Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.3

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГИМИ И ДИССИПАТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Исследуется общая задача динамики твердого тела, имеющего внутренние степени свободы: линейные упругие и диссипативные элементы. Предполагается, что периоды собственных упругих колебаний и время их затухания малы по сравнению с характерным временем движения тела относительно центра масс. Построены приближенные решения для внутренних степеней свободы. Выведены общие уравнения движения системы, которые имеют вид уравнений динамики твердого тела с дополнительными слагаемыми, обусловленными внутренней упругостью и диссипацией. Установлена структура этих слагаемых. Показано, что в случае свободной системы они состоят из однородных многочленов четвертой и пятой степеней от компонентов вектора угловой скорости тела.

Вопросы динамики твердого тела, содержащего упругие и диссипативные звенья, рассматривались в ряде работ, например, в [1–6].

1. Рассмотрим движение системы S, состоящей из твердого тела G массы m и из N материальных точек P_i с массами m_i, $i = 1, \ldots, N$. Точки P_i связаны с телом G и одна с другой при помощи идеальных связей и линейных упругих связей с линейным демпфированием. Пусть O_i — равновесные положения точек P_i относительно тела G в случае, когда вся система покоится.

Введем три декартовы системы координат: неподвижную систему $O'X'_1X_2'X_3'$, систему $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с твердым телом, и систему $OX_1X_2X_3$, начало которой O связано с твердым телом, а оси движутся поступательно и параллельно осям системы $O'X_1'X_2'X_3'$. Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&(1.1)\qquad \mathbf{R}_0 = O'O, \quad \rho_i = OO_i, \quad \mathbf{r}_i = O_iP_i \\
&\qquad\qquad \mathbf{R}_i = O'P_i = \mathbf{R}_0 + \rho_i + \mathbf{r}_i, \quad i = 1, \ldots, N
\end{aligned}
$$

Производные скалярных величин по времени t будем обозначать точками. Для произвольного трехмерного вектора $\mathbf{p}$ обозначаем через $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}^{\bullet}$ его производные по времени в системах координат $Ox_1x_2x_3$ и $O'X_1'X_2'X_3'$ соответственно. Имеем

$$
(1.2)\qquad \mathbf{p}^{\bullet} = \mathbf{p}' + \omega\times\mathbf{p}
$$

где ω — вектор абсолютной угловой скорости тела G, т. е. системы координат $Ox_1x_2x_3$. Заметим, что так как точки O и O_i жестко связаны с телом G, то $\rho_i' = 0$ при $i = 1, \ldots, N$. Имеем, очевидно, $\omega^{\bullet} = \omega'$.

Составим уравнения движения системы S. Сначала рассмотрим движение точек P_i относительно тела G. Предположим, что совокупность точек P_i имеет n степеней свободы относительно тела G и ее положение в системе координат $Ox_1x_2x_3$ может быть охарактеризовано n-мерным вектором q обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$. Примем, что в случае малых колебаний векторы смещений r_i линейно выражаются через обобщенные координаты

(1.3) $$\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{H}_{ij} q_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

Здесь $\mathbf{H}_{ij}$ — векторы, постоянные в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Кинетическая энергия движения точек P_i относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$ с учетом равенств (1.3) имеет вид

(1.4) $$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathbf{r}_i')^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,\,k=1}^{n} a_{jk} q_j^{\boldsymbol\cdot} q_k^{\boldsymbol\cdot}$$

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{H}_{ij} \mathbf{H}_{ik}, \quad j, k = 1, \ldots, n$$

Уравнения малых колебаний точек P_i относительно тела G запишем в форме уравнений Лагранжа

(1.5) $$Aq^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + Bq^{\boldsymbol\cdot} + Cq = Q$$

