Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА

И. С. Меньшиков

(Москва)

Рассматривается дифференциальная игра с непротивоположными интересами и фиксированным порядком принятия решений игроками. В игре с фиксированной последовательностью ходов первый игрок первым выбирает стратегию и сообщает ее второму игроку. Располагая той или иной информацией о критерии второго игрока, первый игрок может в какой-то степени прогнозировать его ответные действия, оценивая эффективность стратегии по наиболее неблагоприятному исходу. Наибольшим гарантированным результатом [1] называют точную верхнюю грань оценок эффективности по всем стратегиям первого игрока. Задача нахождения наибольшего гарантированного результата в статических играх решена при различных предположениях о стратегических возможностях первого игрока и его информированности о критерии второго (наиболее полное изложение теории см. в [2]). Общим элементом математической техники решения данных задач являются так называемые «стратегии наказания», возникающие из решения вспомогательных антагонистических игр. В данной работе в качестве базовой теории антагонистических дифференциальных игр взята теория позиционных дифференциальных игр [3], при этом оказывается весьма удобным в качестве вспомогательных антагонистических игр рассматривать специальные задачи сближения — уклонения. Такой подход позволяет единообразно исследовать несколько основных вариантов стратегических возможностей первого игрока и его информированности.

Дана управляемая система, описываемая уравнением движения

$$dx/dt = f(t, x, u, v);\ x(t_0) = x_0,\ u \in P,\ v \in Q$$

Здесь $x = x(t)$ — фазовый вектор, u и v — векторы управляющих воздействий первого и второго игроков на систему, P и Q — компакты.

Игроки стремятся к максимизации своих выигрышей, которые определяются по финальной позиции игры при $t = T$ непрерывными функциями $g_1(x)$ и $g_2(x)$. На функцию $f(t, x, u, v)$ наложены условия из [3]: непрерывность, $\| f(t, x, u, v) \| \leqslant \varkappa (1 + \| x \|)$ (где $\varkappa = \mathrm{const}$) и условие Липшица по переменной x. Действия первого игрока состоят в выборе некоторого множества G позиций (t, x) и задании на нем стратегии $U \div u(t, x)$ [3]. Пара $\{U, G\}$ сообщается второму игроку. Выбранная первым игроком пара $\{U, G\}$ следующим образом ограничивает множество возможных партий игры. Если $x[t]$ — партия игры при $t_0 \leqslant t \leqslant T$, то существует такое продолжение $U_G \div u_G(t, x)$ стратегии $u(t, x)$ на множестве всех позиций, что $x[\cdot] \in X[\cdot, U_G]$ ($X[\cdot, U_G]$ — семейство движений [3] из позиции (t_0, x_0), отвечающих стратегии U_G).

Вне множества G второй игрок получает право распоряжаться не только своим управляющим воздействием v, но и управляющим воздействием первого игрока. В частности, пусть G' — открытое множество позиций и $G' \cap G = \varnothing$. Тогда в качестве партии игры второй игрок может реализовать любое движение $x[\cdot]$, если только $(t, x[t]) \in G'$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и $x[t_0] = x_0$.

Будем полагать, что второй игрок придерживается следующего принципа поведения: если существует способ действий, который гарантирует ему некоторую величину выигрыша b, то в качестве финальной позиции игры реализуется лишь такой вектор x, что $g_2(x) \geqslant b - \beta$ ($\beta > 0$ — постоянная, характеризующая порог безразличия второго игрока, известная первому игроку).

Рассматриваются три ситуации информированности I_1, I_2 и I_3 первого игрока о $g_2(x)$:

1) функция $g_2(x)$ известна точно;

2) известно, что $g_2(x)$ — некоторая непрерывная функция, такая, что для любого x выполнено $g_2^-(x) \leqslant g_2(x) \leqslant g_2^+(x)$, где $g_2^-(x)$ и $g_2^+(x)$ — известные непрерывные функции;

3) $g_2(x)$ — некоторая функция из конечного семейства непрерывных функций $\{g_2^\alpha(x),\ \alpha \in A\}$.

