Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

ПРОГРАММНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ДЛЯ ПОЗИЦИОННОГО ИГРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Статья продолжает работу [1]. В ней для линейных эволюционных систем развивается метод вспомогательных программных конструкций [2].

1. Рассмотрим эволюционную систему

$$y^{\cdot} = A(t)y + f(t, u, v),\ u \in P,\ v \in Q \tag{1.1}$$

в гильбертовом пространстве $\{y\} = Y$. Ограничимся случаями, когда решения $y[t] = y[t, t_*, y_*, u[\cdot], v[\cdot]]$, $t \geqslant t_*$ можно трактовать так или иначе исходя из слабого равенства Коши

$$\langle q \cdot y[t] \rangle = \langle q \cdot T(t, t_*) y_* \rangle + \int_{t_*}^{t} \langle q \cdot T(t, \tau) f(\tau, u[\tau], v[\tau]) \rangle d\tau \tag{1.2}$$

Здесь $T(t, \tau)$, $t \geqslant \tau$ — подходящий полугрупповой оператор, q — произвольный элемент из Y, $\langle q \cdot y \rangle$ — скалярное произведение. Символ $\| y \|$ будет обозначать норму y. Пусть $y_\vartheta[t]$ — величина, получающаяся из $y[t]$ (1.2) преобразованием $T(\vartheta, t)$. Пусть A_γ — некоторый линейный оператор из Y в некоторое гильбертово пространство $Y^{(\gamma)}$ и $y_\vartheta^{(\gamma)}[t]$ — величина, которая получается из $y_\vartheta[t]$ преобразованием A_γ. Предположим, что для эволюционной системы [1]

$$y^{(\gamma)}[\cdot] = \{y^{(\gamma)}[t],\ t_* \leqslant t \leqslant t^*\} \in \{y^{(\gamma)}[\cdot] \mid y^{(\gamma)}[t_*],\ \Pi[t_*, t^*)\} \tag{1.3}$$

индуцированной (1.2) и преобразованием $A_\gamma T(\vartheta, t)$, можно построить w-модель, которая приближает (1.3) снизу [1] и описывается унифицированным дифференциальным уравнением [3]

$$w^{\cdot} = q\xi(t, q) + p,\quad \| q \| = 1,\quad p \in P(q) \tag{1.4}$$

где $P(q)$ — выпуклый слабый компакт в $Y^{(\gamma)}$, такой, что $\langle p \cdot q \rangle \geqslant 0$ при $p \in P(q)$ и в $P(q)$ есть элемент p_*, для которого $\langle p_* \cdot q \rangle = 0$. Компакты $P(q)$ предполагаем равномерно ограниченными. В терминах из [1] действием $F^{(2)}[t_*, t^*)$ на модель (1.4) будет выбор постоянного управления $q[t] = q_*$, $t_* \leqslant t < t^*$, действием $F^{(1)}[t_*, t^*)$ будет выбор слабо измеримого управления $p[t]$, $t_* \leqslant t < t^*$. Функцию $\xi(t, q)$ в (1.4) согласно [3] можно искать из условия

$$\xi(t_*, q) = \lim_{t^* \to t_* + 0} \sup_{\text{п}} \inf_{y^{(\gamma)}[t^*]} \sup \left(\frac{\langle (y^{(\gamma)}[t^*] - y^{(\gamma)}[t_*]) \cdot q \rangle}{t^* - t_*} \right) \tag{1.5}$$

При выполнении для преобразования $A_\gamma T$ (ϑ, t) условий из [1] (см. стр. 3) можно решать задачу о сближении $y[t]$ с заданным множеством M на основании решения аналогичной задачи для $y^{(\gamma)}[t]$. А эту задачу, в свою очередь, можно решать на основе приближающей модели (1.4). Поэтому предмет данной статьи составит задача о сближении с некоторым множеством M для движений $w[t]$ (1.4).

2. Стратегия [1] назначает управление] $p[\cdot] = \{p[t], \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}\}$ как функцию от $\{\tau_i, w[\tau_i], \tau_{i+1}, q[\tau_i]\}$ так, что

$$p[\cdot] = U(\tau_i, w[\tau_i], \tau_{i+1}, q[\tau_i]) \tag{2.1}$$

При заданных $w[t_0] = w_0$, $\vartheta > t_0$ и множестве

$$M = [\{t, w\} : t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, w \in M(t)] \tag{2.2}$$

задача состоит в отыскании стратегии P, которая для всякого порождаемого ею движения $w[t] = w[t, t_0, w_0, P, q[\cdot]]$ (1.4) обеспечивает включение

$$w[\tau] \in M(t) \tag{2.3}$$

по крайней мере для одного $\tau \in [t_0, \vartheta]$, какой бы ни оказалась последовательность $q[\tau_i]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, \tau_0 = t_0)$.

Индекс γ в обозначении гильбертова пространства Y в дальнейшем опустим. Это пространство Y с сильной топологией будем обозначать через Y_s, пространство Y со слабой топологией обозначим через Y_σ. Функцию $\xi(t, q)$ будем предполагать непрерывной в $[t_0, \vartheta] \times Y_s$ и ограниченной на слабом компакте $\{\|q\| \leqslant 1\}$. Будем предполагать функцию $\xi(t, q)$ положительно-однородной по q, т. е. $\xi(t, \alpha q) = \alpha\xi(t, q)$ при $\alpha \geqslant 0$. Примем условие

$$\max_q \min_p \langle q^* \cdot (q\xi(t, q) + p)\rangle = \xi(t, q^*)| \tag{2.4}$$

$$\|q\| = 1, \quad p \in P(q)$$

при всяком q^*, $\|q^*\| = 1$. Под движением $w[t] = w[t, t_*, w_*, p_*[\cdot], q_*[\cdot]]$ будем понимать слабое решение $w[t]$ (1.4), определенное равенством

$$\langle q \cdot w[t]\rangle = \langle q \cdot w_*\rangle + \int_{t_*}^{t} \langle q \cdot (q_* \xi(\tau, q_*) + p_*[\tau])\rangle \, d\tau \tag{2.5}$$

которое должно быть справедливым при всяком q.

