Подставим $f = f_n$ в (10). Получим

$$\iint_Q (u - v)\, a_n^{1/2} z_n\, dx\, dt = \iint_Q (u - v)(a_n - a) f_{nxx}\, dx\, dt + \tag{14}$$
$$+ \iint_Q [\psi(v) - \varphi(v)] f_{nxx}\, dx\, dt \equiv I_{1n} + I_{2n}$$

Для оценки I_{1n} воспользуемся неравенством Коши — Буняковского и соотношениями (13), (5). Имеем

$$I_{1n}^2 \leqslant \iint_Q a_n f_{nxx}^2\, dx\, dt \iint_Q (u - v)^2 (1 - a_n^{-1} a)(a_n - a)\, dx\, dt \leqslant \tag{15}$$
$$\leqslant K_2 \max_{\overline{Q}} (a_n - a) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Интеграл I_{2n} оценим с помощью неравенств (13), (3), (5), (6). Обозначим через E множество точек $(t, x) \in Q$, в которых $v(t, x) > 0$. Имеем

$$I_{2n}^2 \leqslant K_1 \iint_E a^{-1} [\psi(v) - \varphi(v)]^2\, dx\, dt \leqslant \tag{16}$$
$$\leqslant K_3 \iint_E \{[\psi(v) + \varphi(v)] / \varphi(v)\}^p\, |\psi(v) - \varphi(v)|^{2-p}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant K_4 \max_{0 \leqslant s \leqslant M_0} |\psi(s) - \varphi(s)|^{2-p}$$

Перейдем в равенстве (14) к пределу при $n \to \infty$. Принимая во внимание соотношения (15) и (16), получим требуемую оценку (7).

Поступила 18 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марков В. Г., Олейник О. А.* О распространении тепла в одномерных дисперсных средах. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
2. *Олейник О. А.* О сходимости решений эллиптических и параболических уравнений при слабой сходимости коэффициентов. Усп. матем. н., 1975, т. 30, вып. 4.
3. *Fasano A., Primicerio M.* Dipendenza continua della temperatura dai coefficienti termici in problemi di conduzione non lineari. Boll. Unione mat. ital., 1974, vol. 9, No. 1, p. 93—103.
4. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, т. 22, № 5.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.

УДК 539.3 : 534.1

К ВОПРОСУ О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СВОБОДНО КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ТЕЛ

А. В. Черкаев

(Ленинград)

Обсуждается корректность постановки задачи о минимизации (максимизации) объема упругого тела, если управлением считается форма свободной компоненты границы тела, а основная частота колебаний и закрепленная компонента границы фиксированы. Показывается, что применение методики Прагера дает необходимое и достаточное условие максимума объема тела, а задача о минимуме объема имеет тривиальное (ну-

левое) решение, если не наложены дополнительные ограничения; предлагается специальный вид ограничений.

Рассматриваемая задача изучалась многими авторами. Прагером [1] была предложена методика определения необходимых и достаточных условий экстремума объема тела для широкого класса самосопряженных задач оптимизации структур. Арман [2] использовал методику Прагера применительно к задачам проектирования пластин переменной толщины, считая ее управлением. Брэч [3] нашел необходимые условия минимума объема балки, управляя ее толщиной. Приведем краткое изложение методики Прагера [1].

Оптимальное тело Σ объема V ограничено поверхностью $S = S' \cup S'' \cup S'''$, участок S' нагружен внешними силами, участок S'' свободен от нагрузок, S''' закреплен. Части S' и S''' считаются фиксированными, а часть S'' может варьироваться.

Привлекаемое к сравнению тело Σ_* ограничено поверхностью $S_* = S' \cup S_*'' \cup$ $\cup\, S'''$ и имеет объем

$$V_* = V + V_+ - V_- \tag{1}$$

получаемый присоединением к объему V объема V_+ и вычитанием объема V_-.