Здесь A, B, C — квадратные постоянные симметричные матрицы размера $n \times n$; считаем их положительно-определенными. Матрица $A = \| a_{jk} \|$ характеризует кинетическую энергию (см. (1.4)), матрица $B = \| b_{jk} \|$ — диссипацию, а $C = \| c_{jk} \|$ — упругую потенциальную энергию. Через Q в уравнении (1.5) обозначен n-мерный вектор обобщенных сил $Q_1, \ldots, Q_n$. Эти обобщенные силы обусловлены действием на точки P_i внешних сил $\mathbf{F}_i$ и сил инерции в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Они получаются из указанных сил при помощи преобразования, контравариантного по отношению к замене (1.3) (см. [7]), и равны

(1.6) $$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{H}_{ij} \{\mathbf{F}_i - m_i [\mathbf{R}_0^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + \boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\rho_i + \mathbf{r}_i)) + {} + \boldsymbol\omega' \times (\boldsymbol\rho_i + \mathbf{r}_i) + 2\boldsymbol\omega \times \mathbf{r}_i']\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

Внешние силы $\mathbf{F}_i$, действующие на каждую точку P_i, предполагаются зависящими от ее абсолютного положения и скорости

(1.7) $$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_i^{\boldsymbol\cdot}, t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{R}_0 + \boldsymbol\rho_i + \mathbf{r}_i, \; \mathbf{R}_0^{\boldsymbol\cdot} + \boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\rho_i + \mathbf{r}_i) + \mathbf{r}_i', t), \quad i = 1, \ldots, n$$

Здесь использованы соотношения (1.1), (1.2) и равенства $\boldsymbol\rho_i' = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Запишем уравнение моментов для всей системы S относительно полюса O, рассматривая ее движение в системе координат $OX_1X_2X_3$. Имеем

(1.8) $$\mathbf{K}^{\boldsymbol\cdot} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_1$$

Здесь $\mathbf{K}$ — кинетический момент системы S относительно полюса O в ее движении относительно системы координат $OX_1X_2X_3$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_1$ — главные моменты относительно полюса O всех внешних сил и сил инерции соответственно, действующих на систему S. Указанные величины по определению равны

$$(1.9)\qquad \mathbf{K}=\sum_\alpha m_\alpha(\boldsymbol{\rho}_\alpha+\mathbf{r}_\alpha)\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\alpha+\mathbf{r}_\alpha^{\cdot})$$

$$\mathbf{M}=\sum_\alpha(\boldsymbol{\rho}_\alpha+\mathbf{r}_\alpha)\times\mathbf{F}_\alpha,\quad \mathbf{M}_1=-\sum_\alpha m_\alpha(\boldsymbol{\rho}_\alpha+\mathbf{r}_\alpha)\times\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot}$$

Здесь использованы формулы (1.1), (1.2), а суммирование распространяется на все точки $\mathbf{R}_\alpha$ системы S. Для точек твердого тела G в (1.9) нужно принять $\mathbf{r}_\alpha\equiv 0$.

Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение вспомогательную систему S^*, состоящую из твердого тела G и точек P_i, жестко закрепленных в своих равновесных положениях O_i. Таким образом, S^* — твердое тело массы

$$(1.10)\qquad m^*=m+\sum_{i=1}^N m_i$$

и для него все $\mathbf{r}_i=0$. Центр инерции тела S^* обозначим через C, а его тензор инерции относительно точки O через $\mathbf{J}$. Очевидно, тензор $\mathbf{J}$ постоянен в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Величины (1.9) могут быть представлены в виде

$$(1.11)\qquad \mathbf{K}=\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}+\sum_{i=1}^N m_i[\mathbf{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i+\mathbf{r}_i^{\cdot})+\boldsymbol{\rho}_i\times\mathbf{r}_i^{\cdot}]$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}^*+\sum_{i=1}^N[\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i+\boldsymbol{\rho}_i\times(\mathbf{F}_i-\mathbf{F}_i^*)]$$

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{M}_1^*-\sum_{i=1}^N m_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot}$$

Здесь и далее звездочка означает, что соответствующие величины подсчитываются для твердого тела S^*, т. е. при $\mathbf{r}_i\equiv 0$, $i=1,\ldots,N$.

