УДК 531.31

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УСРЕДНЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Л. И. Конкина

(Фрунзе)

Рассматривается движение гиростата в ньютоновском поле тяготения в канонических переменных действие — угол в окрестности резонанса. Для построения приближенного решения применяется метод усреднения типа Делоне — Хилла [1].

Исследуем движение гиростата вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле тяготения, применяя методы теории возмущений [2]. За невозмущенное движение примем вращение твердого тела, соответствующее случаю Эйлера — Пуансо.

Такой выбор невозмущенного движения целесообразен либо при изучении движения быстро закрученного гиростата, либо при достаточном удалении тела от притягивающего центра [3]. Применение методов теории возмущений особенно эффективно, если уравнения возмущенного движения записаны в гамильтоновой форме в канонических переменных действие — угол. Для случая Эйлера — Пуансо эти переменные рассматривались в работах [4–7].

Представим прежде всего гамильтониан задачи в переменных действие — угол [5]. Кинетическая энергия гиростата определяется формулой [8]

$$T = {}^1/_2\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + J\,(P\alpha + q\beta + r\gamma) + {}^1/_2\,J^2\Omega^2$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции твердого тела; p, q, r — составляющие угловой скорости относительно подвижных осей; α, β, γ — направляющие косинусы оси ротора относительно подвижных осей; J — момент инерции ротора относительно оси вращения; Ω — относительная угловая скорость ротора ($\Omega = \mathrm{const}$). После преобразования к каноническим переменным действие — угол I_1, I_2, I_3, φ_1, φ_2, φ_3, соответственно равным переменным L, G, I, h, v, f работы [5], для областей вращательного движения кинетическая энергия гиростата примет вид

$$T = \frac{I_2^2}{2A}\left(1 - \frac{C-A}{C}\,\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2+\lambda^2}\right) + \frac{J}{A}\left(\alpha S_1 + \frac{A}{B}\beta S_2 + \frac{A}{C}\gamma S_3\right)\Omega I_2 +$$

$$+ \frac{J^2}{A^2}\left(A\alpha^2 + \frac{A^2}{B}\beta^2 + \frac{A^2}{C}\gamma^2\right)\Omega^2$$

$$\varkappa^2 = \frac{C\,(B-A)}{A\,(C-B)}, \quad \lambda^2 = \frac{D^2\,(I_2 - I_3)}{I_2}, \quad D^2 = \frac{2\varkappa^2}{\sqrt{1+\varkappa^2}}$$

$$S_1 = P\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}}\cos(2n+1)\,\varphi_3$$

$$S_2 = -P\sqrt{1+\varkappa^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1-q^{2n+1}}\sin(2n+1)\,\varphi_3$$

$$S_3 = P\varkappa\left(\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos 2n\varphi_3\right)$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}, \quad q = \exp\left(-\pi\,\frac{\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}\right)$$

где K и K′ — полные эллиптические интегралы с модулями λ и $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$ соответственно.

Перейдем к преобразованию силовой функции ньютоновского поля тяготения, которая имеет вид

$$U = -\frac{3g}{2R}(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)$$

(γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы радиус-вектора закрепленной точки с началом в притягивающем центре).

Выражая γ_1, γ_2, γ_3 через переменные действие — угол и используя полученные в [5] разложения в ряды Фурье, приходим к следующим выражениям:

$$\gamma_i = \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{I_2}(\sin\varphi_2 S_{1i} + \cos\varphi_2 S_{2i}) + \frac{I_1}{I_2} S_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$S_{11} = -P\sum_{n=0}^{\infty} C_{n11}\sin(2n+1)\varphi_3, \quad S_{21} = P\sum_{n=0}^{\infty} C_{n21}\cos(2n+1)\varphi_3$$

$$S_{12} = -P\sqrt{1+\varkappa^2}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n12}\cos(2n+1)\varphi_3$$

$$S_{22} = -P\sqrt{1+\varkappa^2}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n22}\sin(2n+1)\varphi_3$$

$$S_{13} = -P\varkappa\sum_{n=1}^{\infty} C_{n13}\sin 2n\varphi_3, \quad S_{23} = P\varkappa\left[-\frac{1}{4\operatorname{sh}\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n23}\cos 2n\varphi_3\right]$$