Введем понятие достижимого выигрыша первого игрока, соответствующего его информированности.

Для I_1 будем рассматривать множество финальных позиций

$$M_1(b, c) = \{x \mid \max[g_1(x) - c,\ \varphi_1(x; b)] \geqslant 0\}$$
$$\varphi_1(x;\ b) = b - g_2(x) - \beta$$

Из условий, наложенных на управляемую систему, следует, что все финальные позиции игры лежат в некотором компакте, поэтому и множество $M_1(b, c)$ — компакт. В дальнейшем, не оговаривая дополнительно, всегда считаем, что все финальные позиции x выбираются из некоторого компакта. Через $W_1(b, c)$ будем обозначать u_*-стабильный мост [3], решающий задачу сближения при $t = T$ с множеством $M_1(b, c)$. Назовем мост $W_1(b, c)$ управляемым, если найдется такое движение $x[\cdot]$ из позиции (t_0, x_0), что $(t, x[t]) \in W_1(b, c)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и $g_2(x[T]) > b$.

В случае I_2 положим

$$M_2(b, c) = \{x \mid \max[g_1(x) - c,\ \ \varphi_2(x;\ b)] \geqslant 0\}$$
$$\varphi_2(x;\ b) = b - g_2^+(x) - \beta$$

Пусть $W_2(b, c)$ — u_*-стабильный мост к $M_2(b, c)$. Мост $W_2(b, c)$ управляем, если найдется такое движение $x[\cdot]$ из (t_0, x_0), что $(t, x[t]) \in W_2(b, c)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и $g_2^-(x[T]) > b$.

В случае I_3 (обозначим $b = (b_\alpha, \alpha \in A)$)

$$M_3(b, c) = \{x \mid \max[g_1(x) - c,\ \ \varphi_3(x;\ b)] \geqslant 0\}$$
$$\varphi_3(x;\ b) = \min_{\alpha \in A}(b_\alpha - g_2^\alpha(x) - \beta)$$

Пусть $W_3(b, c)$ — u_*-стабильный мост к $M_3(b, c)$. Мост $W_3(b, c)$ управляем, если для всякого $\alpha \in A$ найдется такое $x^\alpha[\cdot]$ из (t_0, x_0), что

$$(t, x^\alpha[t]) \in W_2(b, c) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant T \text{ и } g_2^\alpha(x^\alpha[T]) > b_\alpha$$

Будем говорить, что c — достижимый для первого игрока выигрыш в ситуации информированности I_j, если позиция (t_0, x_0) содержится в каком-либо управляемом u_*-стабильном мосту $W_j(b, c)$ при некотором b, где $j = 1, 2, 3$.

Теорема. Наибольший гарантированный результат первого игрока в иерархической дифференциальной игре в случае информированности I_j равен γ_j — точной верхней грани достижимых выигрышей ($j = 1, 2, 3$).

Для доказательства теоремы понадобятся две леммы из теории позиционных дифференциальных игр, которые приведем без доказательства.

Лемма 1. Пусть M_1 и M_2 — компактные множества и M_1 содержится в M_2 с некоторой окрестностью. Если W_1 — u_*-стабильный мост к M_1, а W_2 — максимальный u_*-стабильный мост [3] к M_2, то найдется такое открытое множество G', содержащее W_1, что

$$(G' \cap \{(t, x) \mid t \leqslant T\}) \subset W_j(b, c)$$

Лемма 2. Пусть для некоторой стратегии U выполнено $X[T, U] \subset M$, где M — компактное множество. Тогда, если $x[\cdot] \in X[\cdot, U]$, то $(t, x[t])$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ содержится в максимальном u_*-стабильном мосту W к множеству M.