Пусть выбрано некоторое топологическое пространство $\{\zeta\}$ параметра ζ и для всякого значения $\eta \in [t_0, \vartheta]$ определено множество $\{\zeta\}_\eta \subset \{\zeta\}$. Множества $\{\zeta\}_\eta$ будем полагать компактными и удовлетворяющими условию

$$\{\zeta\}_{\eta_*} = \bigcap_\eta \{\zeta\}_\eta, \quad \eta > \eta_* \tag{2.6}$$

Примем, что выбраны параметрические совокупности множеств

(2.7) $\quad M[\zeta] = [\{t, y\} : \eta \leqslant t \leqslant \vartheta,\ y \in M(t, \zeta)]$

и функций $\xi(t, q, \zeta)$, где $\zeta \in \{\zeta\}_\eta$, $\eta \in [t_0, \vartheta]$. Множества $M(t, \zeta)$ ограничены, выпуклы, замкнуты и удовлетворяют включению

(2.8) $\quad M(t, \zeta) \subset M(t)$.

Кроме того, из всякой допустимой последовательности $\{t_k\, \zeta_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ можно выделить подпоследовательность $\{t_j, \zeta_j\}$, для которой множества $M(t_j, \zeta_j)$ будут сходиться к множеству $M(t_*, \zeta_*)$ по включению.

Сделаем одно замечание. Некоторые сечения $M(t)$ множества M могут быть пустыми. Поэтому в дальнейшем для тех выражений, в которых переменная t фигурирует как аргумент для $M(t)$ или для $M(t, \zeta)$, следовало бы делать оговорку, что речь идет только о тех значениях t, для которых эти множества непусты. Такую оговорку будем опускать, однако имея ее в виду. Будем предполагать во всяком случае, что множества $M(\vartheta)$ и $M(\vartheta, \zeta)$ непусты.

При фиксированном значении ζ функция $\xi(t, q, \zeta)$ непрерывна в $[\eta, \vartheta] \times Y_s$ и полунепрерывна сверху в $[\eta, \vartheta] \times Y_\sigma$; при фиксированном q эта функция полунепрерывна снизу по ζ.

Построим функцию

(2.9) $$\varepsilon^\circ(t_*, w_*, \tau, \zeta) = \max_{\|q\|=1}\left(\langle q \cdot w_*\rangle + \int_{t_*}^{\tau} \xi(t, q, \zeta)\, dt - \rho(q, \tau, \zeta)\right)$$

для $t_* \in [\eta, \tau]$, $\tau \in [t_*, \vartheta]$. Здесь $\rho(q, \tau, \zeta)$ — опорная функция множества $M(\tau, \zeta)$, т. е.

(2.10) $$\rho(q, \tau, \zeta) = \max_y \langle q \cdot y\rangle, \quad y \in M(\tau, \zeta)$$

На основе (2.9) построим функцию

(2.11) $$\varepsilon_0(t, \omega) = \min_{\{\tau, \zeta\}} \varepsilon_0(t, w, \tau, \zeta), \ \tau \in [t, \vartheta],\ \zeta \in \{\zeta\}_t$$

Минимум в (2.11) действительно достигается при сделанных предположениях на некоторой паре $\{\tau^\circ, \zeta^\circ\}$, как это следует из свойств функции $\varepsilon^\circ(t, w, \tau, \zeta)$, обсуждаемых ниже.

Рассмотрим следующие полупространства:

(2.12) $\quad Y(t, q) = [y : \langle q \cdot y\rangle \geqslant \xi(t, q)]$

(2.13) $\quad Y^*(t, q, \zeta) = [y : \langle q \cdot y\rangle \leqslant \xi(t, q, \zeta)]$

Условие 2.1. Какова бы ни была позиция $\{t_*, w_*\}$, для которой

(2.14) $\quad \varepsilon_0(t_*, w_*) > 0, \quad t_* < \vartheta, \ \tau^\circ > t_*$

для всякого q^*, $\| q^* \| = 1$ найдется по крайней мере одна минимизирующая пара $\{\tau^\circ, \zeta^\circ\}$ из (2.11), для которой

(2.15) $$Y(t_*, q^*) \cap \left(\bigcap_{q^\circ} Y^*(t_*, q^\circ, \zeta^\circ)\right) \neq \varnothing$$

где пересечение берется по множеству $S(t_*, w_*, \tau^\circ, \zeta^\circ)$ всех максимизирующих элементов q° из (2.9). Символ $\varnothing$ означает пустое множество.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть $\varepsilon_0(t_0, w_0) = 0$. Если выполнено условие 2.1, то существует стратегия U, которая решает задачу о сближении (2.3).

3. Обсудим свойства функции ε°. Можно проверить, что при условии $\varepsilon^\circ(t_*, w_*, \tau, \zeta) > 0$ максимум в (2.9) достигается на элементах q° с единичной нормой. При фиксированных τ и ζ функция $\varepsilon^\circ(t, w, \tau, \zeta)$ непрерывна в $[\eta, \tau] \times Y_s$ и полунепрерывна снизу в $[\eta, \tau] \times Y_\sigma$. Множество $S_\varepsilon(t, w, \tau, \zeta)$ всех максимизирующих элементов q° из (2.9) для позиции $\{t, w\}$, где $\varepsilon^\circ(t, w, \tau, \zeta) > 0$, компактно в Y_s. В области $\varepsilon^\circ(t, w, \tau, \zeta) > 0$ множества $S(t, w, \tau, \zeta)$ сильно полунепрерывны сверху по включению по изменению $\{t, \omega\}$ в $[\eta, \tau] \times Y_s$.

Доказательство теоремы 2.1 использует следующий факт.

Лемма 3.1 Пусть выполнено условие 2.1 и

$$\varepsilon_0(t^*, w^*) > 0 \tag{3.1}$$

причем для всех минимизирующих τ_0 из (2.11) для позиции $\{t^*, w^*\}$ справедливо неравенство

$$\tau^\circ > t^* + \gamma, \quad \gamma > 0 \tag{3.2}$$

Тогда при всяких q^*, $\| q^* \| = 1$ и $\alpha > 0$ можно выбрать $\delta^* > 0$ и управление $p[t] = p^*$, $t \geqslant t^*$, которое удовлетворяет условию

$$\langle q^* \cdot p^* \rangle \geqslant 0 \tag{3.3}$$

и такое, что вдоль решения $w[t] = w[t, t^*, w^*, p^*, q^*]$ уравнения

$$w^\cdot = q^* \xi(t, q^*) + p^* \tag{3.4}$$

будет выполнено неравенство

$$\varepsilon_0(t, w[t]) \leqslant \varepsilon_0(t^*, w^*) + \alpha(t - t_*) \tag{3.5}$$

при всех $t \in [t^*, t^* + \delta^*]$.