$$C_{n11} = \frac{\rho\operatorname{ch}\sigma}{\nu}, \quad C_{n21} = \frac{\rho_1\operatorname{sh}\sigma}{\nu}, \quad C_{n12} = \frac{\rho_1\operatorname{ch}\sigma}{\nu_1}$$

$$C_{n22} = \frac{\rho\operatorname{sh}\sigma}{\nu_1}, \quad C_{n13} = \frac{\rho_2\operatorname{ch}\sigma}{\nu_2}, \quad C_{n23} = \frac{\rho_3\operatorname{sh}\sigma}{\nu_2}$$

$$\rho = q^{n+1/2}(1 - q^{2n+1}), \quad \rho_1 = q^{n+1/2}(1 + q^{2n+1}), \quad \rho_2 = q^n(1 - q^{2n})$$

$$\rho_3 = q^n(1 + q^{2n})$$

$$\nu = 1 - 2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma + q^{4n+2}, \quad \nu_1 = 1 + 2q^{2n+1}\operatorname{ch}2\sigma + q^{4n+2}$$

$$\nu_2 = 1 - 2q^{2n}\operatorname{ch}2\sigma + q^{4n}$$

$$\sigma = \frac{\pi}{2K}F\left(\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{\lambda}, \lambda'\right)$$

Здесь $F(\varphi, \lambda)$ — эллиптический интеграл первого рода.

Таким образом, возмущенный гамильтониан (возмущения вызваны наличием ротора и ньютоновского поля тяготения) в переменных действие — угол можно записать в форме ряда, удобного для применения асимптотических методов. С помощью метода усреднения система уравнений возмущенного движения

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial\varphi_i}, \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial I_i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

заменяется упрощенной системой, допускающей интегрирование в квадратурах.

Если ввести малый параметр ε, то функцию Гамильтона можно представить в виде

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \ldots \tag{2}$$

где H_0 — функция Гамильтона, соответствующая невозмущенному движению, εH_1 — пертурбационная функция. Малый параметр вводится следующим образом (k — конечная величина):

$$\varepsilon = \frac{J}{A}, \quad k\varepsilon = \frac{3g}{2R}$$

Для выявления эволюционных свойств возмущенного движения гиростата воспользуемся одним из вариантов метода усреднения по быстрой угловой переменной, впервые в небесной механике введенного в работах Делоне и Хилла.

Этот прием усреднения целесообразен в случае «острой соизмеримости» частот, т. е. в окрестности внутреннего резонанса системы.

Предполагая, что невозмущенное движение близко к соизмеримому по угловым переменным φ_2 и φ_3, введем новую угловую переменную d, называемую в небесной механике аномалией Делоне

$$d = k_1\varphi_2 + k_2\varphi_3 \tag{3}$$

где k_1 и k_2 — некоторые заданные целые положительные числа. Эта переменная характеризует «расстройку» резонанса.

Выполним каноническое преобразование переменных I_i, φ_i к новым переменным I_i^*, φ_i^* $(i = 1,2,3)$ с помощью соотношений

$$\begin{gathered} I_1^* = I_1, \quad \varphi_1^* = \varphi_1 \\ I_2^* = \frac{1}{k_2} I_2, \quad \varphi_2^* = d = k_1\varphi_2 + k_2\varphi_3 \\ I_3^* = I_3 - \frac{k_2}{k_1} I_2, \quad \varphi_3^* = \varphi_3 \end{gathered} \tag{4}$$

Определим из (3)

$$\varphi_2 = \frac{d}{k_1} - \frac{k_2}{k_1}\varphi_3 \tag{5}$$

Подставляя (5) в выражение возмущенной функции, будем иметь

$$H(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = H_1(I_1, I_2, I_3, d, \varphi_3)$$

