УДК 531/534

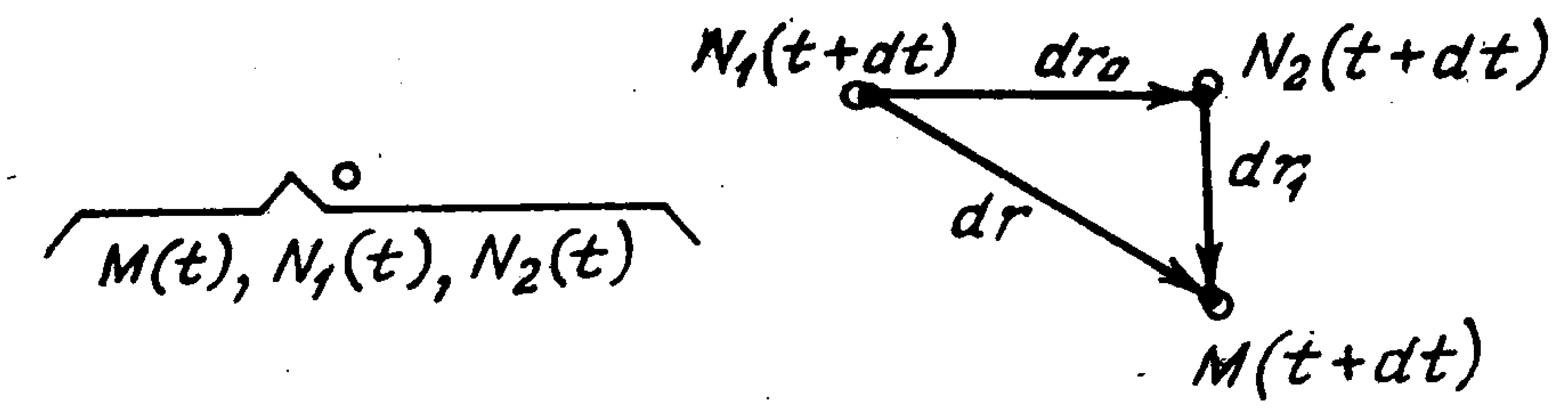
О СЛОЖЕНИИ ДВИЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Л. И. Седов

(Москва)

Рассмотрим в рамках ньютоновской механики кинематическую задачу о движении некоторой индивидуализированной точки M относительно двух произвольных деформируемых систем отсчета с соответственно индивидуализированными точками с помощью лагранжевых координат x^α и ξ^α.

Обозначим через $N_1(x^\alpha)$ и $N_2(\xi^\alpha)$ индивидуальные точки, взятые в указанных системах отсчета, которые в произвольно отмеченный данный момент времени t совпадают с точкой M. В следующий, близкий момент времени $t + dt$ точки N_1, N_2 и M становятся различными (см. фигуру). Для них можно определить бесконечно малые векторы относительных смещений $\mathbf{N_1M} = d\mathbf{r}$, $\mathbf{N_1N_2} = d\mathbf{r}_0$, $\mathbf{N_2M} = d\mathbf{r}_1$, образующие



бесконечно малый треугольник. Эти векторы и соответствующий треугольник, отвечающий моменту $t + dt$, можно рассматривать как в координатных системах x^α или ξ^α, так и в любых других системах координат.

Введем координатные базисы $Э_\alpha = \partial\mathbf{r} / \partial x^\alpha$ в системе x^α и $Э_{\hat\alpha} = \partial\mathbf{r} / \partial \xi^\alpha$ в системе ξ^α.

Для векторов относительных смещений можно записать

$$d\mathbf{r} = dx^\alpha Э_\alpha = d\hat{x}^\alpha Э_{\hat\alpha}, \quad d\mathbf{r}_1 = d\xi^\alpha Э_{\hat\alpha}$$

$$d\mathbf{r}_0 = dx_0{}^\alpha Э_\alpha = d\hat{x}_0{}^\alpha Э_{\hat\alpha}$$

$$dr = dr_1 + dr_0 \tag{1}$$

Время t в ньютоновской механике абсолютно, одинаково и может считаться синхронизированным во всех индивидуализированных точках. Определим систему отсчета x^α, t как систему наблюдателя, а систему отсчета ξ^α, t как систему отсчета переносного движения. В связи с этим введем «абсолютную» скорость $\mathbf{v}_a$, относительную скорость $\mathbf{v}_r$ и переносную скорость $\mathbf{v}_t$ по следующим формулам:

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx^\alpha}{dt} Э_\alpha = \frac{d\hat{x}^\alpha}{dt} Э_{\hat\alpha} = \hat{v}_a{}^\alpha Э_{\hat\alpha}$$

$$\mathbf{v}_r = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\xi^\alpha}{dt} Э_{\hat\alpha} = \hat{v}_r{}^\alpha Э_{\hat\alpha}$$

$$\mathbf{v}_t = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{dx_0{}^\alpha}{dt} Э_\alpha = \frac{d\hat{x}_0{}^\alpha}{dt} Э_{\hat\alpha} = \hat{v}_t{}^\alpha Э_{\hat\alpha}$$

На основании формулы (1) и универсальности времени для любого момента времени t можно написать

$$\mathbf{v}_a(t) = \mathbf{v}_r(t) + \mathbf{v}_t(t) \tag{2}$$

Равенство (2) — основное соотношение между различными скоростями, связанными с движущейся точкой M, относительно любых деформируемых систем отсчета.