Зафиксируем минимизирующие значения $\{\tau^\circ, \zeta^\circ\}$ для данной позиции $\{t^*, w^*\}$. Вследствие неравенства $\varepsilon_0(t, w[t]) \leqslant \varepsilon^\circ(t, w[t], \tau^\circ, \zeta^\circ)$ при $t \in [t^*, t^* + \gamma]$ для доказательства леммы 3.1 достаточно доказать неравенство

$$\varepsilon^\circ(t, w[t], \tau^\circ, \zeta^\circ) \leqslant \varepsilon^\circ(t^*, w^*, \tau^\circ, \zeta^\circ) + \alpha(t - t^*) \tag{3.6}$$

Выберем $\{\tau^\circ, \zeta^\circ\}$ и p^* (3.3) из условия

$$(p^* + q^* \xi(t^*, q^*)) \in \bigcap_{q^\circ} Y^*(t^*, q^\circ, \zeta^\circ) \tag{3.7}$$

$$q^\circ \in S(t^*, w^*, \tau^\circ, \zeta^\circ)$$

в соответствии с условием (2.15). По определению ε° имеем при

$$\Delta\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ(t, w[t], \tau^\circ, \zeta^\circ) - \varepsilon^\circ(t^*, w^*, \tau^\circ, \zeta^\circ) = \langle q^\circ(t) \cdot w[t] \rangle + \tag{3.8}$$
$$+ \int_t^{\tau^\circ} \xi(\varphi, q^\circ(t), \zeta^\circ) d\varphi - \rho(q^\circ(t), \tau^\circ, \zeta^\circ) - \langle q^\circ(t^*) \cdot w^* \rangle -$$
$$- \int_{t^*}^{\tau^\circ} \xi(\varphi, q^\circ(t), \zeta^\circ) d\varphi - \rho(q^\circ(t^*), \tau^\circ, \zeta^\circ)$$

где $q^\circ(t)$ — максимизирующий элемент из (2.9) для позиции $\{t, w[t]\}$. По смыслу $q^\circ(t)$ имеем неравенство

$$\langle q^\circ(t)\cdot w^*\rangle + \int_{t^*}^{\tau^\circ} \xi(\varphi, q^\circ(t), \zeta^\circ)\,d\varphi - \rho(q^\circ(t), \tau^\circ, \zeta^\circ) \leqslant \langle q^\circ(t^*)\cdot w^*\rangle + \int_{t^*}^{\tau^\circ} \xi(\varphi, q^\circ(t^*), \zeta^\circ)\,d\varphi - \rho(q^\circ(t^*), \tau^\circ, \zeta^\circ) \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) следует неравенство

$$\Delta\varepsilon^\circ \leqslant \langle q^\circ(t)\cdot(w[t] - w^*)\rangle - \int_{t^*}^{t} \xi(\varphi, q^\circ(t), \tau^\circ, \zeta^\circ)\,d\varphi \tag{3.10}$$

Движение $w[t]$ (3.4) сильно непрерывно по t. Поэтому вследствие сильной полунепрерывности $S(t, w, \tau^\circ, \zeta^\circ)$ по $\{t, w\}$ из $[t^*, \tau^\circ] \times Y_s$ для любого $\varkappa > 0$ найдется $\delta_* > 0$, так что при $|t - t^*| \leqslant \delta_* < \gamma$ для любого $q^\circ(t)$ найдется элемент $q^\circ(t^*)$, удовлетворяющий неравенству

$$\| q^\circ(t) - q^\circ(t^*) \| \leqslant \varkappa \tag{3.11}$$

Но тогда вследствие непрерывности $\xi(t, q, \zeta^\circ)$ в $[t^*, \tau^\circ] \times Y_s$ получим из (3.10) в соответствии с (3.4) следующее неравенство:

$$\Delta\varepsilon^\circ \leqslant \langle q^\circ(t^*)\cdot(p^* + q^*\xi(t^*, q^*))\rangle(t - t^*) - \xi(t^*, q^*, \zeta^\circ)(t - t^*) + \alpha(t - t^*) \tag{3.12}$$

при условии $t - t^* \leqslant \delta(\alpha) = \delta^*$, где $\delta(\alpha) > 0$ — достаточно малое число. По выбору p^* (3.7) и по определению Y^* (2.13) из (3.12) получаем нужное неравенство (3.6), а вместе с ним и неравенство (3.5).

4. Обсудим свойства функции ε_0. Можно проверить, что функция $\varepsilon_0(t, w)$ полунепрерывна снизу в $[t_0, \vartheta] \times Y_\sigma$ и непрерывна справа по t в $[t_0, \vartheta] \times Y_s$ в тех позициях, $\{t_*, w_*\}$, где минимизирующие значения $\tau^\circ > t_*$. Далее, пусть для некоторой позиции $\varepsilon_0(t_*, w_*) > 0$ и все минимизирующие значения τ° из (2.11) удовлетворяют условию $\tau^\circ \geqslant t_* + \gamma_*$, $\gamma_* > 0$. Тогда можно указать $\delta > 0$ так, что для всех позиций $\{t, w\}$, удовлетворяющих условию

$$t - t_* \leqslant \delta, \quad t \geqslant t_*, \quad \| w - w_* \| \leqslant \delta \tag{4.1}$$

все минимизирующие значения τ° будут удовлетворять условию

$$\tau^\circ \geqslant t + \gamma, \quad \gamma > 0 \tag{4.2}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. Пусть выполнено условие 2.1 и для данной позиции $\{t_*, w_*\}$ выполнены неравенства

$$\varepsilon_0(t_*, w_*) > 0, \quad \tau^\circ > t_* + \gamma_*, \quad \gamma_* > 0 \tag{4.3}$$

Тогда при всяком q_*, $\|q_*\| = 1$ можно выбрать $\delta > 0$ и управление $p_*[t] \in P(q_*)$, $t \geqslant t_*$ так, что для соответствующего решения $w[t] = w[t, t_*, w_*, p_*[\cdot], q_*]$ уравнения (1.4) будет выполнено неравенство

$$\varepsilon_0(t, w[t]) \leqslant \varepsilon_0(t_*, w_*) \tag{4.4}$$

при всех $t \in [t_*, t_* + \delta]$.