На всех допустимых телах Σ_* определен функционал

$$c = \min_w \int\limits_{V_*} F_* dV_* \tag{2}$$

где c — заданная постоянная, w — перемещение точек тела, F_* — заданная функция от w и ее производных.

Среди допустимых тел требуется определить тело минимального (или максимального) объема.

Согласно условию (2)

$$\int\limits_V F\, dV = \int\limits_{V_*} F_* dV_* \tag{3}$$

где функция F определена в Σ. Учитывая (2), можно записать

$$\int\limits_{V_*} F_* dV_* \leqslant \int\limits_{V_*} F\, dV_* = \int\limits_V F\, dV + \int\limits_{V_+} F\, dV_+ - \int\limits_{V_-} F\, dV_- \tag{4}$$

Теперь, используя (3), получим

$$\int\limits_{V_+} F\, dV_+ - \int\limits_{V_-} F\, dV_- \geqslant 0 \tag{5}$$

Положим

$$\begin{aligned} F &= F_0 = \text{const} \quad \text{на} \quad S'' \\ F &= F_0 - F_+ \quad \text{в } V_+;\ F_+ \geqslant 0 \\ F &= F_0 - F_- \quad \text{в } V_-;\ F_- \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Из (5) и (6) получим

$$F_0(V_+ - V_-) \geqslant \int\limits_{V_+} F_+ dV_+ + \int\limits_{V_-} F_- dV_- \geqslant 0$$

Используя (1), заключаем, что

$$F_0\,(V_+ - V_-) \geqslant 0 \tag{7}$$

Заметим, что применение методики Прагера, если управлением считается закрепленная часть границы, невозможно. Действительно, хотя метод Прагера нигде явно не использует условия, накладываемые на свободный и закрепленный участки границы, неравенство (4) верно лишь для функций w, удовлетворяющих в Σ_* тем же главным краевым условиям, что и в Σ; поэтому метод не может быть применен при вариации закрепленной поверхности, на которой заданы главные краевые условия.

Прагером было предложено, в частности, использовать изложенную выше методику для определения тела экстремального объема, имеющего заданную основную частоту ω. При этом F равна плотности лагранжиана тела

$$F = G - \omega^2 H \tag{8}$$

где G и H — плотности потенциальной и кинетической энергии. Поверхность нагружения S' отсутствует.

Позднее та же методика применялась Арманом [2] в задаче о колебаниях пластины минимального объема; при этом обнаружилось, что объем обращается в нуль, если не вводить гипотезы о неконструктивной массе. Брэч [3] также нашел, что объем балки обращается в нуль, если на ней не лежат сосредоточенные массы.

Задача оптимального проектирования свободно колеблющихся тел имеет ряд особенностей по сравнению со статическими задачами. Во-первых, эта задача однородная, и значения F и F_0 определяются с точностью до произвольного положительного множителя. Этот множитель можно трактовать как коэффициент пропорциональности между переменными состояния и лагранжевыми множителями, если задача решается обычными вариационными методами. Во-вторых, в отличие от статических задач величина F может принимать значения разных знаков.

Покажем, что применение методики Прагера дает необходимое и достаточное условие максимума объема тела при фиксированной основной частоте. Действительно, соотношение (2) равносильно вариационному принципу Релея

$$\omega^2 = \min_{w} \frac{\int\limits_V G\,dV}{\int\limits_V H\,dV}$$

или

$$c = \min_{w} \int\limits_V (G - \omega^2 H)\,dV \equiv 0 \tag{9}$$

Согласно (6) граничное значение F_0 функции $F = G - \omega^2 H$ в оптимальном теле Σ должно быть минимальным. Из (9) вытекает, что

$$F_0 \leqslant 0 \tag{10}$$

причем равенство достигается лишь в случае $F \equiv 0$ во всем объеме, что соответствует ненапряженному состоянию. Исключая этот случай из рассмотрения, перепишем (10) в виде

$$F_0 = G - \omega^2 H < 0 \tag{11}$$

Неравенство (7) позволяет заключить, что $V \geqslant V_*$, т. е. условиям (6) отвечает структура максимального объема.