Рассмотрим теперь различные ускорения, представляющие собой производные по времени от введенных векторов скорости, рассматриваемых для подвижной точки M. Абсолютное ускорение точки M относительно системы отсчета x^α, t определено в предположении, что векторы базиса $Э_\alpha$ постоянны во времени, следующей формулой:

$$(\mathrm{a}_a)_M = \left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}\right)_M = \frac{dv_a{}^\alpha}{dt} Э_\alpha = \left(\frac{\partial v_a{}^\alpha}{\partial t} + v_a{}^\beta \nabla_\beta v_a^\alpha\right) Э_\alpha \tag{3}$$

Относительное ускорение подвижной точки M в системе отсчета ξ^α

$$(\mathrm{a}_r)_M = \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_M = \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial \xi^\beta}\frac{d\xi^\beta}{dt} = \left(\frac{\partial v_r{}^{\hat\alpha}}{\partial t} + v_r{}^{\hat\beta}\nabla_{\hat\beta} v_r{}^{\hat\alpha}\right) Э_{\hat\alpha} + \tag{4}$$

$$+ v_r{}^{\hat\alpha}\left(\frac{\partial Э_{\hat\alpha}}{\partial t}\right)_{\xi^\alpha} = (\mathrm{a}_r)_{N_2=M} + v_r{}^{\hat\alpha}\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \xi^\alpha} = (\mathrm{a}_r)_{N_2=M} + v_r{}^{\hat\alpha}\nabla_{\hat\alpha}\, v_t{}^{\hat\beta} Э_{\hat\beta}$$

В переносной системе учитывается изменение векторов базиса относительно системы наблюдателя, в связи с этим верны формулы

$$\left(\frac{\partial Э_{\hat\alpha}}{\partial t}\right)_{\xi^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t}\right)_{\xi^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \xi^\alpha} = \nabla_{\hat\alpha} v_t{}^{\hat\beta} Э_{\hat\beta}$$

Относительное ускорение $(\mathrm{a}_r)_{N_2}$ определено в базисе $Э_{\hat\alpha}$ так же, как абсолютное в базисе $Э_\alpha$.

Переносное ускорение для точки M, перемещающейся относительно системы отсчета ξ^α, t, определим формулой

$$(\mathrm{a}_t)_M = \left(\frac{d\mathbf{v}_t}{dt}\right)_M = \left(\frac{d\mathbf{v}_t}{dt}\right)_{N_2=M} + \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \xi^\alpha}\frac{d\xi^\alpha}{dt} = (\mathrm{a}_t)_{N_2=M} + v_r{}^{\hat\alpha}\nabla_{\hat\alpha} v_t{}^{\hat\beta} Э_{\hat\beta} \tag{5}$$

Дифференцируя формулу (2) с учетом равенств (3) — (5), получим

$$(\mathrm{a}_a)_M = (\mathrm{a}_r)_M + (\mathrm{a}_t)_M = (\mathrm{a}_r)_{N_2=M} + (\mathrm{a}_t)_{N_2=M} + 2v_r{}^{\hat\alpha}\nabla_{\hat\alpha} v_t{}^{\hat\beta} Э_{\hat\beta} \tag{6}$$

Вектор последнего члена можно писать в любом базисе и, в частности, в базисе $Э_\beta$, учитывая еще, что

$$\nabla_{\hat\alpha} v_t{}^{\hat\beta} Э_{\hat\beta} = \nabla_{\hat\alpha} v_{\beta t} Э^{\hat\beta} = \nabla_\alpha v_{\beta t} Э^\beta = (e_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}) Э^\beta$$

$$e_{\alpha\beta} = {}^1\!/_2 (\nabla_\alpha v_{\beta t} + \nabla_\beta v_{\alpha t}), \quad \omega_{\alpha\beta} = {}^1\!/_2 (\nabla_\alpha v_{\beta t} - \nabla_\beta v_{\alpha t})$$

Формуле (6) для определения ускорения $(\mathrm{a}_a)_M$ можно придать следующий окончательный вид:

$$(\mathrm{a}_a)_M = (\mathrm{a}_r)_M + (\mathrm{a}_t)_M = (\mathrm{a}_r)_{N_2=M} + (\mathrm{a}_t)_{N_2=M} + 2v_r{}^\alpha (e_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}) Э^\beta \tag{7}$$

Формула (7) представляет собой обобщение «теоремы Кориолиса». Здесь $\omega_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор, представляющий собой мгновенную угловую скорость осей деформации в точке N_2 для движения переносной системы отсчета относительно базиса $Э_\alpha$, а $e_{\alpha\beta}$ — тензор скоростей деформации репера $Э_{\hat\alpha}$ в движении переносной системы относительно базисного репера $Э_\alpha$ в системе наблюдателя.