Зададимся некоторым значением $\alpha > 0$. Рассмотрим пучок всех возможных движений $w[t] = w[t, t_*, w_*, p[\cdot], q_*]$, $t \geqslant t_*$ (1.4). Выделим из них те движения $w[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant \tau$, расстояние которых от точек $\{t, w\}$ из области

(4.5) $$\varepsilon_0(t, w) \leqslant \varepsilon_0(t_*, w_*) + \alpha(t - t_*)$$

при каждом фиксированном $t \in [t_*, \tau]$ не превышает $\alpha + \alpha(t - t_*)$. При этом вследствие непрерывности функции $\varepsilon_0(t, w)$ в $[t_*, \vartheta] \times Y_s$ справа по t и вследствие (4.2) можно указать $\delta > 0$, а затем выбирать $\alpha > 0$ настолько малыми, чтобы во всех упомянутых точках $\{t, w\}$ выполнялось условие

$$\varepsilon_0(t, w) > 0, \quad \tau^\circ \geqslant t + \gamma$$

Теперь можно утверждать, что при всяком выборе достаточно малого $\alpha > 0$ среди выделенных движений $w[t]$ найдется по крайней мере одно движение $w[t]$, определенное при $t_* \leqslant t \leqslant t_* + \delta$. Предположим от противного, что это не так. Пусть $t^* \leqslant t_* + \delta$ — верхняя грань значений τ, для которых определены движения $w[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant \tau$ выделенного класса. Предположим сначала, что среди выделенных движений $w[t]$ нет движений $\{w[t], t_* \leqslant t \leqslant t^*\}$. Тогда каждое движение $w[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant \tau$ продлим, выбирая $p[t] \in P(q_*)$, $\tau \leqslant t < t^*$ произвольным образом, до момента t^*. Рассмотрим среди этих движений слабо сходящуюся последовательность $w^{(k)}[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$, $k = 1, 2, \ldots$, для которой $\tau^{(k)} \to \tau^* - 0$. Слабый предел $\{w_*[t], t_* \leqslant t \leqslant t^*\}$ этой последовательности порождается некоторым слабо измеримым управлением $p_*[t] \in P(q_*)$ вследствие слабой компактности всех возможных управлений $p_*[t] \in P(q_*)$ (см. [4]). Но тогда вследствие полунепрерывности снизу функции $\varepsilon_0(t, w)$ в $[t_0, \vartheta] \times Y_s$ можно убедиться, что для всякой точки $w_*[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ найдется точка w, такая, что будет выполнено условие (4.5) и будет справедливо неравенство

$$\| w - w_*[t] \| \leqslant \alpha + \alpha(t - t_*)$$

Итак, построенное движение $\{w[t], t_* \leqslant t \leqslant t^*\}$ принадлежит к выделенному классу. Предположим, что $t^* < t_* + \delta$. Пусть w^* — точка, удовлетворяющая условиям

$$\| w^* - w_*[t^*] \| \leqslant \alpha + \alpha(t^* - t_*)$$

$$\varepsilon_0(t^*, w^*) \leqslant \varepsilon_0(t_*, w_*) + \alpha(t^* - t_*)$$

Выберем вектор $q^* = (w_*[t^*] - w^*) / \| w_*[t^*] - w^* \|$. Если $w_*[t^*] = w^*$, то можно выбрать любой вектор q^*, $\| q^* \| = 1$. В соответствии с леммой 3.1 можем выбрать $\delta^* > 0$ и управление p^* (3.3) так, что для соответствующего движения $w^*[t] = w[t, t^*, w^*, p^*, q^*]$, $t \geqslant t^*$, (3.4) будет справедливо неравенство

(4.6) $$\varepsilon_0(t, w^*[t]) \leqslant \varepsilon_0(t^*, w^*) + \alpha(t - t^*) \leqslant \varepsilon_0(t_*, w_*) + \alpha(t - t_*)$$

при всех $t \in [t^*, t^* + \delta^*]$. Если при этом выбрать управление $p[t] = p_* \in P(q_*)$, $t \geqslant t^*$ в соответствии с (2.4) из условия

$$\langle q^* \cdot (q_* \xi(t^*, q_*) + p_*) \rangle \leqslant \zeta(t^*, q^*)$$

то для порожденного им движения $w_*[t] = w[t, t^*, w_*, p_*, q_*]$ и движения $w^*[t]$ можно получить оценку

(4.7) $$\| w_*[t] - w^*[t] \| \leqslant \alpha + \alpha(t - t^*) + \alpha(t^* - t_*) = \alpha + \alpha(t - t_*)$$

для всех $t \in [t^*, t^* + \delta_{**}]$, где $\delta_{**} > 0$ — достаточно малое число. Таким образом, вследствие (4.6) и (4.7) движение $\{w_*[t], t_* \leqslant t \leqslant t^* + \varkappa\}$, где $\varkappa > 0$ — достаточно малое число, относится к выделенному классу движений $w[t]$. Но это противоречит выбору t^*. Полученное противоречие доказывает, что при выбранном $\delta > 0$ при любом достаточно малом $\alpha > 0$ найдется решение $\{w_*[t], t_* \leqslant t \leqslant t_* + \delta$, которое удовлетворяет нужным условиям. Слабый предел таких движений $\{w^{(k)}[t] : t_* \leqslant t \leqslant t_* + \delta\}$, $k = 1, 2, \ldots$, построенных для некоторой последовательности $\alpha_k \to 0$, и доставляет движение $w[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant t_* + \delta$, которое удовлетворяет условию (4.4). Это доказывает лемму.

Из леммы 4.1 выводится следующее утверждение.

