УДК 539.3

ОБ ОСАДКЕ ПЛОСКОГО ШТАМПА, ДЕЙСТВУЮЩЕГО НА ОРТОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В. А. Свекло, Н. С. Торубарова

(Калининград)

Проведено исследование осадки штампа для ортотропного тела в частном случае. Выяснены некоторые дополнительные условия существования решения. Вычислена осадка штампа для конкретных анизотропных тел. Учтено влияние поворота осей штампа.

1. Вывод основных формул. Напряженно-деформированное состояние ортотропного полупространства под действием эллиптического в плане плоского штампа определяется функцией нагружения

$$\Psi(\Omega_k) = P\,(8\pi^2 \sqrt{ab})^{-1} \ln [(\Omega_k - \sqrt{ab})(\Omega_k + \sqrt{ab})^{-1}] \tag{1.1}$$

$$\Omega_k = (\xi + \nu_k z)\Delta^{-1}, \qquad \Delta = (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)\;(ab)^{-1}$$

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \sin\theta$$

Здесь P — прижимающая штамп сила, приложенная в центре эллипса, a, b — длины его полуосей, ν_k — корни характеристического уравнения (1.2) работы [1]. Предполагается, что оси эллипса совпадают с осями упругой симметрии среды, т. е. граничная плоскость $z = 0$ совпадает с одной из плоскостей упругой симметрии тела.

Функция (1.1) соответствует распределению напряжений под штампом

$$\sigma_z(x, y, 0) = P\,(2\pi ab)^{-1}(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{-1/2} \tag{1.2}$$

Вне штампа $\sigma_z(x, y, 0) = 0$.

Ортогональные к границе упругие перемещения точек среды под штампом одинаковы и находятся по формуле

$$w(x, y, 0) = P\,(2\pi\sqrt{ab})^{-1}\left\langle \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} i\Delta_k^{(3)}\Delta_k\,(\Delta_0\Delta)^{-1}\right\rangle \tag{1.3}$$

Значения $\Delta_k^{(3)}$, Δ_k, Δ_0 указаны в работе [1]. Здесь и далее угловые скобки означают интегрирование по θ от 0 до 2π. Формула (1.3) определяет осадку штампа, существенно зависящую от материала среды.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением частного вида ортотропного тела, когда упругие постоянные удовлетворяют условиям

$$B = A, \qquad M = L, \qquad G = F$$

В данном случае имеем [2]

$$w(x, y, 0) = P\,(2\pi\sqrt{ab})^{-1}\langle \operatorname{Re} i\Delta_1^*\,(\Delta_0^*\Delta)^{-1}\rangle \tag{1.4}$$

$$\Delta_1^* = -(L + F)(CL)^{-1}D\,(\nu_1 + \nu_2)(\nu_2 + \nu_3)(\nu_3 + \nu_1)$$

$$\Delta_0^* = -(L + F)(CL)^{-1}D\,\Delta_0^{**}$$

$$\Delta_0^{**} = (AC - F^2)C^{-1} - 2K_0\alpha^2\beta^2 + (LF)^{-1}\{N(AC - F^2) + K_0[(A + H)C - 2F^2]\alpha^2\beta^2\}F^{1/2}(DC)^{-1/2}m$$

$$D = (LF)^{-1}[AN + K_0(A + H)\alpha^2\beta^2]$$

$$K_0 = A - 2N - H, \qquad m = \operatorname{Jm}(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)$$

$$HC - F^2 > 0, \qquad A > H$$

(в выражениях Δ_1^*, Δ_0^* устранены опечатки, допущенные в [2]).

Характеристическое уравнение (1.2) работы [1] удобно записать в виде

$$(1.5)\qquad \nu^6 + A_2\nu^4 + A_4\nu^2 + A_6 = 0$$

$$A_2 = (CL)^{-1}[AC + L^2 - (L + F)^2 + CN]$$

$$A_4 = (CL^2)^{-1}\{AL^2 + N[AC + L^2 - (L + F)^2] + [C(A + H) -$$

$$-2(L + F)^2]K_0\alpha^2\beta^2\}, \quad A_6 = FC^{-1}D$$

При указанных неравенствах для всех $\theta \in (0, 2\pi)$ величины A_j положительны. Поэтому уравнение (1.5) не имеет действительных корней. Последнее согласуется с требованием полной эллиптичности системы уравнений упругого равновесия.

Из (1.4) видно, что $w(x, y, 0)$ — симметрическая функция любых трех различных корней уравнения (1.5). Не нарушая общности, можно считать их мнимые части m_k ($k = 1, 2, 3$) положительными, т. е. $m = m_1 + m_2 + m_3 > 0$ для всех θ из указанного промежутка.