Моменты $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{M}_1^*$ равны

$$(1.12)\qquad \mathbf{M}^*(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_0^{\cdot},\boldsymbol{\omega},\sigma,t)=\sum_\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha\times\mathbf{F}_\alpha^*$$

$$\mathbf{M}_1^*=-\sum_\alpha m_\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha\times\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot}$$

Момент $\mathbf{M}^*$ может зависеть от переменных, характеризующих движение твердого тела S^*, а именно от $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_0^{\cdot}$, $\boldsymbol{\omega}$, t и от векторного параметра σ, определяющего ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$. В качестве компонентов вектора σ могут фигурировать, например, углы Эйлера или направляющие косинусы системы $Ox_1x_2x_3$ относительно $OX_1X_2X_3$. Вектор σ удовлетворяет обычным кинематическим уравнениям для твердого тела (например, кинематическим уравнениям Эйлера), которые сокращенно запишем в виде

$$(1.13)\qquad \sigma^{\cdot}=f(\sigma,\boldsymbol{\omega})$$

Пусть движение точки O задано, т. е. $\mathbf{R}_0(t)$ — известная функция времени. Например, это имеет место, если у тела G есть неподвижная точка.

Тогда движение системы S полностью описывается уравнениями (1.5), (1.8), (1.13) и соотношениями (1.1) — (1.4), (1.6), (1.7), (1.11), (1.12). В этом случае момент сил инерции $\mathbf{M}_1^*$ из (1.12) зависит лишь от ориентации σ и от t посредством $\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot}(t)$.

Если же движение точки O не задано, то к указанным уравнениям нужно добавить уравнение количеств движения системы S. В этом случае в качестве полюса O удобно принять центр инерции C тела S^*. Тогда, учитывая второе равенство (1.12), имеем

(1.14) $$\sum_\alpha m_\alpha \rho_\alpha \equiv 0, \quad \mathbf{M}_1^* = 0$$

Уравнение изменения количества движения примет вид

(1.15) $$m^*\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot} = \mathbf{F}^* + \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i^* - m_i \mathbf{r}_i^{\cdot\cdot})$$

Здесь m^* дано формулой (1.10), а $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^*(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0^{\cdot}, \sigma, \boldsymbol{\omega}, t)$ — главный вектор всех внешних сил, действующих на твердое тело S^*, т. е. при условии $\mathbf{r}_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, N$. Полученные уравнения движения будут исследованы и упрощены на основе принимаемых ниже допущений.

2. Введем в рассмотрение три характерных масштаба времени: характерный период T_1 свободных упругих колебаний точек P_i относительно тела G, характерное время T_2 затухания этих колебаний и характерное время T_3 движения системы S как целого. Например, можно считать, что $T_3 \sim \omega^{-1}$. Предполагаем, что введенные масштабы времени связаны неравенствами

(2.1) $$T_1 \ll T_2 \ll T_3$$

Если выполнены условия (2.1), то свободные упругие колебания затухнут за время T_2, много меньшее времени T_3 оборота тела вокруг центра масс. Поэтому при исследовании эволюции движения системы на интервалах времени порядка T_3 и больших свободными колебаниями можно пренебречь, учитывая лишь вынужденные движения точек P_i под действием внешних сил и сил инерции. Чтобы выполнялись условия (2.1), положим в уравнениях (1.6)

(2.2) $$C = \varepsilon^{-2}C^\circ, \quad B = \delta\varepsilon^{-1}B^\circ$$

Здесь C°, B° — матрицы с ограниченными элементами, а ε и δ — безразмерные малые параметры, подчиненные условиям

(2.3) $$0 < \varepsilon \ll \delta \ll 1$$

В предельном случае $\varepsilon \to 0$, соответствующем бесконечно большой жесткости упругих связей, равенства (1.5), (2.2) дают $q \equiv 0$. Из соотношений (1.3) получаем тогда $\mathbf{r}_i \equiv 0$ для $i = 1, \ldots, N$. Следовательно, уравнения (1.8), (1.11), (1.15) с учетом (1.2) при $\varepsilon = 0$ дают

(2.4) $$\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}_1^*, \quad m^*\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot} = \mathbf{F}^*$$

Уравнения (2.4) представляют собой уравнения движения твердого тела S^*, в которое превращается система S при $\varepsilon \to 0$.