Доказательство теоремы. Покажем, что если c — достижимый выигрыш в I_j, то для любого $\varepsilon > 0$ первый игрок может себе гарантировать выигрыш не меньше $c - \varepsilon$. Тем самым будет оправдано определение достижимости. Положим $\bar{c} = c - \varepsilon$, $\bar{b} = b + \delta$ ($\bar{b} = (b_\alpha + \delta, \alpha \in A)$ при $j = 3$). Ясно, что множество $M_j(\bar{b}, \bar{c})$ содержит $M_j(b, c)$ вместе с некоторой окрестностью, следовательно, по лемме 1 найдется такое открытое множество $G' \supset W_j(b, c)$, что $(G' \cap \{(t, x) \mid t \leqslant T\}) \subset W_j(\bar{b}, \bar{c})$.

По определению управляемого u_*-стабильного моста существует движение $x[\cdot]$ из позиции (t_0, x_0), для которого

$$(t, x[t]) \in W_j(b, c) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant T \text{ и } g_2(x[T]) > b$$

(в случае I_3 следует заменить b на некоторое b_α при $\alpha \in A$). Но тогда $(t, x[t]) \in G'$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Если второй игрок получит возможность во множестве $W_j(\bar{b}, \bar{c})$ при достаточно малом $\delta > 0$ распоряжаться управляющим воздействием первого игрока так же, как и своим, то он сможет реализовать $x[t]$ в качестве партии игры и обеспечить себе выигрыш больше $\bar{b}$. В силу предположения о характере действий второго игрока, первый игрок может быть уверен, что для финальной позиции игры x выполнено неревенство $g_2(x) \geqslant \bar{b} - \beta$. Если первый игрок выберет в качестве G дополнение к $W_j(\bar{b}, \bar{c})$ и определит там стратегию $U_e^j \div u_e^j(t, x)$, экстремальную [3] к мосту $W_j(\bar{b}, \bar{c})$, то он обеспечит принадлежность финальной позиции множеству $M_j(\bar{b}, \bar{c})$. Если же $x \in M_j(\bar{b}, \bar{c})$ и $g_2(x) \geqslant \bar{b} - \beta$, то первому игроку обеспечен выигрыш не менее $\bar{c} = c - \varepsilon$.

Докажем теперь, что при любом выборе G и U первый игрок не может гарантировать себе выигрыш больше чем γ_j в ситуации I_j. Возможности второго игрока по формированию управляющих воздействий не известны точно первому игроку. Ему известно только, что в качестве партии игры может возникнуть любое движение $x[\cdot]$, соответствующее всякому продолжению стратегии первого игрока. В частности, не исключен случай, когда второй игрок имеет возможность по своему произволу выбирать любую партию игры, отвечающую паре $\{U, G\}$. Пусть U_G — некоторое продолжение U. Положим

$$b(U_G, g_2) = \max_{x\in X[T, U_G]} g_2(x)$$

Тогда точная верхняя грань выигрышей второго игрока

$$b(g_2) = \max_{x\in X[T, U, G]} g_2(x), \qquad X[T, U, G] = [\bigcup_{U_G} X[T, U_G]]$$

Ясно, что в качестве финальной позиции игры может возникнуть любой вектор из множества (за исключением, быть может, каких-то предельных точек)

$$E(g_2) = \{x \in X[T, U, G] \mid g_2(x) \geqslant b(g_2) - \beta\}$$

Более того, сама функция g_2 может быть произвольной из множества I_j, поэтому в ситуации I_j первый игрок может ограничить множество финальных позиций игры лишь множеством

$$E^j = \bigcup_{g_2\in I_j} E(g_2), \qquad E^1 = E^1(g_2)$$

$$E^2 = \{x \in X[T, U, G] \mid g_2^+(x) + \beta \geqslant b(g_2^-)\}$$

$$E^3 = \{x \in X[T, U, G] \mid \max_{\alpha\in A} [g_2^\alpha(x) - b(g_2^\alpha) + \beta] \geqslant 0\}$$