Обычно теорема Кориолиса устанавливается для абсолютно твердых систем отсчета с базисами $Э_\alpha$ и $Э_{\hat\alpha}$. В этом случае $e_{\alpha\beta} \equiv 0$, и формула (7) приобретает обычный вид.

В динамических задачах обычно под системой наблюдателя на практике подразумевается инерциальная система координат, поэтому употребляется термин «абсолютное ускорение».

Отметим, что в общем случае в формуле (7) все величины точно определены и не подразумевается, что система наблюдателя недеформируема, хотя в формуле (3) при определении абсолютного ускорения применяются допущения о постоянстве по времени векторов базиса $Э_\alpha$ (по координатам эти векторы могут меняться как угодно).

По сравнению с обычным доказательством теоремы Кориолиса предыдущий вывод, при наличии простейших представлений о тензорном анализе, почти без всяких выкладок дает более общий результат в более общей ситуации с наглядной демонстрацией причины возникновения и природы «добавочного» ускорения в формуле (7).

Разделение движений подвижной точки M на абсолютное и относительное связано с введением системы отсчета переносного движения; такая система может вводиться глобально и голономным образом, а также локально для каждого положения движущейся точки M и вообще не голономным способом.

Промежуточную систему отсчета переносного движения можно рассматривать как систему индивидуальных точек с вмороженными координатными линиями. Такая система точек может образовывать материальную среду — это может быть твердое тело, жидкость, газ, плазма, облако пыли или некоторый идеальный объект, вводимый с помощью специальных математических конструкций.

Например, для данной системы притягивающихся конечных масс по закону Ньютона или материальных точек можно рассмотреть систему отсчета, образованную траекториями пробных материальных точек, заполняющих некоторый объем. Соответствующую лагранжеву систему координат для переносного движения можно сконструировать следующим образом. Уравнения движения пробных частиц материальных точек в гравитационном поле в инерциальной системе отсчета x^α имеют вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{g} = \mathbf{f} \tag{8}$$

где $\mathbf{g}(x^2, x^2, x^3, t) = \operatorname{grad} U$ — ускорение силы тяжести, U — удельный потенциал гравитационных сил, а $\mathbf{f}$ — внешняя сила, рассчитанная на единицу массы. Отличие от нуля $\mathbf{f}$ может обусловливаться электромагнитными силами и негравитационными силами взаимодействия данной частицы с соседними и другими частицами. При движении свободных частиц, взаимодействующих между собой только гравитационными притяжениями, имеем: $\mathbf{f} = 0$.

Уравнения (8) верны для движения пылевых частиц в гравитационном поле или для чувствительных элементов — «шариков» аксельрометров, установленных в некоторых точках тела, закрепленных на пружинах или иным способом, позволяющим измерять вектор $\mathbf{f}$.

Решением задачи Коши для уравнения (8), при заданных значениях начальных скоростей $\mathbf{v}_0 = \xi^\alpha Э_\alpha$ при $t = t_0$ в точках некоторого объема, можно получить деформируемую систему отсчета переносного движения с лагранжевыми координатами ξ^α.

Легко усмотреть, что если положить $\mathbf{v}_0 = \operatorname{grad} \varphi$, то при $\mathbf{f} = 0$ потенциальность гидродинамического поля скоростей для движения пробных точек, образующих переносную систему отсчета относительно инерциальной системы отсчета x^α, где $\mathbf{r} = x^\alpha Э_\alpha$, будет сохраняться при всех $t \neq t_0$.

Таким образом, в задачах небесной механики можно сконструировать сопутствующую систему переносного движения, в которой во всех точках имеет место равенство $\omega_{\alpha\beta} = 0$, однако в общем случае тензор скоростей деформации отличен от нуля, т. е. $e_{\alpha\beta} \neq 0$.

При использовании переносной системы отсчета, движущейся поступательно, верны равенства: $\omega_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} = 0$.

При полете тел в гравитационном поле целесообразно вводить системы отсчета переносного движения локально. На основании соотношений (7) и (8) получим

$$\mathbf{a}_r + 2v_r{}^\alpha (e_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}) Э^\beta = \mathbf{f}$$

Ясно, что в общем случае $\mathbf{f} \neq \mathbf{a}_r$. Однако $\mathbf{f} = \mathbf{a}_r$, если $\mathbf{v}_r = 0$ или когда переносная система отсчета, вводимая локально, движется относительно инерциальной системы отсчета поступательно с ускорением $\mathbf{g}$ в данной рассматриваемой точке, причем такое рассмотрение применимо и в случаях, когда ускорение $\mathbf{g}$ в соседних точках может быть другим.

Поступила 11 VII 1977