В случае малых положительных ε, δ уравнение (1.5) при условиях (2.2) приобретает вид

$$\varepsilon^2 A q^{\cdot\cdot} + \delta\varepsilon B^\circ q^{\cdot} + C^\circ q = \varepsilon^2 Q \tag{2.5}$$

Приближенное решение уравнения (2.5) с малыми параметрами при производных (2.3) может быть построено при помощи асимптотических методов (см., например, [8]) и состоит из регулярной части и решения типа пограничного слоя, быстро затухающего при удалении от начального момента времени.

Рассмотрим сначала свободные упругие колебания, описываемые однородной системой (2.5) при $Q = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(\varepsilon^2\lambda^2 A + \delta\varepsilon\lambda\, B^\circ + C^\circ) = 0 \tag{2.6}$$

Перейдем от обобщенных координат q к нормальным координатам, в которых две положительно-определенные матрицы A и C° одновременно приводятся к диагональному виду [7]. Матрица A при этом преобразовании переходит в единичную матрицу I, матрица C° — в диагональную матрицу $C_1{}^\circ$ с положительными диагональными элементами, а матрица B° — в некоторую положительно-определенную матрицу $B_1{}^\circ$. Характеристическое уравнение (2.6) принимает вид

$$\det(\Lambda^2 I + \delta\Lambda B_1{}^\circ + C_1{}^\circ) = 0, \quad \Lambda = \varepsilon\lambda \tag{2.7}$$

Корни уравнения (2.7) найдем в виде разложений по малому параметру δ. Получим

$$\Lambda_j = \pm i (C_1{}^\circ)_{jj} - {}^1/_2\delta (B_1{}^\circ)_{jj} + O(\delta^2), \quad j = 1, \ldots, n \tag{2.8}$$

Здесь индексы jj указывают диагональные элементы матриц; эти элементы положительны. Возвращаясь к переменной λ из (2.7), получим из (2.8)

$$\lambda_j = \pm i\Omega_j - {}^1/_2\delta\varepsilon^{-1}(B_1{}^\circ)_{jj} + O(\delta\varepsilon^{-1}) \tag{2.9}$$

$$\Omega_j = \varepsilon^{-1}(C_1{}^\circ)_{jj}, \quad j = 1, \ldots, n$$

Величины Ω_j — это собственные частоты колебаний консервативной системы, в которую переходит система (1.5) при $B = 0$. Из равенств (2.9) следуют оценки

$$T_1 = O(\varepsilon^{-1}), \quad T_2 = O(\varepsilon^{-1}\delta), \quad T_3 = O(1) \tag{2.10}$$

Последняя оценка (2.10) вытекает из независимости T_3 от параметров ε, δ. Из соотношений (2.10), (2.3) следует, что неравенства (2.1) выполнены. Свободные колебания, отвечающие собственным числам (2.9), представляют собой быстро затухающую часть решения типа пограничного слоя. Этими колебаниями можно пренебречь вдали от начального момента времени, т. е. при временах порядка T_3 и больших.

Регулярную по ε, δ часть решения системы (2.5) найдем в виде разложения по степеням величин ε^2 и $\varepsilon\delta$. Учитывая неравенства (2.3), запишем

$$q = \varepsilon^2 q^{(0)} + \varepsilon^3\delta q^{(1)} + O(\varepsilon^4) \tag{2.11}$$

Подставляя разложение (2.11) в уравнение (2.5) и приравнивая коэффициенты при степенях параметров ε, δ, получим

