Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.3

О ТЕОРЕМАХ ДИНАМИКИ

В. В. Козлов, Н. Н. Колесников

(Москва)

Для однопараметрических семейств преобразований конфигурационного пространства вводятся возможные перемещения, совместные с наложенными на систему связями. С использованием этих перемещений из принципа Даламбера—Лагранжа получены утверждения, обобщающие основные теоремы динамики и распространяющие теорему Нетер на систему с неголономными связями. С помощью доказанных в работе утверждений решена задача о движении острого однородного диска по горизонтальному льду.

1. Обобщение основных теорем динамики. Рассмотрим механическую систему n материальных точек с массами m_i, декартовы координаты которых обозначим через x_i, y_i, z_i. Предположим, что на систему наложены линейные связи, вообще говоря, неинтегрируемые. Тогда возможные перемещения системы удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\delta x_i + b_{ij}\delta y_i + c_{ij}\delta z_i) = 0, \qquad j = 1, \ldots, \quad m < 3n \tag{1.1}$$

Коэффициенты в этих равенствах — функции координат и времени.

На точки m_i действуют активные силы $\mathbf{F}_i$ с проекциями на оси координат X_i, Y_i, Z_i. Действительные движения определяются из принципа Даламбера — Лагранжа

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} - X_i\right)\delta x_i + \left(m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} - Y_i\right)\delta y_i + \left(m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} - Z_i\right)\delta z_i\right] = 0 \tag{1.2}$$

Рассмотрим зависящее от времени и параметра α семейство обратимых преобразований $3n$-мерного конфигурационного пространства

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(x_1', y_1', z_1', \ldots, x_n', y_n', z_n', t, \alpha) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$$

Скорости точек системы преобразуются по обычному правилу

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial x_j'}\frac{dx_j'}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial y_j'}\frac{dy_j'}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial z_j'}\frac{dz_j'}{dt}\right) \tag{1.4}$$

Возможными перемещениями системы, связанными с семейством преобразований (1.3), назовем

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha} \delta\alpha \tag{1.5}$$

Будем говорить, что семейство преобразований (1.3) совместно со связями (1.1), если возможные перемещения (1.5) удовлетворяют уравнениям связей (1.1).

Лемма 1. Имеет место следующее соотношение (T — кинетическая энергия):

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) = \frac{dS}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} \tag{1.6}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i^{\boldsymbol{\cdot}}} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial y_i^{\boldsymbol{\cdot}}} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial z_i^{\boldsymbol{\cdot}}} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right)$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} [(x_i^{\boldsymbol{\cdot}})^2 + (y_i^{\boldsymbol{\cdot}})^2 + (z_i^{\boldsymbol{\cdot}})^2]$$

Справедливость этого тождества вытекает из следующих очевидных перестановочных соотношений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

Лемма 2. Если семейство (1.3) совместно с наложенными на систему связями, то

$$\frac{dS}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \sum, \quad \sum = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right) \tag{1.7}$$

Для доказательства этого соотношения надо подставить возможные перемещения (1.5) в уравнения Даламбера — Лагранжа и использовать формулу (1.6).

Функция $f(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_1^{\boldsymbol{\cdot}}, y_1^{\boldsymbol{\cdot}}, z_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots)$ инвариантна относительно преобразований (1.3), если функция g, полученная из f заменой координат и скоростей точек по формулам (1.3) и (1.4), не зависит от α.

Теорема 1. Если кинетическая энергия инвариантна относительно свойства преобразований (1.3), совместного со связями, то

$$dS/dt = \Sigma \tag{1.8}$$

Так как кинетическая энергия инвариантна относительно семейства преобразований (1.3), то $\partial T / \partial \alpha = 0$ и соотношение (1.8) вытекает из (1.7).

Кинетическая энергия инвариантна относительно сдвигов вдоль неподвижного направления и поворотов вокруг неподвижной оси. Следовательно, в этих случаях теорема 1 совпадает с классическими теоремами об изменении количества движения и момента количества движения системы [1].

2. Случай потенциальных сил. Предположим, что внешние силы $\mathbf{F}_i$, действующие на систему, допускают силовую функцию $V(t, x_1, y_1, z_1, \ldots \ldots x_n, y_n, z_n)$.

Теорема 2. Если функция $L = T + V$ инвариантна относительно семейства преобразований (1.3) совместно со связями, то уравнения движения имеют первый интеграл

$$S = \mathrm{const}$$

Это утверждение следует из формул (1.7). При этом используется соотношение

$$\Sigma = \partial V / \partial \alpha$$

и инвариантность функции $L = T + V$: $\partial L / \partial \alpha = 0$.

Для голономных связей теорема 2 совпадает с известной теоремой Нетер [2]. Подчеркнем, что семейство преобразований (1.3) не обязано быть группой.