Лемма 4. 2. Пусть позиция $\{t_*, w_*\}$ удовлетворяет условию

$$(4.8)\qquad \varepsilon_0(t_*, w_*) \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad t_* < \vartheta$$
$$w_* \notin M^{[\alpha]}(t, \zeta) \quad \text{при} \quad \alpha \in [0, \varepsilon], \quad \zeta \in \{\zeta_{t_*}\}$$

Тогда при всяких $\tau^* \in [t_*, \vartheta]$, q_*, $\|q_*\| = 1$ найдется по крайней мере одно управление $p[t] \in P(q_*)$, такое, что для соответствующего движения $w[t] = w[t, t_*, w_*, p[\cdot], q_*]$ (1.4) или выполнится условие

$$(4.9)\qquad w[\tau] \in M^{[\varepsilon]}(\tau, \zeta) \quad \text{при} \quad \zeta \in \{\zeta\}_\tau$$

при некотором значении $\tau \in [t_*, \tau^*]$ или выполнится неравенство

$$(4.10)\qquad \varepsilon_0(t, w[t]) \leqslant \varepsilon$$

при всех $t \in [t_*, \tau^*]$.

Здесь символ $M^{[\alpha]}$ означает замкнутую α-окрестность множества M.

В самом деле, рассмотрим пучок всех возможных движений $w[t] = w[t, t_*, w_*, p[\cdot], q_*]$, $t_* \leqslant t \leqslant \tau^*$ (1.4). Предположим, что ни для одного из них не выполняется условие (4.9). Пусть тогда от противного и условие (4.10) также не выполняется ни для одного такого движения $w[t]$. Пусть $t^* < \tau^*$ — верхняя грань тех $\tau \geqslant t_*$, для каждого из которых найдется движение $w[t]$, удовлетворяющее условию (4.10) при $t_* \leqslant t \leqslant \tau$. Как и при доказательстве леммы 4.1, можно убедиться, что тогда найдется движение $w[t]$, которое удовлетворяет условию (4.10) при $t_* \leqslant t \leqslant t^*$. При этом будет $\varepsilon_0(t^*, w[t^*]) \leqslant \varepsilon$ и $\tau^\circ > t^*$ для всех минимизирующих значений τ°, отвечающих позиции $\{t^*, w[t^*]\}$. Но тогда согласно лемме 4.1 это движение $w[t]$ можно продлить несколько за точку $t = t^*$ с сохранением неравенства $\varepsilon_0(t, w[t]) \leqslant \varepsilon$. Однако это противоречит определению числа $t^* < \tau^*$. Полученное противоречие доказывает лемму 4.2.

5. Доказательство теоремы 2.1 строится на основании материала из п. 4 следующим образом. Пусть выбрано разбиение $\Delta = \{\tau_i\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$. Пусть реализовалась позиция $w[\tau_i]$ ($\tau_i \geqslant \tau_0 = t_0$), для которой

$$\varepsilon_0(\tau_i, w[\tau_i]) = 0$$
$$w[\tau_i] \notin M(\tau_i, \zeta) \quad \text{при} \quad \zeta \in \{\zeta\}_{\tau_i}$$

и выбраны момент $\tau_{i+1} \in (\tau_i, \vartheta)$ и управление $q[t] = q[\tau_i]$, $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$. Зададимся последовательностью $\{\varepsilon_k > 0\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim \varepsilon_k = 0$ при $k \to \infty$. Тогда в соответствии с леммой 4.2 можно построить последовательность управлений $p_k[t] \in P(q[\tau_i])$, таких, что для некоторой подпоследовательности соответствующих движений $w^{(k)}[t]$ выполнится либо условие

$$\varepsilon_0(t, w^{(k)}[t]) \leqslant \varepsilon_k$$

при всех $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$, либо условие

$$w[\tau^k] \in M^{[\varepsilon_k]}(\tau^{(k)}, \zeta_k), \quad \zeta_k \in \{\zeta\}_{\tau^{(k)}}$$

при некотором значении $\tau^{(k)} \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$.

В первом случае вследствие слабой полунепрерывности снизу функции $\varepsilon_0(t, w)$ в $[t_0, \vartheta] \times Y_\sigma$ управление $p_*[t]$, порождающее слабый предел

$w_*[t]$ для подпоследовательности движений $w^{(k)}[t]$, обеспечит условие

$$\varepsilon_0(t, w_*[t]) = \varepsilon_0(t_*, w_*)$$

при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Во втором случае управление $p_*[t]$, порождающее слабый предел $w_*[t]$ для последовательности движений $w^{(k)}[t]$, обеспечит условие

$$w_*[\tau_*] \in M(\tau_*, \zeta_*), \quad \zeta_* \in \{\zeta\}_{\tau_*}$$

при $\tau_* \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Здесь $\{\tau_*, \zeta_*\}$ — предельная пара для последовательности $\{\tau^{(k)}, \zeta_k\}$ $(k = 1,2, \ldots)$. Это доказывает теорему.

Приведем частные случаи, когда выполняются условия теоремы 2.1.

1°. Когда $M(t, \zeta) = M(t)$ и для всякой позиции $\{t_*, w_*\}$, где $\varepsilon^\circ(t_*, w_*, \tau, \zeta) > 0$, $\tau > t_*$ максимум в (2.9) достигается на единственном элементе q°.

2°. Когда M — компакт в $[t_0, \vartheta] \times Y_\sigma$ и каждое множество $M(t, \zeta)$ — точка $M(t, \zeta) \in M(t)$, а пересечение $\bigcap\limits_q Y(t, q) = W(t)$, $q \in Y$ непусто при всяком t. В этом случае функции $\xi(t, q, \zeta)$ определим равенствами

$$\xi(t, q, \zeta) = \xi_*(t, q) = \min_y \langle q \cdot y \rangle \quad \text{при } y \in W(t)$$

Выполнение условия 2.1 вытекает из условия, что максимум в (2.9) опять достигается на единственном элементе q°, и полупространство $Y(t, q^\circ)$ пересекается с полупространством $Y^*(t, q^\circ, \zeta) = Y_*^*(t, q^\circ)$. Поэтому и всякое полупространство $Y(t, q)$ пересекается с $Y_*^*(t, q^\circ)$.

3°. Когда M — компакт в $[t_0, \vartheta] \times Y_\sigma$ и каждое множество $M(t, \zeta)$ — точка $M(t, \zeta) \in M(t)$, функция $\xi(t, q, \zeta) = -\xi(t, -q)$ и функция $-\xi(t, -q)$ вогнута по q; пересечение всех полупространств $Y^*(t, q, \zeta)$, $q \in Y$ непусто. При условии вогнутости функции $-\xi(t, -q)$ по q каждое полупространство $Y(t, q)$ пересекается с пересечением $\bigcap_q Y^*(t, q, \zeta)$, $q \in Y$. Следовательно, тогда действительно выполняется условие (2.15) из условия 2.1.