(2.12) $$q^{(0)} = (C^0)^{-1}Q^*, \quad q^{(1)} = -(C^0)^{-1}B^0 q^{(0)\cdot}$$

Здесь Q^* — вектор обобщенных сил, в которых нужно положить $q \equiv 0$. Следовательно, силы Q_j^* отвечают твердому телу S^* и подсчитываются по формулам (1.6), (1.7) при $r_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots, N$. Из этих формул имеем

(2.13) $$Q_j^* = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{H}_{ij}\{\mathbf{F}_i^* - m_i[\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\rho}_i]\}$$

$$\mathbf{F}_i^* = \mathbf{F}_i(\mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\rho}_i, \mathbf{R}_0^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i, t); \quad i = 1, \ldots, N; \quad j = 1, \ldots, n$$

Возвращаясь к исходным обозначениям (2.2), запишем решение (2.11), (2.12) в виде

(2.14) $$q = C^{-1}[Q^* - BC^{-1}(Q^*)^{\cdot}] + O(\varepsilon^4)$$

Это решение описывает малые вынужденные движения точек P_i относительно тела G.

3. Чтобы получить упрощенные уравнения движения системы S при сделанных предположениях, нужно подставить решение (2.14) в соотношения (1.8), (1.11), (1.15). Заметим, что согласно (2.2) вектор q из (2.14) имеет величину порядка ε^2. Таков же порядок и векторов $\mathbf{r}_i$, определяемых формулой (1.3). Учитывая это, приведем уравнения (1.8), (1.11), (1.15) к виду

(3.1) $$\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}_1^* + \boldsymbol{\mu}, \quad m^*\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot} = \mathbf{F}^* + \boldsymbol{\varphi}$$

(3.2) $$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{N}\Big\{\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^* + \boldsymbol{\rho}_i \times \Big(\frac{\partial \mathbf{F}_i^*}{\partial \mathbf{R}_i}\cdot\mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{F}_i^*}{\partial \mathbf{R}_i^{\cdot}}\cdot\mathbf{r}_i^{\cdot}\Big) -$$

$$- m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_0^{\cdot\cdot}) - m_i[\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) + \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{r}_i^{\cdot}]^{\cdot}\Big\} + O(\varepsilon^4)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial \mathbf{F}_i^*}{\partial \mathbf{R}_i}\cdot\mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{F}_i^*}{\partial \mathbf{R}_i^{\cdot}}\cdot\mathbf{r}_i^{\cdot} - m_i\mathbf{r}_i^{\cdot\cdot}\Big) + O(\varepsilon^4)$$

Здесь $\partial\mathbf{F}_i^* / \partial\mathbf{R}_i$ и $\partial\mathbf{F}_i^* / \partial\mathbf{R}_i^{\cdot}$ — матрицы частных производных функций $\mathbf{F}_i^*$ из (2.13) по компонентам их векторных аргументов.

Уравнения (3.1) аналогичны уравнениям движения (2.4) твердого тела S^* и отличаются от них слагаемыми $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\varphi}$. Эти слагаемые можно трактовать соответственно как главный момент относительно точки O и главный вектор сил, действующих на твердое тело S^* и обусловленных наличием упругих и диссипативных элементов. Векторы $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\varphi}$ из (3.2) линейно зависят от векторов $\mathbf{r}_i$ и их производных и содержат слагаемые порядков ε^2 и $\varepsilon^3\delta$. Слагаемые $O(\varepsilon^2)$ отвечают внутренним упругим силам, а слагаемые $O(\varepsilon^3\delta)$ — диссипативным силам.