3. Обобщение теорем об измерении количества движения и момента количества движения. Выясним, когда кинетическая энергия инвариантна относительно сдвигов вдоль прямой l, заданной направляющими косинусами a, b, c, которая может менять со временем направление. Формулы преобразования в этом случае, очевидно, следующие:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i' + \alpha\mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = (a, b, c)$$

Можно проверить, что

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{da}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dx_i}{dt} + \frac{db}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dy_i}{dt} + \frac{dc}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dz_i}{dt}$$

В этом случае условие инвариантности T относительно семейства сдвигов записывается в виде $(\mathbf{P}, d\mathbf{l} / dt) = 0$, где $\mathbf{P}$ — вектор количества движения системы. Если это равенство выполнено и связи допускают поступательное перемещение системы как одного твердого тела вдоль оси l, то по теореме 1

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}, \mathbf{l}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i, \mathbf{l}\right) \tag{3.1}$$

Выясним также, когда кинетическая энергия инвариантна относительно вращений вокруг прямой l, которая в общем случае подвижна. Снова обозначим через a, b, c её направляющие косинусы и пусть прямая l проходит через точку с координатами x_0, y_0, z_0. Величины a, b, c, x_0, y_0, z_0 — заданные функции времени.

Пусть α — угол поворота. Можно проверить, что

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dx_i}{dt} \frac{d}{dt}[b(z_i - z_0) - c(y_i - y_0)] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dy_i}{dt} \frac{d}{dt}[c(x_i - x_0)a - (z_i - z_0)] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{dz_i}{dt} \frac{d}{dt}[a(y_i - y_0) - b(x_i - x_0)]$$

После преобразований условие инвариантности функции относительно семейства поворотов записывается в виде

$$(3.2)\qquad \left(\mathbf{P}, \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_0, \mathbf{l}]\right) + \left(\mathbf{K}, \frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) = 0, \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

где **K** — вектор момента количества движения системы относительно начала координат.

Если связи допускают повороты системы как одного твердого тела вокруг оси l и выполнено равенство (3.2), то по теореме 1

$$(3.3)\qquad d/dt(\mathbf{K}', \mathbf{l}) = (\mathbf{M}', \mathbf{l})$$

где **K′** и **M′** — соответственно момент количества движения и суммарный момент сил относительно точки (x_0, y_0, z_0). Иными словами, если выполнено условие (3.2), то относительно подвижной оси l справедлива теорема об изменении момента количества движения.

Если, в частности, ось l не меняет направления в пространстве, т. е. $da/dt = db/dt = dc/dt = 0$, то это утверждение совпадает с известным обобщением теоремы площадей [3, 4].

В случае, когда ось l проходит через центр тяжести системы, условие (3.2) можно упростить

$$(3.4)\qquad \left(\mathbf{K}', \frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) = 0$$

4. Пример из динамики неголономных систем. В качестве примера на приложение доказанных выше утверждений рассмотрим задачу о движении круглого диска с острым краем по гладкому горизонтальному льду. На систему тем самым наложена неголономная связь: скорость точки касания диска параллельна его горизонтальному диаметру. Диск предполагается динамически симметричным, центр его тяжести совпадает с геометрическим центром.

Введем оси Кенига $Ox_1y_1z_1$, причем ось Oz_1 вертикальна. В другой подвижной системе координат $Oxyz$ ось Oz перпендикулярна плоскости диска, ось Ox горизонтальна, а ось Oy проходит через точку касания H. Обозначим через M некоторую точку на окружности диска. Пусть m — масса диска, a — его радиус, моменты инерции относительно осей Ox, Oy и Oz обозначим соответственно через A и C.

Проекции угловой скорости диска ω на оси $Oxyz$ обозначим через p, q, r, а проекции скорости центра масс на те же оси — через u, v, w. Проектируя скорость $V_H = V_0 + [\omega, OH]$ на оси трехгранника и используя параллельность V_H оси Ox, получим

$$(4.1)\qquad v = 0, \quad w - ap = 0$$

Докажем, что $r = \mathrm{const}$. За подвижную ось l примем Oz. Связи допускают поворот диска вокруг этой оси.

Покажем, что выполнено условие (3.4). Действительно, проекции **K′** на оси $Oxyz$ суть Ap, Aq, Cr, а вектора $d\mathbf{l}/dt$: $q, -p$, 0. Следовательно, они ортогональны. Так как сила тяжести не дает момента относительно оси Oz, то по формуле (3.3) $d(Cr)/dt = 0$, т. е. $r = r_0 = \mathrm{const}$.