Усредненное значение гамильтониана получим в результате вычисления среднего относительно φ_3 при фиксированных значениях других переменных. С учетом (4) усредненное значение возмущенной функции запишется в виде

$$\begin{aligned} \overline{H}_1^* = H_0 + \varepsilon \Bigg\{ & \frac{Ak_2I_2^*\gamma\varkappa}{4C} + k\Bigg[\frac{k_2I_2^{*2} - I_1^2}{k_2I_2^{*2}} P^2 \Bigg[\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{n1} + \\ & + \Bigg(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{n3} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n4}\Bigg)\Bigg[\sin 2\left(\frac{d}{k_1} - \frac{k_2}{k_1}2\pi\right) - \sin\frac{2d}{k_1}\Bigg]\Bigg] + \\ & + \frac{2I_1\sqrt{k_2^2I_2^{*2} - I_1^2}}{k_2^2I_2^{*2}}\Bigg[\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{n5} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n6}\Bigg]\Bigg[\sin\left(\frac{d}{k_1} - \frac{k_2}{k_1}2\pi\right) - \\ & - \sin\frac{d}{k_1}\Bigg] + \frac{I_1^2}{2k_2^2I_2^{*2}}\Bigg[\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{n7} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n8}\Bigg]\Bigg]\Bigg\} \end{aligned} \tag{6}$$

$$H_0 = \frac{k_2^2I_2^{*2}}{2A}\left(k - \frac{C-A}{C}\,\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2+\lambda^2}\right)$$

$$\lambda_{n1} = A(C_{n11}^2 + C_{n21}^2) +$$

$$+ B(1+\varkappa^2)(C_{n12}^2 + C_{n22}^2), \quad \lambda_{n2} = C\varkappa^2\left[C_{n13}^2 + C_{n23}^2 + \frac{1}{8\,\mathrm{sh}^2\sigma}\right]$$

$$\lambda_{n3} = A\left[\frac{k_1(C_{n11}^2 - C_{n21}^2)}{4\pi}\,\frac{1-k_2k^*}{k_2} - \frac{C_{n11}C_{n21}k_1^*}{8\pi}\right] +$$

$$+ B(1+\varkappa^2)\left[\frac{k_1(C_{n12}^2 - C_{n22}^2)}{4\pi}\,\frac{1-k_2k_1^*}{k_2} - \frac{C_{n12}C_{n22}k_1^*}{8\pi}\right]$$

$$\lambda_{n4} = C\varkappa^2\left[\frac{k_1(C_{n13}^2 - C_{n23}^2)}{4\pi}\,\frac{1-k_2k_2^*}{k_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{k_3^*(k_1nC_{n13} + k_2C_{n23})}{4\pi \operatorname{sh}\sigma} - \frac{k_3^*k_1nC_{n13}C_{n23}}{\pi}\right]$$

$$\lambda_{n5} = A\left(\frac{k_1C_{n21}C_{n1}}{4\pi k_2} + \frac{C_{n11}C_{n1}k_1^*}{2\pi}\right) + B(1+\varkappa^2)\times$$

$$\times\left(\frac{C_{n12}C_{n2}k_1^*}{4\pi} - \frac{C_{n22}C_{n2}k^*k_1}{4\pi} - \frac{k_1C_{n22}C_{n2}}{4\pi k_2}\right)$$

$$\lambda_{n6} = \frac{k_3^*}{8\pi}\left(k_1nC_{n13} + \frac{k_2}{\operatorname{sh}\sigma}C_{n3} + k_2C_{n23}\right) - \frac{2nk_1^*C_{n13}C_{n3}}{\pi(k_2^2 - 16n^2k_1^2)} -$$

$$- \frac{k_1}{4\pi k_2}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\sigma} + C_{n23}C_{n3}\right)$$

$$\lambda_{n7} = AC_{n1}^2 + B(1+\varkappa^2)C_{n2}, \quad \lambda_{n8} = C\varkappa^2(1/6 + C_{n3}^2)$$

$$k^* = \frac{k_2}{k_2^2 - k_1^2(2n+1)^2}, \quad k_1^* = \frac{k_1^2(2n+1)}{k_2^2 - k_1^2(2n+1)^2}$$

$$k_2^* = \frac{k_2}{k_2^2 - k_1^2 4n^2}, \quad k_3^* = \frac{k_1}{k_2^2 - k_1^2n^2}$$