Условие 2.1 можно несколько развить, полагая в нем, что найдутся по крайней мере одна минимизирующая пара $\{\tau^\circ, \zeta^\circ\}$ из (2.11), $\beta \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$ и непрерывная функция $\{\tau(t), \zeta(t), \tau(t_*) = \tau^\circ, \zeta(t_*) = \zeta^\circ, t \in [t_*, t_* + \beta]$, такие, что для всех q, удовлетворяющих условию $\| q - q^\circ \| \leqslant \varepsilon$, будет

$$Y(t_*, q^*) \cap (\cap_q Y^*(t_*, q, \tau^\circ, \zeta^\circ)) \neq \varnothing$$

$$Y(t_*, q, \tau^\circ, \zeta^\circ) = [y\colon \langle q \cdot y \rangle \leqslant \xi_*(t_*, q, \tau^\circ, \zeta^\circ)]$$

$$\xi_*(t_*, q, \tau^\circ, \zeta^\circ) = \liminf_{t \to t_*} (\xi(t_*, q, \zeta^\circ) -$$

$$- (t - t_*)^{-1} [\xi(\tau^\circ, q, \zeta^\circ)(\tau(t) - \tau^\circ) + \int_{t_*}^{\tau^\circ} \xi(\varphi, q, \zeta(t)) -$$

$$- \zeta(\varphi, q, \zeta^\circ) d\varphi + \rho(q, \tau(t), \zeta(t)) - \rho(q, \tau^\circ, \zeta^\circ)])$$

6. Рассмотрим теперь задачу об уклонении для системы, описываемой унифицированным дифференциальным уравнением (1.4).

Пусть задано множество

$$M = [\{t, y\}\colon t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \ y \in M(t)] \tag{6.1}$$

Задача состоит в отыскании стратегии V

(6.2) $p[\cdot] = \{p[t], \ \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}\} = V(\tau_i, \ w[\tau_i], \ \tau_{i+1}, \ q[\tau_i])$

которая при заданных $\{t_0, w_0\}$ и M для всякого порождаемого ею движения $w[t] = w[t, t_0, w_0, V, q[\cdot]]$ обеспечивает уклонение

(6.3) $w[t] \notin M^\varepsilon(t)$

при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ для некоторого значения $\varepsilon > 0$, какой бы ни оказалась последовательность $q[\tau_i]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, \tau_0 = t_0)$.

Пусть выбраны параметрические совокупности множеств

(6.4) $M[\zeta, \lambda) = [\{t, y\}: \eta \leqslant t \leqslant \vartheta, \ y \in M(t, \zeta, \lambda)]$

и функций $\xi(t, q, \zeta)$, $\zeta \in \{\zeta\}_\eta$, $\lambda \in \{\lambda\}_\zeta$, $\eta \in [t_0, \vartheta]$. Будем предполагать, что множества $M(t, \zeta, \lambda)$ определены при всех $t \in [\eta_0, \vartheta]$, $\eta_0 \in [t_0, \vartheta]$, ограничены, выпуклы, замкнуты, изменяются непрерывно в хаусдорфовой метрике при изменении t, ζ и λ и удовлетворяют условиям

(6.5) $M(t) \subset \bigcup\limits_{\lambda} M(t, \zeta, \lambda), \quad \lambda \in \{\lambda\}_\zeta$

при всяком ζ.

Множество $\{\zeta\}_\eta^-$ и $\{\{\lambda\}_\zeta\}_\eta$ предполагаем компактами в соответствующих пространствах параметров ζ и λ, кроме того

$$\{\{\lambda\}_\zeta\}_{\eta_*} = \bigcap_\eta \{\{\lambda\}_\zeta\}_\eta, \quad \eta < \eta_*$$

$$\{\{\lambda\}_\zeta\}_{\eta_*} = \bigcup_\eta \{\{\lambda\}_\zeta\}_\eta^-, \quad \eta > \eta_*$$

При фиксированном значении ζ функция $\xi(t, q, \zeta)$ непрерывна в $[\eta, \vartheta] \times Y_\varepsilon$ и полунепрерывна сверху в $[\eta, \vartheta] \times Y_\sigma$; при фиксированном q эта функция непрерывна по ζ. Построим функцию

(6.6) $$\varepsilon^\circ(t_*, w_*, \tau, \zeta, \lambda) = \max_{\|q\| \leqslant 1} (\langle q \cdot w_* \rangle + \int_{t_*}^{\tau} \xi(t, q, \zeta)\, dt - \rho(q, \tau, \zeta, \lambda))$$

для $t_* \in [\eta, \tau]$, $\tau \in [t_*, \vartheta]$, когда правая часть (6.6) неотрицательна, иначе $\varepsilon^\circ(t_*, w_*, \tau, \zeta, \lambda) = 0$. Здесь $\rho(q, \tau, \zeta, \lambda)$ — опорная функция множества $M(t, \zeta, \lambda)$.

На основе (6.6) построим функцию

(6.7) $$\varepsilon_0(t, w) = \min_{\{\tau, \zeta, \lambda\}} \varepsilon^\circ(t, w, \tau, \zeta, \lambda)$$

$$\tau \in [t, \vartheta], \quad \zeta \in \{\zeta\}_t, \quad \lambda \in \{\lambda\}_\zeta$$

Рассмотрим следующие полупространства: $Y(t, q)$ ((2.12) и

(6.8) $Y_*(t, q, \zeta) = [\{t, y\}: \langle y \cdot q \rangle \geqslant \xi(t, q, \zeta)]$

Условие 6.1. Какова бы ни была позиция $\{t^*, w^*\}$, для которой

(6.9) $\varepsilon_0(t^*, w^*) > \beta > 0, \qquad t^* < \vartheta$

для всякого q_*, $\|q_*\| = 1$ справедливо условие

(6.10) $Y(t^*, q_*) \cap (\bigcap\limits_{q^\circ} Y_*(t^*, q^\circ, \zeta^\circ)) \neq \varnothing$

где пересечение берется по всем q° из множеств $S(t^*, w^*)$ всех максимизирующих элементов q° из (6.6), отвечающих всем минимизирующим значениям $\{\tau^\circ, \zeta^\circ, \lambda^\circ\}$ из (6.7), которые соответствуют позиции $\{t^*, w^*\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. Пусть $\varepsilon_0(t_*, w_*) = \gamma > \beta$. Если выполнено условие 1.1, то существует стратегия V, которая решает задачу об уклонении (1.5) при $\varepsilon = \gamma$.