Из условия оптимальности (11) следует, в частности, что оптимальное тело не может иметь связной компоненты границы, состоящей из закрепленной и свободной поверхностей. Действительно, из (11), ввиду положительности G, следует

$$H \geqslant -F_0 / \omega^2 > 0 \tag{12}$$

на всей поверхности S''. Но кинетическая энергия H является непрерывной функцией элемента поверхности и на S''' выполняется условие $H = 0$; следовательно, условие (12) не может выполняться вблизи S'''.

Тело, удовлетворяющее условиям Прагера, «обволакивает» закрепленную границу и ограничено извне свободной поверхностью.

Пример. Пусть закрепленная компонента границы — сфера. Тогда, как можно убедиться непосредственно, шаровой слой удовлетворяет условиям (6) [4] и, следовательно, является телом максимального объема, обладающим заданной собственной частотой и закрепленной поверхностью.

Простые физические соображения показывают, что решения обратной задачи о теле минимального объема, имеющем заданную основную частоту и закрепленную часть границы S''', не существует, если не наложены дополнительные ограничения. Действительно, приближая неограниченно свободный участок границы S'' к закрепленной части S''', получим тело, обладающее сколь угодно большой частотой собственных колебаний. Теперь, присоединив к этому телу узкий и длинный выступ, опирающийся на S'' и колеблющийся как консольная балка, можно как угодно понизить основную частоту колебаний тела (которая не больше собственной частоты выступа), в частности сделать ее равной заданной. Объем выступа, как и объем всего тела, при этом может быть сделан сколь угодно малым, что соответствует результатам [2,3].

В работах [2,3] удалось найти нетривиальное решение задачи о минимуме объема, используя гипотезу о неконструктивной массе [2] или вводя сосредоточенные массы [3]. Покажем, что и в общей постановке задачи введение подобного предположения может позволить найти нетривиальное решение.

Пусть тело Σ имеет неварьируемую часть Σ_n, состоящую из материала, потенциальная энергия деформации которого равна нулю (например абсолютно твердое тело); кинетическая же энергия предполагается отличной от нуля. Обозначая объем оставшейся части Σ через V_v, перепишем равенство (9)

$$0=\min_w\left\{\int\limits_{V_v}(G-\omega^2H)\,dV_v-\int\limits_{V_n}\omega^2H\,dV_n\right\}$$

или

$$\int\limits_{V_v}(G-\omega^2H)\,dV_v=\omega^2\int\limits_{V_n}H\,dV_n>0$$

Теперь неравенство

$$F_0>0 \tag{13}$$

приводящее к условию минимума объема, не противоречит вариационному принципу Релея; условия Прагера (6) вместе с неравенством (13) дают необходимое и достаточное условие минимума объема тела.

Введение гипотезы о неконструктивной массе позволяет регуляризовать задачи, в которых лагранжиан однороден по управлению, например, задачи, рассмотренные в [2, 3]. Однако эта гипотеза не может регуляризовать такие задачи, как задача о распределении толщины пластины Кирхгофа наименьшего объема с фиксированной основной собственной частотой, где отсутствие оптимального решения, как показано в [5], связано с однонаправленностью рассматриваемых перемещений.

Автор благодарит К. А. Лурье за помощь и постоянное внимание.

Поступила 25 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prager W.* Optimality criteria in structural design. Proc. National Acad. Natur. Sci. USA. 1968. vol. 61, No. 3.
2. *Armand J.-L.* Applications of the theory of optimal control of distributed-parameter systems to structural optimization. NASA, 1972, CR-2044. (Рус. перев. М. «Мир», 1977.)
3. *Brach R. M.* On optimal design of vibrating structures. J. Optimizat. Theory and Appl., 1973, vol. 11, No. 6.
4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.— Л., ОНТИ, 1935.
5. *Лурье К. А., Черкаев А. В.* О применении теоремы Прагера к задаче оптимального проектирования тонких пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6.