Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЦЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРА И СЛОЯ

А. Н. Златин

(Ленинград)

Показано, что задача сопряжения уравнений теории упругости для составных областей может быть сведена к операторному уравнению с положительным оператором относительно контактных напряжений. Это позволяет с помощью метода Ритца свести задачу о совместной упругой деформации спаянных цилиндра и слоя к системе линейных алгебраических уравнений. