Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.374

ДИФРАКЦИЯ УДАРНЫХ ВОЛН НА МАЛЫХ УГЛАХ В ИДЕАЛЬНОЙ УПЛОТНЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

И. В. Симонов

(Москва)

Рассматривается задача о дифракции плоской ударной волны около стенки, составляющей малый угол с вектором нормали к фронту падающей волны. Волна распространяется в идеальной уплотняющейся среде. Эта модель среды используется для приближенного описания механического поведения пористых материалов при давлениях много выше предела текучести, но пока сжимаемостью скелета можно пренебречь по сравнению с деформацией упаковки.

Приводится решение методом [1], примененным к задаче Лайтхилла [2], и методом, в котором данная задача рассматривается как задача особых возмущений. С использованием теории приближенных конформных отображений близких областей [3] получено первое приближение во внешнем разложении, имеющее меньшую особенность в угловой точке. При малой степени уплотнения (слабая ударная волна) равномерное первое приближение строится методом сращиваемых асимптотических разложений [4]. Асимптотика решения вблизи вогнутого угла совпадает с известной асимптотикой течения вблизи кромки клина [4]. Около выпуклого угла решение неограничено. Ограниченное решение в этом случае следует искать, принимая другую схему обтекания, например с учетом свободной поверхности, образующейся из-за отрыва потока.

В случае большой деформации (сильная ударная волна) показано, что область нерегулярности конечна, и задача усложняется, так как уже первый член внешнего разложения зависит от внутреннего решения.

Отметим, что в отличие от задачи нерегулярного отражения, где асимптотика связана с близостью тройной точки к отражающей поверхности (начало изучения этой задачи на основе теории коротких волн положено в [5]) здесь рассмотрен асимптотический случай противоположного смысла: тройная точка расположена очень далеко от отражающей поверхности.

1. Постановка задачи. Пусть идеальная уплотняющаяся среда занимает область, ограниченную жесткой стенкой AOE, причем луч OE составляет малый угол с продолжением луча AO (фиг. 1). Плоская ударная волна, параметры которой за фронтом (p_0 — давление, u_0 и d_0 — массовая и волновая скорости) постоянны, движется параллельно AO и в момент времени $t = 0$ достигает точки излома стенки O. Задача состоит в расчете двумерного автомодельного движения среды, возникающего в результате дифракции при $t > 0$.

Предполагается, что перед фронтом среда покоится и давление равно нулю; плотность среды $\rho = \rho_0$ перед фронтом и $\rho = \rho_1 = \mathrm{const} > \rho_0$ $(-\infty < t < \infty)$ за фронтом волны согласно принятой модели.

Обозначим через p' и $\mathbf{u}'$ давление и вектор массовой скорости в неподвижной системе координат x, y (фиг. 1), а уравнение фронта будем искать в виде