Из (1.5) выводим алгебраическое уравнение для m

$$(1.6)\qquad f(m) = (m^2 - A_2)^2 - 8\sqrt{A_6}m - 4A_4 = 0$$

С другой стороны, имеем

$$(\nu_1 + \nu_2)(\nu_2 + \nu_3)(\nu_3 + \nu_1) = -{}^1/_8 if'(m)$$

Поэтому (1.4) записывается в виде

$$(1.7)\qquad w(x, y, 0) = P(16\pi\sqrt{ab})^{-1}\langle f'(m)(\Delta_0^{**}\Delta)^{-1}\rangle$$

Так как величина w должна быть положительной и $\Delta_0^{**}(m) > 0$ при всех θ, то вопрос о существовании и единственности решения поставленной задачи связан, в частности, с выполнением следующих условий: а) существуют положительные корни уравнения (1.6), б) существует единственный положительный корень m этого уравнения, для которого $f'(m) > 0$.

Рассмотрим корни уравнения (1.6). При разных значениях θ из промежутка $(0, 2\pi)$ возможны следующие случаи:

$$A_2^2 - 4A_4 \leqslant 0, \quad A_2^2 - 4A_4 > 0$$

Имеем $f(\pm\infty) > 0$, $f(\sqrt{A_2}) < 0$. В первом случае $f(0) \leqslant 0$, во втором $f(0) > 0$.

Так как $f'(m)$ имеет только один положительный корень, лежащий правее точки $\sqrt{A_2}$, и точками перегиба являются точки $\sqrt{{}^1/_3 A_2}$, то в первом случае имеется только один положительный корень уравнения (1.6), во втором — два. В последнем случае лишь для большего из них $f'(m) > 0$. Следовательно, в обоих случаях указанные выше условия выполняются.

Дифференцируя тождество (1.6) по θ, получим

$$m_\theta' = K_0T_0[f'(m)]^{-1}\sin 4\theta$$

$$T_0 = (2LC\sqrt{A_6})^{-1}\{(A + H)m + \sqrt{A_6}L^{-1}[C(A + H) - 2(L + F)^2]\}$$

Так как $f'(m) \neq 0$, то m достигает экстремума при $\theta = k\pi/4$ ($k = 1, 2, \ldots$). Если $T_0 > 0$ (условие, выполняемое для всех реальных сред, приведенных в [3]), то знак второй производной от m по θ определяется знаком выражения $K_0\cos 4\theta$. Если $K_0 > 0$ ($K_0 < 0$), то m достигает минимума (максимума) при $\theta = 0, \pi/2$ и максимума (минимума) при $\theta = \pi/4$ (достаточно ограничиться рассмотрением только первой четверти).

При $\theta = 0, \pi/2$ корни ν_k уравнения (1.5) находятся в явном виде

$$\nu_{1,2}^2 = (2LC)^{-1}\{[AC - F(F + 2L)] \mp \sqrt{[AC - (F + 2L)^2](AC - F^2)}\}$$

$$\nu_3^2 = -NL^{-1}$$

Тот же результат получим, полагая в (1.5) формально $K_0 = 0$, т. е. вводя «модельную» трансверсально изотропную среду для данного материала. Для этой среды величина m постоянна и в полярных координатах m, θ изображается окружностью, радиус которой равен значению m при $\theta = 0$, $\pi / 2$. Если для данного материала $K_0 > 0$, то кривая, изображающая зависимость m от θ, расположена вне этой окружности, если $K_0 < 0$, то внутри. К первым средам относятся, например, сильвин, плавиковый шпат, каменная соль, пириты кубические. Примером сред, для которых $K_0 < 0$, могут служить (после некоторого усреднения упругих постоянных) топаз, барит.

Таблица 1

	$\theta° = 0$	15	30	45
1	3.49059	3.49059	3.49059	3.49059
2	3.01441	3.00200	2.97596	2.96226
3	3.41205	3.39110	3.34655	3.32274
4	3.36718	3.39839	3.45586	3.48252
5	3.43527	3.47047	3.53457	3.56404
6	3.20477	3.21953	3.24774	3.26124
7	3.25234	3.27046	3.30473	3.32102

Для трансверсально изотропного тела ($K_0 \equiv 0$) $\Delta_0^{**}(m_0)$ и $f'(m_0)$ постоянны, и осадка эллиптического в плане плоского штампа определяется формулой

$$w(x, y, 0) = P\,(16\pi\sqrt{ab})^{-1} f'(m_0)\,\Delta_0^{**}(m_0)\,\langle\Delta^{-1}\rangle$$

где эллиптический интеграл табулирован. Для круглого штампа получаем результат в элементарных функциях.

Если $K_0 \neq 0$, то наибольший корень уравнения (1.6) для любых значений θ можно найти методом последовательных приближений, пользуясь равенством

$$m^2 = A_2 + 2\sqrt{A_4 + 2\sqrt{A_6}\,m}$$

При этом получаем возрастающую ограниченную последовательность, сходящуюся к m. Для изотропной среды имеем $A_2 = A_4 = 3$, $A_6 = 1$, $m = 3$.