Связи допускают поворот диска относительно вертикальной оси Oz_1. Так как O — центр тяжести, то, согласно формуле (3.3) (теорема Кенига), проекция момента количества движения относительно точки O на вертикаль постоянна

$$(4.2)\qquad Aq\sin\theta + Cr\cos\theta = c_1 \quad \text{или}$$

$$q(\theta) = \frac{c_1}{A\sin\theta} - \frac{Cr_0}{A}\operatorname{ctg}\theta$$

Диск можно поступательно перемещать вдоль подвижной оси Ox. Кинетическая энергия диска не инвариантна относительно этих сдвигов, однако можно применить лемму 2, которая дает уравнение $mdu / dt - mwq = 0$, или, с использованием (4.1), $du / dt - aqp = 0$. Так как $p = d\theta / dt$, то, учитывая (4.2), получим

$$du = a\left(\frac{c_1}{A\sin\theta} - \frac{Cr_0}{A}\operatorname{ctg}\theta\right)d\theta \tag{4.3}$$

Следовательно,

$$u(\theta) = c_2 + \frac{ac_1}{A}\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{aCr_0}{A}\ln\sin\theta$$

Полная энергия диска сохраняется

$$^1/_2 m(u^2 + v^2 + w^2) + {}^1/_2(Ap^2 + Aq^2 + Cr^2) + mga\sin\theta = h$$

Учитывая соотношения (4.1)—(4.3), это равенство можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2}(A + ma^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = h - mga\sin\theta - \frac{m}{2}u^2(\theta) - \frac{A}{2}q^2(\theta) - \frac{Cr_0^2}{2} \tag{4.4}$$

Отсюда угол θ находится квадратурой.

Если $c_1 \neq Cr_0$, то правая часть равенства (4.4) стремится к $-\infty$, когда $\theta \to 0, \pi$. Следовательно, в этом случае $0 < \theta < \pi$ и $\theta(t)$ — периодическая функция времени с некоторым периодом τ. В частности, диск никогда не упадет на плоскость. Заметим, что диск может упасть при $c_1 = Cr_0$, но только тогда, когда он поставлен невертикально и отпущен без начальной скорости.

Предположим опять, что $c_1 \neq Cr_0$. Тогда p, q, r, u, v, w — периодические функции времени с тем же периодом τ. Чтобы дать качественную картину движения, осталось выяснить зависимость от времени угла φ между OH и OM и угла ψ между Ox и Ox_1, а также найти закон движения точки касания по плоскости.

Из кинематических соотношений

$$q = \frac{d\psi}{dt}\sin\theta, \quad r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta$$

следует, что

$$\psi = \lambda_1 t + f_1(t), \quad \varphi = \lambda_2 t + f_2(t) \tag{4.5}$$

где λ_1, λ_2 — постоянные, зависящие от начальных условий, а f_1, f_2 — периодические функции времени с периодом τ.

Пусть ξ, η — декартовы координаты точки касания H на плоскости, при этом оси ξ, η параллельны осям Ox_1, Oy_1. Можно показать, что

$$\frac{d\xi}{dt} = u\cos\psi + w\sin\theta\sin\psi + \frac{d}{dt}(a\cos\theta\sin\psi) = \left(u + a\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\right)\cos\psi$$

$$\frac{d\eta}{dt} = u\sin\psi - w\sin\theta\cos\psi - \frac{d}{dt}(a\cos\theta\cos\psi) = \left(u + a\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\right)\sin\psi$$

Функция $u + a\cos\theta\, d\psi / dt$ периодична по t с периодом τ. Обозначим ее $g(t)$. Тогда, учитывая (4.5), получим

$$d\zeta / dt = g(t)\exp[i(\lambda_1 t + f_1(t))], \quad \zeta = \xi + i\eta$$

Функция $g(t)\exp[if_1(t)]$ периодическая с периодом τ. Разложим ее в сходящийся ряд Фурье

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i\frac{2\pi n}{\tau}t\right)$$

Тогда

$$\zeta = c + \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{i(2\pi n/\tau + \lambda_1)}\exp\left(i\frac{2\pi nt}{\tau}\right)\exp(i\lambda_1 t)$$

где $c = c_1 + ic_2$ — некоторая постоянная. Если $2\pi n / \tau + \lambda_1 \neq 0$ при целых n, то

$$G(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{i(2\pi n / \tau + \lambda_1)} \exp\left(i \frac{2\pi n}{\tau} t\right)$$

— аналитическая периодическая функция с периодом τ. В этом случае $\zeta = G(t) \exp(i\lambda_1 t) + c$. Введем подвижную систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью $-\lambda_1$ вокруг точки c. Тогда в подвижной системе тока $\zeta(t)$ будет двигаться периодически по замкнутой аналитической кривой $\zeta = G(t)$. В неподвижной плоскости (ξ, η) точка касания будет совершать сложное движение: она движется периодически по некоторой замкнутой аналитической кривой, которая вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной точки.

Авторы благодарны В. В. Румянцеву за внимание и советы.

Поступила 21 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика, т. 2. М., Физматгиз, 1960.
2. *Нетер Э.* Инвариантные вариационные задачи. В сб.: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959.
3. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды по механике и математике. М., Гостехиздат, 1954.
4. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.