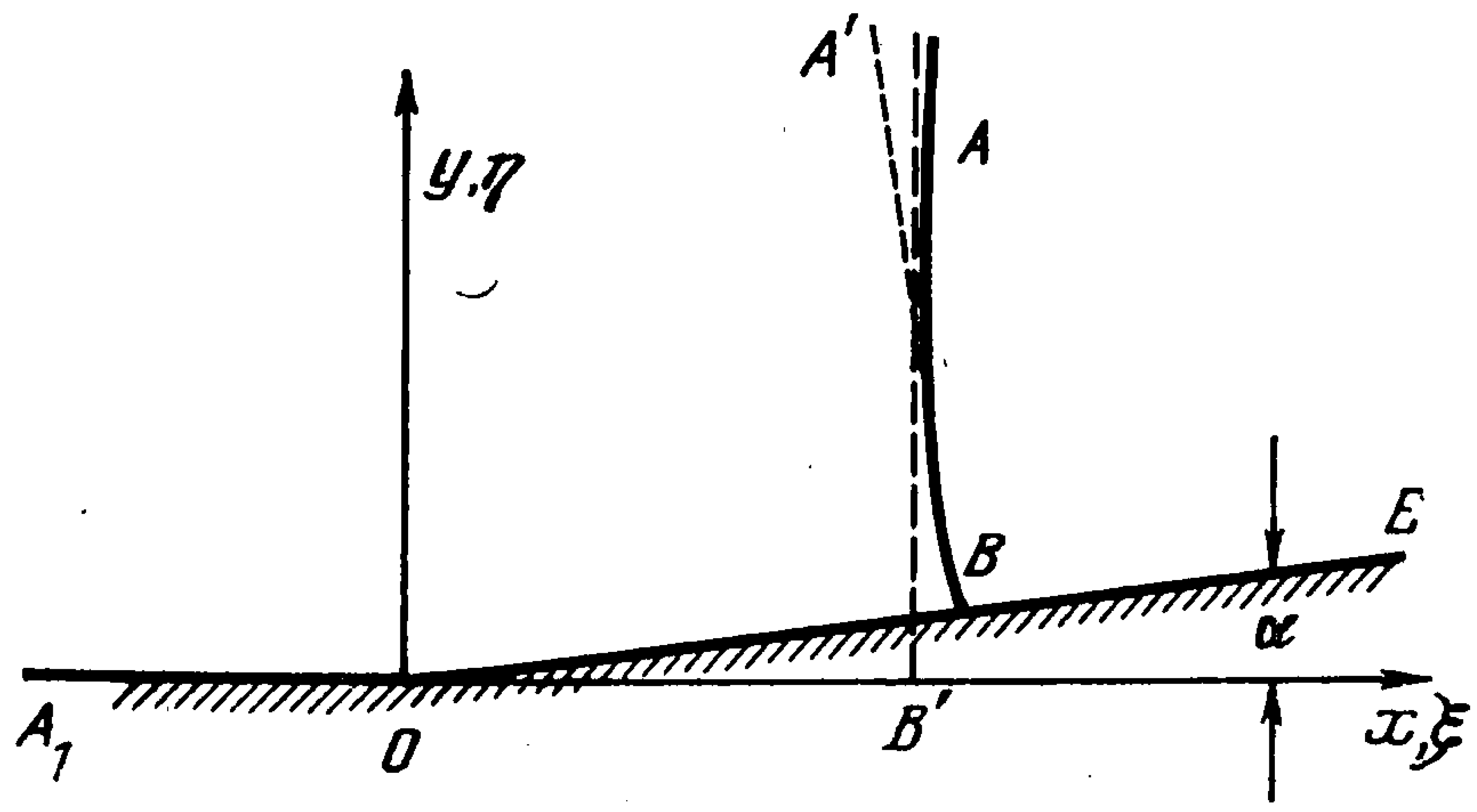
$$x = d_0 t\,[1 + f'(y, t)]$$

Введем безразмерные и автомодельные переменные

$$\xi = x/d_0 t, \quad \eta = y/d_0 t, \quad p = p'/p_0$$
$$\mathbf{u} = (u, v) = \mathbf{u}'/u, \quad \xi = \xi(\eta) = 1 + f(\eta)$$

— уравнение поверхности фронта.

В переменных ξ, η система уравнений Эйлера в области Ω, занятой движущейся средой, граничные условия задачи на фронте и стенке и



Фиг. 1

условия совместности в точке B примут вид ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе)

(1.1) $$\Omega: \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad K\mathbf{u} = \theta\nabla p \quad (p \to 1, \mathbf{u} \to (1, 0), r \to \infty)$$
$$AB: p = |\mathbf{u}|^2, \quad \mathbf{u} = \frac{\xi - \eta\xi'}{1 + \xi'^2}(1, -\xi') \quad (\xi(\eta) \to 1, \eta \to \infty)$$
$$A_1OB: \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \text{в точке } B: \eta/\xi = v/u = \operatorname{tg}\alpha$$
$$K = (\xi - \varepsilon u)\partial/\partial\xi + (\eta - \varepsilon v)\partial/\partial\eta, \quad \varepsilon = 1 - \theta = 1 - \rho_0/\rho_1$$
$$r^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad \xi' = d\xi/d\eta$$

Решение будем искать в виде рядов по малому параметру α

$$p = 1 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \ldots, \quad u = 1 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots$$
$$v = \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + \ldots, \quad f = \alpha f_1 + \alpha^2 f_2 + \ldots$$

Подставляя эти ряды в (1.1) для первого приближения, поиском которого ограничимся, получим задачу

(1.2) $$\Omega: \operatorname{div}\mathbf{u}_1 = 0, \quad K_1\mathbf{u}_1 = \theta\nabla p_1 \quad (p_1 \to 0, \mathbf{u}_1 \to 0, r \to \infty)$$
$$AB: p_1 = 2u_1, \quad u_1 = f_1 - \eta f_1', \quad v_1 = -f_1' \quad (f_1 \to 0, \eta \to \infty)$$
$$A_1OB: \partial p_1/\partial n = 0, \quad \text{в точке } B: v_1 = 1, \quad \eta = \alpha$$
$$(\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1)), \quad K_1 = (\xi - \varepsilon)\partial/\partial\xi + \eta\partial/\partial\eta)$$