Покажем, что векторы $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\varphi}$ с точностью до величин порядка ε^4 могут быть выражены только через переменные $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_0^{\cdot}$, σ, $\boldsymbol{\omega}$, t, характеризующие движение твердого тела S^*. Для этого сначала заменим в (3.2) производные $\mathbf{r}_i^{\cdot}$, $\mathbf{r}_i^{\cdot\cdot}$ при помощи формулы (1.2), затем выразим получающиеся при этом векторы $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_i'$, $\mathbf{r}_i''$ через q, $q^{\cdot}$, $q^{\cdot\cdot}$ при помощи формулы (1.3). (При дифференцировании (1.3) следует учесть, что векторы $\mathbf{H}_{ij}$ постоянны в системе координат $Ox_1x_2x_3$.) После этого векторы μ, φ будут зависеть от вектора q и его производных, которые исключим при помощи формул (2.14) и (2.13). В результате получим векторы μ, φ, как функции векторов $\mathbf{R}_0$, ω и их производных, а также от векторов $\mathbf{H}_{ij}$, ρ_i, которые известны и постоянны в системе координат $Ox_1x_2x_3$. В выражения для μ, φ войдут высшие производные векторов $\mathbf{R}_0$, ω, так что уравнения (3.1) формально будут иметь более высокий порядок, чем обычные уравнения динамики твердого тела. Однако, не нарушая точности, эти высшие производные можно исключить.

Для этого заметим, что уравнения движения (2.4) твердого тела S^* всегда можно разрешить относительно высших производных, т. е. относительно ω' и $\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot}$, получив зависимости

$$\omega' = f_1(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0^{\cdot}, \sigma, \omega, t), \quad \mathbf{R}_0^{\cdot\cdot} = f_2(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0^{\cdot}, \sigma, \omega, t) \tag{3.3}$$

Дифференцируя равенства (3.3) с учетом (1.13), можно получить выражения также для высших производных ω'', $\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot\cdot}$ и т. д. через те же переменные $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_0^{\cdot}$, σ, ω, t. Так как полученные уравнения движения деформируемого тела (3.1) отличаются от уравнений движения твердого тела (2.4) слагаемыми μ, φ порядка ε^2, то выражения (3.3) и их производные будут справедливы также и для уравнений (3.1) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Поэтому подстановка выражений (3.3) и их производных в формулы (3.2) для величин μ, φ, которые сами имеют порядок ε^2, приведет к погрешности $O(\varepsilon^4)$, что лежит в пределах точности равенств (3.2).

Итак, исключая производные ω', ω'', $\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot}$, $\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot\cdot}$ и т. д. при помощи равенств (3.3) и их производных, получим искомые зависимости вида

$$\mu = \mu(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0^{\cdot}, \sigma, \omega, t), \quad \varphi = \varphi(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0^{\cdot}, \sigma, \omega, t) \tag{3.4}$$

с погрешностью $O(\varepsilon^4)$. Функции (3.4) подобно моменту $\mathbf{M}^*$ из (1.12) и силе $\mathbf{F}^*$ из (1.15) зависят только от параметров движения твердого тела S^*. Поэтому уравнения (3.1) вместе с (3.4), (1.13) образуют замкнутую систему, аналогичную уравнениям движения твердого тела. Эти уравнения описывают эволюционные движения деформируемой системы S на интервалах времени, много бóльших времени затухания собственных упругих колебаний. Величины μ, φ здесь играют роль малых возмущений, поэтому для интегрирования полученной системы можно использовать различные методы малого параметра, в частности, метод осреднения.

Явный вид зависимостей (3.4) не приводится ввиду его громоздкости, однако описанная выше процедура преобразований, использующая соотношения (3.2), (1.2), (1.3), (2.13), (2.14), (2.4), (3.3), позволяет однозначно построить функции (3.4).

4. Ограничимся двумя примерами, в которых установим структуру функций (3.4). В обоих примерах предполагаем, что момент $\mathbf{M}^*$, а также все внешние силы $\mathbf{F}_i$, действующие на точки P_i, равны нулю. Тогда согласно (2.13), (3.2) имеем

$$Q_j^* = -\sum_{i=1}^{N} \mathbf{H}_{ij} m_i [\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot} + \omega \times (\omega \times \rho_i) + \omega' \times \rho_i], \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.1}$$

$$\mu = -\sum_{i=1}^{N} m_i \{\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_0^{\cdot\cdot} + [\mathbf{r}_i \times (\omega \times \rho_i) + \rho_i \times \mathbf{r}_i^{\cdot}]^{\cdot}\}, \quad \varphi = -\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i^{\cdot\cdot}$$

В первом примере, кроме того, будем считать, что точка O неподвижна, $\mathbf{R}_0 \equiv 0$, и тогда согласно (1.12) имеем, $\mathbf{M}_1^* = 0$.