В табл. 1 приведены значения m при некоторых θ для берилла (1), топаза (2), барита (3), пиритов кубических (4), плавикового шпата (5), каменной соли (6), сильвина (7).

Данные для топаза и барита получены после усреднения их упругих постоянных (оба материала не принадлежат к рассматриваемому классу [3]). Принято:

для топаза $A = 3215$, $C = 3000$, $H = 1280$, $F = 880$, $L = 1225$, $N = 1330$;

для барита $A = 854$, $C = 1074$, $H = 468$, $F = 274$, $L = 208$, $N = 283$.

Вычисление осадки штампа для указанных выше анизотропных сред проводилось по формуле

$$w^{\circ} = P\,(64\pi a\cdot 10^6)^{-1} T(e), \quad e = b/a$$

$$T(e) = \langle f'(m)\,(\Delta_0^{**}\Delta^{\circ})^{-1}\rangle, \quad \Delta^{\circ} = (\alpha^2 + e^2\beta^2)^{1/2}$$

Значения $T(e)\cdot 10^5$ указаны в табл. 2 (номера сред соответствуют принятым в табл. 1).

Следует отметить, что для модельных сред, введенных выше, соответствующие значения $T(e)$ отличаются от указанных в табл. 2 лишь в четвертом знаке после запятой. Поэтому в практических расчетах, по-видимому, достаточно ограничиться элементарными вычислениями осадки штампа для этих сред.

2. **Осадка плоского эллиптического штампа, оси которого наклонены к осям упругой симметрии материала.** Пусть бо́льшая полуось эллипса давления наклонена к оси x под углом γ_0. Тогда комплексные решения уравнений упругого равновесия могут быть построены в виде

$$u_j(x, y, z) = \sum_{k=1}^{3} \langle \operatorname{Re} u_j^*(\Omega_{1k})\,\Delta^{-2}\rangle \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

$$\Omega_{1k} = (\xi_1 + \dot{\nu}_{1k} z)\,\Delta^{-1}, \quad \xi_1 = x_1\alpha + y_1\beta$$

$$x_1 = x\cos\gamma_0 + y\sin\gamma_0, \quad y_1 = -x\sin\gamma_0 + y\cos\gamma_0$$

Здесь введены новые обозначения для упругих перемещений точек среды, в частности $u_3(x, y, z) = w(x, y, z)$. Функция $u_j^*(\Omega_{ik})$ — изображение функций $u_j(x, y, z)$ в указанном смысле.

Имеем

$$\xi_1 = x\alpha_1 + y\beta_1, \quad \alpha_1 = \cos(\theta + \gamma_0), \quad \beta_1 = \sin(\theta + \gamma_0)$$

Отсюда и из (2.1) следует, что осадка штампа в рассматриваемом случае определяется формулой (1.7), в которой в выражениях $f'(m)$, Δ_0^{**} везде произведена замена

Таблица 2

	$e = 1$	$^1/_2$	$^1/_4$	$^1/_{100}$
1	1224	1680	1919	2498
2	861	1829	1352	1762
3	3195	4387	5006	6520
4	838	1149	1319	1712
5	1997	2741	3128	4067
6	6321	8677	9800	12877
7	10545	14473	16516	21476

Таблица 3

	$\gamma_0° = 5$	15	30	45
1	1680	1680	1680	1680
2	1185	1319	1406	1435
3	4386	4881	5203	5309
4	1156	1283	1368	1397
5	2740	3046	3247	3314
6	8673	9644	10280	10492
7	14469	16086	17148	17502

α, β на α_1, β_1. Видно, что для изотропной среды и трансверсально изотропного тела при условии, что ось z совпадает с осью упругой симметрии, указанный наклон осей штампа не дает нового значения для его осадки. Видно далее, что осадка штампа одинакова при $\gamma_0 = 0, \pi / 2$. Можно показать, что при указанных значениях γ_0, а также при $\gamma_0 = \pi / 4$ она достигает экстремума.

В табл. 3 даны значения $T_1 \cdot 10^5$ для некоторых γ_0 и $e = {}^1/_2$ (номера сред соответствуют принятым в табл. 1).

Из приведенных результатов следует, что для всех указанных сред максимальная осадка имеет место при $\gamma_0 = \pi / 4$.

Поступила 19 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свекло В. А.* Действие штампа на упругое полупространство. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
2. *Свекло В. А.* Задача Герца о сжатии анизотропных тел. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.— Л., ОНТИ. 1935.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 22|XI-1977 г. Т-00319 Подписано к печати 24/I-1978 г. Тираж 2875 экз.
Зак. 3083 Формат бумаги 70×108$^1/_{16}$ Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6,0 Уч.-изд. л. 16,0

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10