Исключив u_1, f_1 из системы (1.2), получим

(1.3) Ω: $\Delta p_1 = 0 \quad (p_1 \to 0,\ r \to \infty)$

(1.4) AB: $2\theta\eta \dfrac{\partial p_1}{\partial \xi} - (\eta^2 - \theta)\dfrac{\partial p_1}{\partial \eta} = 0, \quad \int\limits_{BA} \dfrac{\partial p_1}{\eta} = -2$

(1.5) A_1OB: $\partial p_1/dn = 0$

Здесь второе условие (1.4) следует из условий на фронте и условий совместности (1.2).

Таким образом, задача для первого приближения сводится к отысканию гармонической в области Ω функции p по краевым условиям (1.4), (1.5).

2. **Решение задачи в предположениях Лайтхилла.** Следуя методу [1, 2], снесем краевые условия на невозмущенную границу области Ω $A_1OB'A$. Из предположения о малости возмущений всюду в области следуют условия: $v_1 = 0$ на A_1O и $v_1 = 1$ на OB, а тогда условие (1.5) заменяется на [1, 2] ($\delta(\xi)$ — дельта-функция)

$$AOB'\colon\ \partial p_1/\partial n = -\varepsilon\delta(\varepsilon)/\theta$$

Введем комплексную переменную $\zeta = \xi + i\eta$ и функцию $P = p_1 + iq$, аналитическую в Ω. Преобразование $\zeta_1 = 1 - (1 - \zeta)^2 = \xi_1 + i\eta_1$ конформно переводит область Ω на верхнюю полуплоскость ζ_1 с нормировкой $\zeta_1(0) = 0$, $\zeta_1(1) = 1$, $\zeta_1(\infty) = \infty$. Для аналитической в верхней полуплоскости ζ_1 функции $dP/d\zeta_1 = dp_1/d\xi_1 - i\partial p_1/\partial\eta_1$ условия на действительной оси можно записать в виде

(2.1) $$a\frac{\partial p_1}{\partial \eta_1} + b\frac{\partial p_1}{\partial \xi_1} = c$$

$$a = 2\theta\sqrt{\xi_1 - 1}, \quad b = \xi_1 - 1 - \theta \quad (\xi_1 > 1)$$

$$a = 1, \quad b = 0 \quad (\xi_1 < 1)$$

$$c = -\varepsilon\delta(\xi_1)/(2\theta) \quad (-\infty < \xi_1 < \infty)$$

Сформулированная неоднородная задача Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами решается методом [2, 6]. Единственность решения обеспечивает условие на бесконечности. Выпишем окончательный результат

(2.2) $$\frac{dP}{d\zeta} = R(\zeta)\left[\frac{\varepsilon(1+3\theta)}{\pi\theta\zeta(\zeta-2)} + A_0\right] \quad \left(R = \frac{1}{(1-\zeta)^2 + 2\theta(1-\zeta) + \theta}\right)$$

Постоянная A_0 определяется из интегрального условия (1.4).

При малых величинах уплотнения ($\varepsilon \ll 1$, $\theta \approx 1$) с точностью до величин более высокого порядка малости по ε вычислим

(2.3) $$P \approx 4/[\pi(2-\zeta)] \quad (|\zeta| = O(1))$$

$$P \approx -\frac{\varepsilon}{2\pi}\ln\zeta + \text{const} \quad (|\zeta| \to 0)$$

Как следует из (2.2), (2.3) и (1.2), давление имеет логарифмическую особенность в точке $\zeta = 0$, а скорость — в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = \varepsilon$. Аналогичный результат имеет место в [1, 2].

Рассматриваемая задача является задачей особых возмущений. Равномерно пригодное первое приближение будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений. Для первого члена внешнего разложения имеем задачу (1.2), сводящуюся к (1.3) — (1.5). Ее решение не единственно, так как особенность в условиях (излом стенки) позволяет добавлять к решению функции с особенностью в точке O и не влияющие на краевые условия. При выборе решения будем руководствоваться общими принципами минимальной особенности и сращиваемости с дополнительным разложением [4].