7. Обсудим свойства функции ε_0. При введенных условиях эта функция непрерывна в $[t_0, \vartheta] \times Y_\sigma$. Множества $T(t_*, w_*)$ минимизирующих троек $\{\tau^\circ, \zeta^\circ, \lambda^\circ\}$, отвечающих позиции $\{t_*, w_*\}$, полунепрерывны сверху по изменению позиции $\{t_*, w_*\}$ в $[t_0, \vartheta) \times Y_s$ при $\varepsilon_0(t_*, w_*) > 0$, $t \geqslant t_*$. Множество $S(t_*, w_*)$ всех максимизирующих элементов q°, отвечающих позиции $\{t_*, w_*\}$ при всех минимизирующих значениях $\{\tau^\circ, \zeta^\circ, \lambda^\circ\}$ при $\varepsilon_0(t_*, w_*) > 0$, компактно в Y_σ и эти множества $S(t_*, w_*)$ полунепрерывны сверху по включению по изменению $\{t_*, w_*\}$ в $[t_0, \vartheta] \times Y_\sigma$.

Лемма 7.1. При выполнении условия 6.1 найдется элемент

$$p^* \in P(q^*) \tag{7.1}$$

который удовлетворяет включению

$$(p^* + q^*\xi(t^*, q^*)) \in \bigcap_{q^\circ} Y_*(t^*, q^\circ, \zeta^\circ), \quad q^\circ \in S(t^*, w^*) \tag{7.2}$$

В самом деле, предположим от противного, что такого элемента p^* (7.1), (7.2) указать нельзя. Тогда по теореме об отделении выпуклых множеств [5] можно указать линейный функционал

$$f(y) = \langle q_* \cdot y \rangle, \quad \| q_* \| = 1 \tag{7.3}$$

такой, что

$$\langle q_* \cdot p \rangle \geqslant \alpha + \varepsilon, \quad p \in P(q^*) \tag{7.4}$$

$$\langle q_* \cdot y \rangle < \alpha - \varepsilon, \quad y \in \bigcap_{q^\circ} Y_*(t^*, q^\circ, \zeta^\circ), \quad q^\circ \in S(t^*, w^*), \quad \varepsilon > 0 \tag{7.5}$$

Но вследствие условия (7.2), (7.4) и (7.5) означает, что рассматриваемое пересечение $\bigcap Y_*$ не пересекается с полупространством $Y(t^*, q_*)$, что противоречит условию (2.4), которое должно выполняться при всяком выборе q_*. Полученное противоречие доказывает лемму 7.1.

Доказательство теоремы 6.1 опирается на следующее утверждение.

Лемма 7.2. Пусть выполнено условие 6.1 и $\{t^*, w^*\}$ — позиция из области (6.9). Тогда при всяких q^*, $\| q^* \| = 1$ и $\alpha > 0$ можно выбрать допустимое управление $p[t] = p^*$, $t \geqslant t^*$ и $\delta > 0$ так, что вдоль соответствующего решения $w[t] = w[t, t^*, p^*, q^*]$ уравнения (1.4) будет выполнено неравенство

$$\varepsilon_0(t, w[t]) \geqslant \varepsilon_0(t^*, w^*) - \alpha(t - t^*) \tag{7.6}$$

при всех $t \in [t^*, t^* + \delta]$.

В самом деле, выберем постоянное управление $p[t] \doteq p^*$, которое удовлетворяет условиям (7.1) и (7.2). Оценим величину

$$\Delta\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t, w[t]) - \varepsilon_0(t^*, w^*) \tag{7.7}$$

По определению величины $\varepsilon_0(t, w)$ (6.7) имеем

(7.8) $$\Delta\varepsilon_0 = \langle q^\circ(t)\cdot w[t]\rangle + \int\limits_t^{\tau^\circ(t)} \xi(\varphi, q^\circ(t), \zeta^\circ(t))\,d\varphi - \rho(q^\circ(t), \tau^\circ(t), \zeta^\circ(t), \lambda^\circ(t)) -$$
$$- \langle q^\circ(t^*)\cdot w^*\rangle - \int\limits_{t^*}^{\tau^\circ(t^*)} \xi(\varphi, q^\circ(t^*), \zeta^\circ(t^*))\,d\varphi - \rho(q^\circ(t^*)\,\tau^\circ(t^*), \zeta^\circ(t^*), \lambda^\circ(t^*))$$

где $q^\circ(t)$, $q^\circ(t^*)$, $\tau^\circ(t)$, $\tau^\circ(t^*)$, $\zeta^\circ(t)$, $\zeta^\circ(t^*)$ и $\lambda^\circ(t^*)$, $\lambda^\circ(t^*)$ — соответствующие максимизирующие элементы из (6.6) и минимизирующие элементы из (6.7), отвечающие позиции $\{t^*, w^*\}$ и $\{t, w[t]\}$ соответственно. По определению минимизирующей тройки $\{\tau^\circ, \zeta^\circ, \lambda^\circ\}$ из (7.8) следует неравенство

(7.9) $$\Delta\varepsilon_0 \geqslant \langle q_*{}^\circ(t)\cdot w[t]\rangle + \int\limits_t^{\tau^\circ(t)} \xi(\varphi, q_*{}^\circ(t), \zeta^\circ(t))\,d\varphi -$$
$$- \rho(q_*{}^\circ(t), \tau^\circ(t), \zeta(t), \lambda^\circ(t)) - \langle q_*{}^\circ(t)\cdot w^*\rangle -$$
$$- \int\limits_{t^*}^{\tau^\circ(t)} \xi(\varphi, q_*{}^\circ(t), \zeta(t))\,d\varphi - \rho(q_*{}^\circ(t), \tau^\circ(t), \zeta^\circ(t), \lambda^\circ(t))$$

