehat{\bar{K}_{2,2}}+\ldots$ по быстрым фазам движения, определяемого гамильтонианом (5.11). Отметим, что резонансы (6.2) при $n=2$ нормализации этих членов не помешают, так как они возникают только на границах областей параметрического резонанса и, следовательно, уже учтены при линейной нормализации.

в) Нормализация членов, не зависящих от r_0. Этот этап нормализации аналогичен процедуре линейной нормализации.

В результате гамильтониан возмущенного движения (6.1) в нерезонансном случае можно привести к такому нормальному виду (обозначения для переменных оставлены прежними):

$$K = K_2 + K_4 + K^* \tag{6.4}$$

$$K_2(r_0, r_1, \ldots, r_N) = \sum_{i=0}^{N} \Omega_i r_i, \quad K_4(r_0, r_1, \ldots, r_N) = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant N} B_{ij} r_i r_j$$

где коэффициенты формы K_4 имеют разложение по ε, аналогичное разложению B_{00} в (4.4), а функция K^* является 2π-периодической функцией угловых переменных $W, \varphi_1, \ldots, \varphi_N$ и имеет порядок относительно r_i не ниже $^5/_2$.

В случае резонанса третьего порядка нормальная форма будет

$$K = K_2 + A\varepsilon^{|n_0|} \sqrt{r_1^{|n_1|} \ldots r_N^{|n_N|}} \sin(n_1\varphi_1 + \ldots + n_N\varphi_N - n_0 W) + K^* \tag{6.5}$$

а в случае резонанса четвертого порядка

$$K = K_2 + K_4 + A\varepsilon^{|n_0|} \sqrt{r_1^{|n_1|} \ldots r_N^{|n_N|}} \sin(n_1\varphi_1 + \ldots + n_N\varphi_N - n_0 W) + K^* \tag{6.6}$$

В (6.5) и (6.6) функции K^* имеют порядок относительно ε не ниже $|n_0|+1$; величины B_{ij} из (6.6) также вычисляются с этой точностью.

7. Итак, для того чтобы сделать заключение об устойчивости периодического движения, надо только подсчитать коэффициенты одной из нормальных форм (6.4) — (6.6) и воспользоваться критериями устойчивости из работ [4, 9–14]. При этом для систем с двумя степенями свободы ($N=1$) можно получить исчерпывающие результаты.

Если в многомерной гамильтоновой системе имеет место резонанс третьего или четвертого порядка (6.3) и в ряду чисел $n_1, \ldots, n_N$ есть хотя бы одна перемена знака, то периодическое движение будет формально устойчиво [9], т. е. устойчиво в любом приближении.

Если имеет место резонанс третьего порядка (6.3) и в (6.5) $A \neq 0$, то периодическое движение будет неустойчиво [10, 11]. Если $A = 0$, то вопрос об устойчивости членами этого порядка не решается.

Если имеет место резонанс четвертого порядка (6.3) и в нормальной форме (6.6)

$$(7.1) \quad |K_4(-n_0, n_1, \ldots, n_N)| < |A| \sqrt{n_1^{n_1} \ldots n_N^{n_N}} \varepsilon^{|n_0|}$$

то периодическое движение будет неустойчиво [10, 11]. При обратном знаке в последнем неравенстве в случае двухчастотных гамильтоновых систем будет устойчивость [12], а в многомерном случае — устойчивость в конечном (четвертом) приближении [11].

В нерезонансном случае для систем с двумя степенями свободы вопрос об устойчивости решается теоремой Арнольда — Мозера: если (в обозначениях (6.4) и (4.4))

$$(7.2) \qquad D \neq 0$$

$$(7.3) \qquad D = K_4(\Omega_1, -\Omega_0, 0, \ldots, 0) = c_{00}\lambda_1^2 - c_{01}\lambda_0\lambda_1 + c_{11}\lambda_0^2 + O(\varepsilon^2)$$

то периодическое движение устойчиво [4, 13].

Уровень развития теории гамильтоновых систем не дает возможности получить такой же законченный результат в многомерном случае. Можно только утверждать следующее.

Если при $r_0 = r_1 = \ldots = r_N = 0$ определители

$$(7.4) \qquad D_3 = \det \left\| \frac{\partial^2 K_4}{\partial r_i \partial r_j} \right\|, \quad D_4 = \det \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 K_4}{\partial r_i \partial r_j} & \dfrac{\partial K_2}{\partial r_i} \\ \dfrac{\partial K_2}{\partial r_j} & 0 \end{matrix} \right\|$$

одновременно в нуль не обращаются, то будет иметь место устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных данных [13].

Можно также рассмотреть задачу о формальной устойчивости периодических движений. В исследуемом случае достаточное условие формальной устойчивости сводится (см. [14] и сноску на стр. 53) к проверке несовместности системы уравнений (относительно $r_0, r_1, \ldots, r_N$)

$$(7.5) \qquad K_2 = 0, \ K_4 = 0$$

в области $r_1 \geqslant 0, \ldots, r_N \geqslant 0$ (напомним, что согласно определению (4.1) знак величины r_0 произволен).

Естественно, в определителях (7.4) и в уравнениях (7.5) имеет смысл учитывать только главные члены разложения величин Ω_i, B_{ij} из (6.4) (см. также (7.3)). Это означает, что для решения вопроса об устойчивости в нерезонансном случае, как правило, можно ограничиться рассмотрением только членов до H_4 включительно в исходной функции Гамильтона (1.1).

Поступила 9 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Брюно А. Д.* Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов. Матем. сб., 1970, т. 83, вып. 2.

3. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
4. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М., «Мир», 1973.
5. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.—Л., Гостехиздат, 1941.
6. *Hori G. I.* Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. J. Japan Astron. Soc., 1966, vol. 18, No. 4, p. 287—296.
7. *Deprit A.* Canonical transformations depending on a small parameter. Celest. Mech., 1969, vol. 1, No. 1, p. 12—30.
8. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
9. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems. Communs Pure and Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81—114.
10. *Маркеев А. П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
11. *Хазин Л. Г.* Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
12. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
13. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 6.
14. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.