УДК 532.546

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ОТ ФУНКЦИИ, ЗАДАЮЩЕЙ РЕЖИМ ПОТОКА

А. С. Калашников

(Москва)

Рассматривается первая краевая задача для уравнения одномерной нестационарной фильтрации в конечной области. Выводится оценка в некоторой интегральной норме для разности двух обобщенных решений, соответствующих двум различным функциям, связывающим давление и плотность, через максимум модуля разности этих функций.

Будем рассматривать первую краевую задачу в прямоугольнике $Q = \{(t, x): 0 < t < T,\ 0 < x < l\}$ для уравнения

$$u_t = [\varphi(u)]_{xx} \tag{1}$$

где функция $\varphi(u)$ определена для значений $u \geqslant 0$, причем $\varphi'(u) > 0$ для $u > 0$. Это уравнение описывает движение жидкостей и газов в пористой среде, а также распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры.

Будем исследовать зависимость обобщенного решения краевой задачи от функции φ. Для линейных параболических уравнений зависимость решений от коэффициентов исследовалась, например, в [1,2], где имеются дальнейшие ссылки. Для одного класса нелинейных параболических уравнений, к которому принадлежит (1), в случае, когда $\varphi'(u) \geqslant \alpha > 0$ при всех допустимых u, этот вопрос изучался в [3]. Здесь рассмотрим случай, когда $\varphi'(0) = \varphi(0) = 0$.

Введем обозначения: $\Gamma = \overline{Q} \setminus (Q \cup \{t = T\})$, $\Gamma_1 = \overline{Q} \setminus (Q \cup \{t = 0\})$. Пусть на Γ заданы краевые условия

$$u(0, x) = h(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \quad u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2}$$

Будем предполагать, что $h(x) \in C([0, l])$, $0 \leqslant h(x) \leqslant M_0$, $h(0) = h(l) = 0$, $\varphi(h(x))$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, $\varphi(u) \in C^1([0, M_0 + 1]) \cap C^6((0, M_0 + 1])$, $\varphi''(u) > 0$ при $u > 0$. Положим

$$\Phi(u, v) = \int_0^1 \varphi'(\theta u + (1 - \theta) v)\, d\theta$$

Будем считать, что для любых $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$[\varphi(v)]^p \leqslant M_1 \Phi(u, v), \quad p = \text{const} \in (0, 2), \quad M_1 = \text{const} > 0 \tag{3}$$

Наложенные на φ ограничения выполняются, например, если $\varphi(u) = u^m$, $m > 1$. В частности, можно проверить, что в этом случае имеет место (3) с $p = (m - 1) / m$ и $M_1 = 1$.

Определение. Обобщенным решением задачи (1), (2) назовем неотрицательную функцию $u(t, x) \in C(\overline{Q})$, которая обладает ограниченной обобщенной производной $[\varphi(u(t, x))]_x$, удовлетворяет условиям (2) и интегральному тождеству

$$\iint\limits_Q \{u f_t - [\varphi(u)]_x f_x\}\, dx\, dt + \int_0^l h(x) f(0, x)\, dx = 0 \tag{4}$$

какова бы ни была функция $f(t, x) \in C^1(\overline{Q})$, равная нулю на Γ_1.

В [4] (см. теорему 3 и замечание 1 после нее) доказано, что при сделанных выше предположениях обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1), (2) существует и единственно. При этом

$$0 \leqslant u(t, x) \leqslant M_0 \quad \text{всюду в } \overline{Q} \tag{5}$$

Пусть функция $\psi(u)$ обладает такими же свойствами, как $\varphi(u)$, за исключением, быть может, соотношения (3). Пусть, кроме того

$$\psi(u) \leqslant M_2\varphi(u), \quad M_2 = \mathrm{const} > 0 \tag{6}$$

Обозначим через $v_i^{\cdot}(t, x)$ обобщенное решение первой краевой задачи в прямоугольнике Q для уравнения

$$u_t = [\psi(u)]_{xx}$$

с условиями (2). Положим $a(t, x) = \Phi(u(t, x), v(t, x))$.