Усредненные уравнения возмущенного движения имеют следующую структуру:

$$\frac{\partial I_i^*}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \overline{I}_2^*}{\partial t} = \varepsilon\Phi_1(I_1^*, I_2^*, I_3^*, d) \quad (i = 1, 3) \tag{7}$$

$$\frac{\partial \overline{\varphi}_1^*}{\partial t} = \varepsilon\Phi_2(I_1^*, I_2^*, I_3^*, d), \quad \frac{\partial \overline{\varphi}_i^*}{\partial t} = \omega_i + \varepsilon\Phi_3(I_1^*, I_2^*, I_3^*, d) \quad (i = 2, 3)$$

$$\omega_2 = \frac{k_2I_2^*}{A} - \frac{C-A}{2AC}\,\frac{I_2^*\varkappa^2}{\eta}\left[(D^2(2k_1k_2 - 3) - 2k_1k_2\varkappa^2)I_2^* - 3D^2I_3^*k_1\right]$$

$$\omega_3 = \frac{A-C}{2AC}\,\frac{k_1I_3^*\varkappa^2D^2}{\eta}, \quad \eta = [I_2^*(D^2(1-k_1k_2) + \varkappa^2) + D^2k_1I_3^*]^2$$

Усредненная система уравнений (7) обладает тремя первыми интегралами

$$I_1^* = C_1, \quad I_3^* = C_2, \quad \overline{H}_1^*(I_1^*, I_2^*, I_3^*, \varepsilon, d) = C_3 \tag{8}$$

С помощью (8) задача сводится к квадратурам. Из третьего (трансцендентного) соотношения (8) можно выразить действие в виде ряда по степеням ε

$$I_2^* = I_2^*(d, \varepsilon) \tag{9}$$

Соотношение (9) можно представить в виде ряда Фурье, коэффициенты которого — степенные ряды относительно ε. Очевидно, что при предложенном способе решения задачи в выражении I_2^* не будет вековых возмущений, в него войдут лишь долгопериодические возмущения через аномалию d. Коэффициенты долгопериодических возмущений будут тем больше, чем «острее» соизмеримость частот.

Затем из дифференциального уравнения для $\bar{\varphi}_2^*$ находим зависимость

$$t = t_0 = \int\limits_{\bar{\varphi}_{20}^*}^{\bar{\varphi}_2^*} \frac{d\varphi_2^*}{\omega_2 + \overline{\Phi}_3(I_1^*, I_2^*, I_3^*, \varphi_2^*)}$$

Теперь $\bar{\varphi}_2^*$ и I_2^* — известные функции времени. Это позволяет найти $\bar{\varphi}_1^*$ и $\bar{\varphi}_3^*$ как функции времени

$$\bar{\varphi}_i^* - \bar{\varphi}_{i0}^* = \int\limits_0^t \Phi_i(t)\,dt \quad (i = 1, 3)$$

Согласно теоремам обоснования асимптотических методов [1], для любого $\mu > 0$ при некотором $\varepsilon_0(\mu)$ при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ справедливы неравенства: $|I_i - \bar{I}_i| < \mu$.

Канонические переменные I_i характеризуют поведение возмущенных роторов. При сравнительно малых ε траектории возмущенного движения наматываются на мало-деформированные торы.

Таким образом, полученные решения усредненных уравнений как в качественном, так и в количественном отношении с большой степенью точности представляют реальное движение гиростата в ньютоновском поле тяготения в области однократного внутреннего резонанса.

Автор благодарит В. Г. Демина, под руководством которого выполнена эта работа.

Поступила 12 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Новые качественные методы в небесной механике. М., «Наука», 1971.
2. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М., «Наука», 1968.
3. *Демин В. Г., Киселев Ф. И.* Новый класс периодических движений твердого тела с одной неподвижной точкой в ньютоновском поле сил. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 5.
4. *Борн М.* Лекции по атомной механике, т. 1. Харьков — Киев, Гос. науч.-техн. изд. Украины, 1934.
5. *Садов Ю. А.* Переменные действие — угол в задаче Эйлера — Пуансо. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5,
6. *Boigey F.* Une thèorie des perturbations en variables angles — actions. Application au mouvement d'un solide autor d'un point fixe. Précession — nutation. J. méc., 1972, vol. 11, No. 3, p. 521—543.
7. *Kinoshita H.* Stationary motions of triaxial body and their stabilities. Publ. Astron. Soc. Japan, 1972, vol. 24, No. 3.
8. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутника. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1967.