где $q_*{}^\circ(t)$ — максимизирующий элемент из (6.6) для позиции $\{t^*, w^*\}$, но для тройки $\{\tau^\circ(t), \zeta^\circ(t), \lambda^\circ(t)\}$. Далее достаточно рассмотреть лишь какую-либо сходящуюся справа последовательность $\{t_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim t_k = t^* + 0$, для которой $\tau^\circ(t_k) \to \tau^\circ(t^*)$, $\zeta^\circ(t_k) \to \zeta^\circ(t^*)$, $\lambda^\circ(t_k) \to \lambda^\circ(t^*)$, $q_*{}^\circ(t_k) \to q^\circ(t^*)$. Тогда из (7.9) имеем

(7.10) $$\varepsilon_0(t_k, w[t_k]) - \varepsilon_0(t_*, w_*) \geqslant \langle q^\circ(t^*)\cdot(w[t_k] - w^*)\rangle -$$
$$- \int\limits_{t^*}^{t} \xi(\varphi, q^\circ(t^*), \zeta^\circ(t^*))\,d\varphi - \alpha(t_k - t^*)$$

Так как $w[t]$ — решение уравнения (1.4) при $q = q^*$ и $p = p^*$, то из (7.10) следует неравенство

(7.11) $$\varepsilon_0(t_k, w[t_k]) - \varepsilon_0(t^*, w^*) \geqslant [\langle q^\circ(t^*)\cdot(p^* + q^*\cdot\xi(t^*, q^*))\rangle -$$
$$- \xi(t^*, q^\circ(t^*), \zeta(t^*))]\,(t_k - t^*) - \alpha(t_k - t^*)$$

если только $t_k \in [t^*, t^* + \delta]$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число.

Из (7.11) по условию (7.2) и по определению полупространств $Y_*(t^*, q^\circ, \zeta^\circ)$ (6.8) следует неравенство, доказывающее лемму 7.2.

Лемма 7.3. Пусть выполнено условие 6.1 и $\{t_*, w_*\}$ — позиция, для которой $\varepsilon_0(t_*, w_*) = \gamma > \beta$, $t_* < \vartheta$. Тогда при всяких q_*, $\|q_*\| = 1$ и $\tau^* \in [t_*, \vartheta]$, $\alpha > 0$ можно выбрать допустимое управление $p[t] = p_*[t]$, $t \geqslant t_*$, так что вдоль соответствующего движения $w[t] = w[t, t_*, p_*[\cdot], q_*]$ (1.4) будет выполнено неравенство

(7.12) $$\varepsilon_0(t, w(t)) \geqslant \varepsilon_0(t_*, w_*) - \alpha(t - t_*)$$

при всех $t \in [t_*, \tau^*]$.

В самом деле, пусть t^* — верхняя грань значений τ, для которых можно выполнить условие (7.12) при $t_* \leqslant t \leqslant \tau$. Как и в п. 4, можно проверить, опираясь на непрерывность функции $\varepsilon_0(t, w)$, что тогда существует допустимое управление $p_*[t]$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$, которое обеспечивает неравенство (7.12) при $t_* \leqslant t \leqslant t^*$. Но тогда, если $t^* < \tau^*$, то в соответствии с леммой 7.2 можно это управление $p[t]$ продолжить несколько за точку t^* так, что условие (7.12) будет выполнено при $t_* \leqslant t \leqslant t^* + \delta$, $\delta > 0$. Но это противоречит выбору числа t^*, что и доказывает лемму 7.3.

8. Доказательство теоремы 6.1 строится на основании предыдущего материала следующим образом. Пусть выбрано разбиение $\Delta = \{\tau_i\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$. Пусть реализовалась позиция $w[\tau_i]$, $(\tau_i \geqslant \tau_0 = t_0)$, для которой

$$\varepsilon_0(\tau_i, w[\tau_i]) = \gamma > \beta$$

и выбраны момент $\tau_{i+1} \in (\tau_i, \vartheta)$ и управление $q[t] = q[\tau_i]$, $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$. Зададимся последовательностью $\{\varepsilon_k > 0\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim \varepsilon_k = 0$ при $k \to \infty$. Тогда в соответствии с леммой 7.3 можно построить последовательность управлений $p^k[t]$, таких, что для некоторой подпоследовательности соответствующих движений $w^{(k)}[t]$ выполнится условие

$$\varepsilon_0(t, w^{(k)}[t]) \geqslant \varepsilon_0(t_*, w_*) - \varepsilon_k$$

при всех $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$. Вследствие непрерывности функции $\varepsilon_0(t, w)$ в $[t_0, \vartheta] \times Y_\sigma$ управление $p_*[t]$, порождающее слабый предел $w_*[t]$ для подпоследовательности движений $w^{(k)}[t]$, обеспечит условие

$$\varepsilon_0(t, w_*[t]) \geqslant \varepsilon_0(t_*, w_*) = \gamma$$

при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Это и доказывает теорему 6.1.

Частными случаями, когда выполняются условия теоремы 6.1, являются такие: 1) когда сечения $M(t)$ изменяются непрерывно с изменением t и каждое множество $M(t, \zeta, \lambda)$ — непрерывная кривая $m(t, \zeta, \lambda) \in M(t)$ при $\eta \leqslant t \leqslant \vartheta$, при каждом значении t и q

$$Y(t, q) \cap W(t) \neq \varnothing$$

где $W(t)$ — выпуклые, замкнутые множества, причем $\xi(t, q, \zeta) = \min \langle y \cdot q \rangle$ при $y \in W(t)$; 2) когда при тех же предположениях о множествах $M(t)$ и $M(t, \zeta, \lambda)$ при каждом значении

$$\bigcap_q Y_*(t, q, \zeta) \neq \varnothing, \quad q \in Y$$

причем $\xi(t, q, \zeta) = -\xi(t, -q)$ и функция $-\xi(t, -q)$ вогнутая по q.

Поступила 24 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* О дифференциальных эволюционных системах. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Красовский Н. Н.* К задаче унификации дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6.
4. *Valadier M.* Existence Globale pour les Equations Differentielles Multivoques. Compt. rend. Acad sci. colon., 1971, t. 272, No 7, p. 474—477.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы, т. 1. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962.