Во втором примере вся система предполагается свободной от внешних сил, $\mathbf{F}^* = 0$. Выбирая здесь в качестве полюса O центр инерции C системы S^*, имеем согласно (1.14), что $\mathbf{M}_1^* = 0$.

Таким образом, в обоих примерах $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_1^* = 0$, и первое уравнение (3.1) дает

$$\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\mu} = O(\varepsilon^2) \tag{4.2}$$

Первое равенство (3.3) принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}' = -\mathbf{J}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}) + O(\varepsilon^2) \tag{4.3}$$

Дифференцируя равенство (4.3), получаем, что k-я производная $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$ будет с точностью до членов порядка ε^2 однородным многочленом степени $k+1$ от компонентов вектора $\boldsymbol{\omega}$, где $k = 0, 1, \ldots$.

Для первого примера ($\mathbf{R}_0 \equiv 0$) из первого равенства (4.1) заключаем, что Q_j^* — однородные многочлены от $\boldsymbol{\omega}$ второй степени, имеющие порядок $m_0 l\omega^2$. Здесь m_0 — характерная масса точек P_i, а l — характерный линейный размер порядка ρ_i. Тогда из равенства (2.14) следует, что q — сумма однородных многочленов второй и третьей степеней от $\boldsymbol{\omega}$, имеющих порядки $m_0 lc^{-1}\omega^2$ и $m_0 lc^{-2}b\omega^3$ соответственно. Здесь c — характерная жесткость упругих связей (величина порядка элементов матрицы C), b — характерный коэффициент диссипации (величина порядка элементов матрицы B). Такую же структуру имеют векторы $\mathbf{r}_i$, $i = 1, \ldots, N$, определяемые по формуле (1.3). Отметим, что каждое дифференцирование повышает согласно (4.3) степени многочленов от $\boldsymbol{\omega}$ на единицу. Поэтому вектор $\boldsymbol{\mu}$ из (4.1) при $R_0 \equiv 0$ — сумма однородных многочленов четвертой и пятой степеней от компонентов ω_j вектора $\boldsymbol{\omega}$, а именно

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_4(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\mu}_5(\boldsymbol{\omega}) + O(\varepsilon^4) \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{\mu}_4(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \mathbf{D}_{jklm}\omega_j\omega_k\omega_l\omega_m = O\left(\frac{m_0 l^2\omega^4}{c}\right) = O(\varepsilon^2)$$

$$\boldsymbol{\mu}_5(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j,k,l,m,n=1}^{3} \mathbf{E}_{jklmn}\omega_j\omega_k\omega_l\omega_m\omega_n = O\left(\frac{m_0 lb\omega^3}{c^2}\right) = O(\varepsilon^3\delta)$$

Порядки величин в (4.4) указаны в соответствии с порядками (2.2). Коэффициенты $\mathbf{D}_{jklm}$, $\mathbf{E}_{jklmn}$ постоянны в системе координат, связанной с твердым телом, и выражаются через постоянные m_j, $\mathbf{J}$, C°, B°, $\mathbf{H}_{ij}$, $\boldsymbol{\rho}_i$. Многочлен $\boldsymbol{\mu}_4$ есть момент упругих сил, а $\boldsymbol{\mu}_5$ — момент диссипативных сил.

Обратимся ко второму примеру ($\mathbf{F}^* = 0$). Здесь из второго уравнения (3.1) получим $\mathbf{R}_0^{\cdot\cdot} = O(\varepsilon^2)$. Поэтому величины Q_j^*, $\boldsymbol{\mu}$ из (4.1) с принятой точностью $O(\varepsilon^4)$ имеют тот же вид, что и в первом примере. Возмущающий момент $\boldsymbol{\mu}$ снова представляется формулами (4.4), а возмущающая сила $\boldsymbol{\varphi}$ из (4.1) — аналогичными соотношениями как сумма однородных многочленов четвертой и пятой степеней от $\boldsymbol{\omega}$.