Применив стратегию $\{U, G\}$, первый игрок не может гарантировать себе выигрыш больше c_j, где

$$c_j = \min_{x\in E^j} g_1(x)$$

Вместе с тем, по определению $X^1[T, U, G]$ и E^j стратегия $u_G(t, x)$ обеспечивает встречу с множеством

$$M_j = \{x \mid (g_1(x) \geqslant c_j) \text{ или } (\varphi_j(x; b^j) > 0)\}$$

$$(b^1 = b(g_2), \quad b^2 = b(g_2^-), \quad b^3 = (b(g_2^\alpha), \ \alpha \in A))$$

Множество $X[T, U_G]$ замкнуто, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\bar{b}^j$ и $\bar{c}^j$, что $0 < c_j - \bar{c}_j < \varepsilon$; $\bar{b}^j < b^j$ и из позиции (t_0, x_0) осуществима встреча с $M_j(\bar{b}^j, \bar{c}_j)$. Более того, найдется $\bar{b}^j < b^j$ (в случае I_3 для любого $\alpha \in A$), такое, что существует движение $x^j[\cdot] \in X[\cdot, U_G]$, удовлетворяющее условию $g_2(x^j[T]) > \bar{b}^j$ ($\bar{b}_\alpha{}^j$ при $j = 3$).

Но тогда по лемме 2 максимальный u_*-стабильный мост $W_j(\bar{b}^j, \bar{c}_j)$, решающий задачу сближения с $M_j(\bar{b}^j, \bar{c}_j)$ в момент времени $t = T$, управляем, а следовательно, $\bar{c}_j$ — достижимый выигрыш в ситуации информированности I_j. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ теорема доказана.

Допустим, что из позиции (t_0, x_0) разрешима задача сближения в момент $t = T$ с компактным множеством M^*. Пусть W^* — соответствующий максимальный u_*-стабильный мост. Через $X\{\cdot, W^*\}$ обозначим совокупность всех движений $x[\cdot]$, таких, что $x[t_0] = x_0$ и $(t, x[t]) \in W^*$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Множество $X\{T, W^*\}$ есть сечение множества $X\{\cdot, W^*\}$ при $t = T$. По определению u_*-стабильного моста $X\{T, W^*\} \subset M^*$. Положим $M = X\{T, W^*\}$ и пусть W — максимальный u_*-стабильный мост, решающий задачу сближения с множеством M в момент $t = T$. Видно, что

$$M \supset X\{T, M\} \supset X\{T, W^*\} = M$$

Определение. Назовем компактное множество M управляющим, если $X\{T, W\} = M$.

Обозначим через $\{M\}$ совокупность всех управляющих множеств. Определим следующую вспомогательную статическую $\{M\}$-игру. Стратегией первого игрока является выбор множества $M \in \{M\}$, а второго — вектора $x \in M$. Второй игрок стремится максимизировать функцию $g_2(x)$ по множеству M с точностью до β, а первый — максимизировать $g_1(x)$.

Из доказанной выше теоремы вытекает

Следствие. Наибольшие гарантированные результаты первого игрока в иерархической дифференциальной игре и $\{M\}$-игре совпадают.

Замечания. 1°. Предположим, что первый игрок в каждой позиции (t, x) знает значение управляющего воздействия второго игрока v, т. е. может использовать контрстратегии $U^v \div u(t, x, v)$ [3]. Тогда его стратегией в иерархической дифференциальной игре будем считать пару $\{U^v, G\}$, причем управление $u(t, x, v)$ задано, как и ранее, лишь при $(t, x) \in G$. Изменения в формулировке и доказательстве теоремы сводятся к замене u_*-стабильности на u-стабильность [3].

2°. Если информация о критерии второго игрока состоит в том, что первому игроку известна непрерывная на $\{x\} \times A$ функция $g_2(x, \alpha)$, такая, что при некотором $\alpha \in A$ $g_2(x, \alpha) \equiv g_2(x)$, то можно распространить и на этот случай все построения случая I_3. Однако тут же $b(\alpha)$ — непрерывная на компакте A функция.

Поступила 24 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. Изд-во МГУ, 1972.
2. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. М., «Наука», 1976.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.