3. Решение задачи методом сращиваемых асимптотических разложений (первое приближение). Пусть $\zeta = \zeta(\zeta_1)$ — функция, отображающая полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta_1 > 0$ на возмущенную область течения Ω с нормировкой $\zeta(0) = 0$, $\zeta(1) = \zeta_B$, $\zeta(\infty) = \infty$. На действительной оси условие для аналитической в верхней полуплоскости ζ_1 функции $dP/d\zeta_1$, следующее из (1.4), (1.5), запишется в виде

$$(3.1)\qquad a_1(\xi_1)\frac{\partial p_1}{\partial \eta_1} + b_1(\xi_1)\frac{\partial p_1}{\partial \xi_1} = 0$$

$$a_1 = 1,\ b_1 = 0 \qquad (\xi_1 < 1)$$

$$a_1 = a_2\frac{\partial \xi}{\partial \xi_1} - b_2\frac{\partial \eta}{\partial \xi_1},\quad b_1 = a_2\frac{\partial \eta}{\partial \xi_1} + b_2\frac{\partial \xi}{\partial \eta_1}\qquad (\xi_1 > 1)$$

$$a_2 = 2\theta\dot{\eta}(\xi_1),\ b_2 = \theta - \eta^2(\xi_1)$$

Особенность $\partial p_1/\partial \eta_1$ в точке O здесь не возникает. В п. 2 она следует из предположения о регулярности разложения, которая не выполняется в окрестности $\zeta = 0$.

Равномерное приближение к функции $\zeta(\zeta_1)$ и ее производной в области $\operatorname{Im} \zeta_1 > 0$ можно записать в виде

$$(3.2)\qquad \zeta \approx 1 + i\sqrt{\zeta_1 - 1},\quad \frac{d\zeta}{\partial \zeta_1} \approx \frac{i}{2\sqrt{\zeta_1 - 1}}\qquad (|\zeta| > r_0)$$

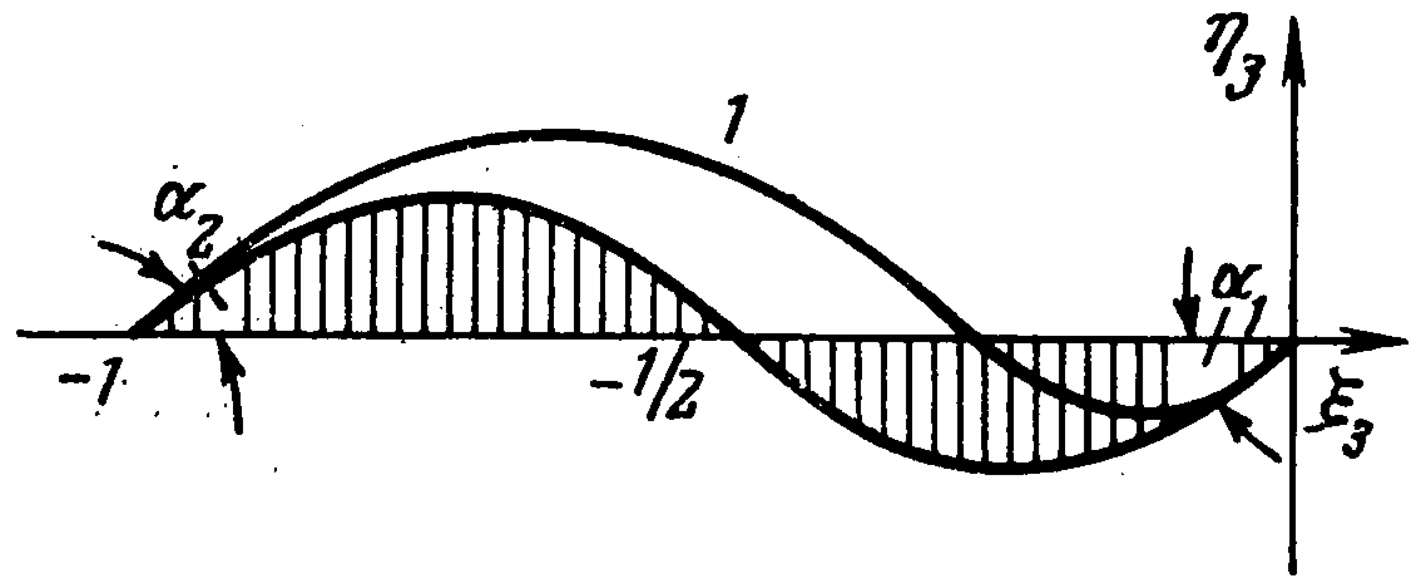
$$\frac{d\zeta}{d\zeta_1} \approx \frac{ie^{i\pi\delta_1}}{2\zeta_1^{\delta}\sqrt{\zeta_1 - 1}}\qquad (|\zeta| < r_0)$$

Здесь r_0 — некоторое число, удовлетворяющее условиям: $r_0 \ggg \delta$, $r_0 \ll 1$, радикал следует униформизовать так, чтобы $\sqrt{\xi_1 - 1} > 0$ при $\xi_1 > 1$, $\delta_1 = \delta/(1 - \delta)$, $\delta = \alpha/\pi$.