Уравнения (4.2), (4.4) для случая одной точки P_i на упругой связи ($N = 1$) были первоначально получены в работе [5].

Для некоторых частных случаев (твердое тело S^* обладает симметрией) выражения (4.4) явно вычислены, а уравнение (4.2) с моментом (4.4) проинтегрировано в работе [5].

5. Аналогично изложенному можно рассмотреть твердое тело, к которому вместо дискретных точек присоединены сплошные упругие тела с линейной диссипацией, стержни, пластины или оболочки. Ход рассуждений остается прежним, лишь вместо решения (2.14) следует взять соответствующее квазистатическое решение уравнений упругого равновесия под действием внешних сил и сил инерции. Нетрудно убедиться, что уравнения вида (3.1), (3.4) и их частный случай — уравнения (4.2), (4.4) — остаются при этом справедливыми. Так, в случае свободной системы силы инерции (4.1) — квадратичные формы от $\boldsymbol{\omega}$, поэтому упругие смещения также пропорциональны квадратам компонентов вектора $\boldsymbol{\omega}$. Повторяя рассуждения п. 4, приходим к соотношениям

вида (4.4). Условие справедливости уравнений (3.1), (3.4) или (4.2), (4.4), по-прежнему имеет вид (2.1), где T_1 — наибольший период собственных упругих колебаний, T_2 — характерное время их затухания, T_3 — характерное время движения системы как целого $T_3 \sim \omega^{-1}$. Вводя для сплошного упругого тела минимальную собственную частоту упругих колебаний $\Omega \sim T_1^{-1}$, неравенства (2.1) можно представить в одной из следующих форм:

$$\Omega \gg T_2^{-1} \gg \omega, \quad V \gg lT_2^{-1} \gg v$$

Здесь l — характерный линейный размер системы, $V \sim \Omega l$ — характерная скорость упругих волн, $v \sim \omega l$ — характерная линейная скорость вращения системы.

Отметим, что явления резонанса между собственным вращением тела и одним из собственных упругих колебаний не охватываются рассматриваемой теорией.

6. Сопоставим уравнения (4.2), (4.4) с результатами, полученными ранее [9] для движения твердого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость при различных числах Рейнольдса. Пусть, например, число Рейнольдса мало: $\mathrm{Re} = \omega l^2 \nu^{-1} \ll 1$. Здесь ω — угловая скорость тела, l — характерный линейный размер полости, ν — кинематическая вязкость жидкости. Тогда [9] уравнения движения свободного твердого тела относительно центра масс могут быть приведены к виду (4.2), причем вектор $\mu(\omega)$ — однородный многочлен третьей степени от ω с коэффициентами, зависящими от формы полости. Такой же результат получен [9] для свободного гиростата, внутри которого могут вращаться маховики или сферы, если между твердым телом и вращающимися внутренними массами действуют силы вязкого трения. Таким образом, по сравнению с диссипацией энергии вязкой жидкостью в полости твердого тела при больших числах Рейнольдса, диссипация энергии в процессе внутренних упругих колебаний приводит к аналогичной, но более сложной картине эволюции движения тела относительно центра масс.

Поступила 25 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomson W. T.* Introduction to space dynamics. N. Y.— London, Wiley, 1961.
2. *Haseltine W. R.* Passive damping of wobbling satellites: General stability theory and example. J. Aerospace Sci., 1962, vol. 29, No. 5, p. 543—549.
3. *Colombo G.* The motion of satellite 1958 Epsilon around its center of mass. The Smithsonian Contributions to Astrophysics, 1963, vol. 6, p. 149—163.
4. *Морозов В. М., Рубановский В. Н., Румянцев В. В., Самсонов В. А.* О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
5. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
6. *Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О.* Колебания твердых тел. М., «Наука», 1976.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966.
8. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
9. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1968.