Теорема. Справедлива оценка

$$\iint\limits_Q [a(t, x)]^{1/2}[u(t, x) - v(t, x)]^2\,dx\,dt \leqslant K \max_{0\leqslant s\leqslant M_0} |\psi(s) - \varphi(s)|^{1-p/2} \tag{7}$$

где постоянная $K > 0$ зависит только от величин

$$M_0, M_1, M_2, p, T, l \tag{8}$$

Доказательство. В силу (2) и (4) имеем

$$\iint\limits_Q [uf_t + \varphi(u) f_{xx}]\,dx\,dt + \int\limits_0^l h(x) f(0, x)\,dx = 0 \tag{9}$$

Напишем аналогичное тождество для функции $v(t, x)$ и вычтем его из (9). Получим

$$\iint\limits_Q \{(u - v)(f_t + af_{xx}) + [\varphi(v) - \psi(v)] f_{xx}\}\,dx\,dt = 0 \tag{10}$$

Построим монотонно убывающую последовательность положительных функций $a_n(t, x) \in C^\infty(\overline{Q})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, равномерно сходящуюся в $\overline{Q}$ к $a(t, x)$ при $n \to \infty$. Далее, построим последовательность функций $z_n(t, x) \in C_0^\infty(\overline{Q})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, равномерно сходящуюся в $\overline{Q}$ к $u(t, x) - v(t, x)$ при $n \to \infty$. Как известно (см., например, [5], стр. 88—91), при каждом $n = 1, 2, \ldots$ существует единственное решение $f = f_n(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(\overline{Q})$ первой краевой задачи для уравнения

$$f_t + a_n f_{xx} = a_n^{1/2} z_n \tag{11}$$

в Q с условием

$$f = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \tag{12}$$

Умножим обе части (11) на f_{nxx}, проинтегрируем возникшее равенство по Q, произведем интегрирование по частям с учетом (12) и воспользуемся неравенством Коши. Это даст

$$\iint\limits_Q a_n f_{nxx}^2\,dx\,dt = \iint\limits_Q a_n^{1/2} f_{nxx} z_n\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^l f_n^2(0, x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_Q a_n f_{nxx}^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\iint\limits_Q z_n^2\,dx\,dt$$

откуда

$$\iint\limits_Q a_n f_{nxx}^2\,dx\,dt \leqslant \iint\limits_Q z_n^2\,dx\,dt \leqslant K_1 \tag{13}$$

Здесь и ниже через K_i обозначаются положительные постоянные, зависящие только от величин (8).

Подставим $f = f_n$ в (10). Получим

$$\iint\limits_Q (u - v)\, a_n^{1/2} z_n\, dx\, dt = \iint\limits_Q (u - v)(a_n - a) f_{nxx}\, dx\, dt + \tag{14}$$

$$+ \iint\limits_Q [\psi(v) - \varphi(v)] f_{nxx}\, dx\, dt \equiv I_{1n} + I_{2n}$$

Для оценки I_{1n} воспользуемся неравенством Коши — Буняковского и соотношениями (13), (5). Имеем

$$I_{1n}^2 \leqslant \iint\limits_Q a_n f_{nxx}^2\, dx\, dt \iint\limits_Q (u - v)^2 (1 - a_n^{-1} a)(a_n - a)\, dx\, dt \leqslant \tag{15}$$

$$\leqslant K_2 \max_{\overline{Q}} (a_n - a) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Интеграл I_{2n} оценим с помощью неравенств (13), (3), (5), (6). Обозначим через E множество точек $(t, x) \in Q$, в которых $v(t, x) > 0$. Имеем

$$I_{2n}^2 \leqslant K_1 \iint\limits_E a^{-1} [\psi(v) - \varphi(v)]^2\, dx\, dt \leqslant \tag{16}$$

$$\leqslant K_3 \iint\limits_E \{[\psi(v) + \varphi(v)] / \varphi(v)\}^p\, |\psi(v) - \varphi(v)|^{2-p}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant K_4 \max_{0 \leqslant s \leqslant M_0} |\psi(s) - \varphi(s)|^{2-p}$$

Перейдем в равенстве (14) к пределу при $n \to \infty$. Принимая во внимание соотношения (15) и (16), получим требуемую оценку (7).

Поступила 18 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марков В. Г., Олейник О. А.* О распространении тепла в одномерных дисперсных средах. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
2. *Олейник О. А.* О сходимости решений эллиптических и параболических уравнений при слабой сходимости коэффициентов. Усп. матем. н., 1975, т. 30, вып. 4.
3. *Fasano A., Primicerio M.* Dipendenza continua della temperatura dai coefficienti termici in problemi di conduzione non lineari. Boll. Unione mat. ital., 1974, vol. 9, No. 1, p. 93—103.
4. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, т. 22, № 5.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.

УДК 539.3 : 534.1

К ВОПРОСУ О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СВОБОДНО КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ТЕЛ

А. В. Черкаев

(Ленинград)

Обсуждается корректность постановки задачи о минимизации (максимизации) объема упругого тела, если управлением считается форма свободной компоненты границы тела, а основная частота колебаний и закрепленная компонента границы фиксированы. Показывается, что применение методики Прагера дает необходимое и достаточное условие максимума объема тела, а задача о минимуме объема имеет тривиальное (ну-