Для обоснования (3.2) используем методы приближенных конформных отображений [5]. Рассмотрим преобразование Кристоффеля — Шварца $\zeta = g(\zeta_2)$ полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta_2 > 0$ на область с прямолинейными границами $AOBA'$ (фиг. 1)

$$g(\zeta_2) = C_0\int_0^{\zeta_2}\frac{dz}{z^{\delta}(z-1)^{1/2-\delta_2}}$$

с нормировкой $g(0) = 0$, $g(1) = \zeta_B$, $g(\infty) = \infty$ и далее преобразование $\zeta_3 = -1/\zeta_2$. В плоскости $\zeta_3 = \xi_3 + i\eta_3$ образ Ω — область, близкая к полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta_3 > 0$, с вариацией границы $\eta_3 = \eta_3(\xi_3)$, отличной от нуля на отрезке $[-1, 0]$ (кривая *1* на фиг. 2). Выбором δ_2 можно добиться равенства малых углов α_1 и α_2 кривой $\eta_3(\xi_3)$ с осью $\eta_3 = 0$ на концах этого отрезка. Рассмотрим известное преобразование $\zeta_3 = \zeta_3(\zeta_1)$ [5] верхней полуплоскости ζ_1 на верхнюю полуплоскость ζ_3 с одним вырезанным, а другим вложенным малыми сегментами шириной 1/2, расположенными на отрезке $[-1, 0]$ и составляющими с осью $\eta_3 = 0$ углы, равные α_1, на область, аппроксимирующую образ области Ω (фиг. 2).



Фиг. 2

Тогда образом Ω в плоскости ζ_1 будет область, близкая к полуплоскости в смысле М. А. Лаврентьева [5], оценки отображения которой на верхнюю полуплоскость известны. Выделяя главную часть отображения $\zeta = g\{\zeta_2[\zeta_3(\zeta_1)]\}$, придем к результату (3.2). Равномерная оценка относительной разности по производным имеет порядок $\delta \ln \delta$, по функциям она порядка δ.

Используя (3.2), получим следующие выражения для коэффициентов a_1 и b_1 в (3.1): $a_1(\xi_1) \approx a(\xi_1)$, $b_1(\xi_1) \approx b(\xi_1)$, где $a(\xi_1)$ и $b(\xi_1)$ те же, что и в п. 2.

Решение однородной задачи Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами (3.1) имеет вид

$$\frac{dP}{d\zeta_1} = \frac{1}{2} A\left[\sqrt{\zeta_1 - 1}\,(\zeta_1 - 1 - \theta + 2i\theta\sqrt{\zeta_1 - 1})\right]^{-1} \tag{3.3}$$

$$\frac{dP}{d\zeta} = \begin{cases} AR(\zeta) & (|\zeta| > r_0) \\ A\zeta^{\delta_1} e^{-i\pi\delta_1} R(\zeta) & (|\zeta| < r_0) \end{cases}$$

Единственность решения обеспечивает условие интегрируемости $dP/d\zeta_1$ на бесконечности. Постоянная A определяется из второго условия (1.4).

Функцию P можно вычислить по единой формуле

$$P = A\int_{\infty}^{\zeta} \frac{dz}{(1-z)^2 + 2\theta(1-z) + \theta}$$

так как учет различия в выражениях для $dP/d\zeta$ дает малый вклад.

При $\varepsilon \ll 1$ с точностью до членов порядка ε вычислим

$$P \approx 4/[\pi(2 - \zeta)] \tag{3.4}$$

что совпадает с результатом (2.3) всюду, за исключением малой окрестности точки $\zeta = 0$. Из (3.4) следует, что максимум давления достигается в ножке ударной волны и равен $1 + 4\delta$.

Комплекснозначную скорость $w = u_1 - iv_1$ можно определить из уравнения, которое следует из (1.2)

$$\frac{\partial w}{\partial r_1} = \frac{\theta}{r_1}\frac{dP}{d\zeta_0} \quad (r_1 = \sqrt{(\xi-\varepsilon)^2+\eta^2},\ \zeta_0 = r_1 e^{i\beta_1} = \zeta - \varepsilon) \tag{3.5}$$

Процесс построения первого члена внешнего разложения на этом заканчивается. Это решение нерегулярно в окрестностях точек $\zeta = 0$, ε. Физически объяснима особенность решения в точке излома стенки. Особенность в скоростях оказывается снесенной невозмущенным потоком в точку $\zeta = \varepsilon$, что является следствием линеаризации уравнений.

Для возможности сращивания необходима малость зоны сильных возмущений. Чтобы определить размер области нерегулярности, подставим главную часть внутреннего разложения внешнего решения в (1.1). Порядок отброшенных членов в окрестности $r_1 = 0$ равен $\varepsilon\delta^2 r_1^{-1}\ln r_1$, а оставленных — δ. Внешнее решение пригодно, пока $r_1/|\ln r_1| \gg \varepsilon\delta$. При $\varepsilon = O(1)$ отсюда следует $r_1 = O(1)$, если δ имеет первый порядок малости по сравнению с единицей. Это означает, что линейный размер зоны сильных возмущений порядка ε, т. е. порядка расстояния между точками нерегулярности $\zeta = 0$ и $\zeta = \varepsilon$. При $\varepsilon = O(1)$ область нерегулярности конечна, и внешнее разложение уже в первом приближении зависит от внутреннего разложения. В случае же малой области нерегулярности первый член внешнего разложения получается независимо, а первый член внутреннего разложения определяется путем сращивания с внутренним разложением первого члена внешнего разложения [4]. Таким образом, справедливость (3.3), по-видимому, ограничена значениями $\varepsilon = o(1)$ (слабые ударные волны), так как в силу сказанного при $\varepsilon = O(1)$ это решение может оказаться иным.

Ограничимся далее случаем $\varepsilon \ll r_0$, для которого равномерное первое приближение получается наиболее просто. Тогда $r_1 = r + O(\varepsilon)$ при $r \to r_0$. В окрестности $|\zeta| < r_0$ построим решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям непротекания на стенке при $\beta = \alpha$, π ($\zeta = re^{i\beta}$) и вытекающей из (3.3), (3.5) асимптотике

$$\frac{\partial W}{\partial r} \approx \delta_1 r^{\delta_1 - 1} e^{i\delta_1(\beta-\pi)}, \quad p_1 = \frac{2}{\pi} \quad (r \to r_0,\ \alpha < \beta < \pi,\ W = u - iv) \tag{3.6}$$

Проверкой убеждается, что при $r \to r_0$ искомое поле скоростей близко к потенциальному. Будем искать решение в предположении, что скорости потенциальны всюду в указанной области и имеют наименьшую (из возможных) особенность при $r \to 0$. Решением является продолжение асимптотики (3.6) в глубь области

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \delta_1 r^{\delta_1 - 1} e^{i\delta_1(\beta-\pi)} \quad (r < r_0,\ \alpha < \beta < \pi)$$

При $\delta_1 > 0$ производная $\partial W/\partial r$ интегрируема

$$W = r^{\delta_1} e^{i\delta_1(\beta-\pi)} \tag{3.7}$$

При $\delta_1 < 0$ имеем $|W| \sim r^{\delta_1} \to \infty$ при $r \to 0$. Функция P_1 тогда допускает представление

$$p_1 = 2/\pi + O(\delta^{-1}\varepsilon r^{2\delta_1}) + O(r^{1+\delta_1})$$

При этом $p \to -\infty$ $(r \to 0,\ \delta_1 < 0)$.

Таким образом, давление малыми слагаемыми отличается от постоянной при $\alpha > 0$ и имеет особенность при $\alpha < 0$. Характер особенности указывает на отрыв потока от стенки с образованием свободной поверхности в малой окрестности точки $r = 0$. Ограниченное решение при $\alpha < 0$ следует искать с учетом этой свободной поверхности.

Отметим, что асимптотика (3.7) совпадает с известной асимптотикой решения вблизи кромки клина при обтекании последнего потоком идеальной жидкости [4].

В области $|\zeta| > r_0$ скорость w можно рассчитать, интегрируя (3.5). Проверка показывает, что решения для w при $r \to r_0$ изнутри и снаружи не отличаются в главном.

Поступила 22 XII 76

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бежанов К. А.* К теории дифракции ударных волн. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
2. *Lighthill M. J.* The diffraction of blast. Proc. Roy. Soc. A, 1949, vol. 198, No. 1055.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
5. *Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А.* Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.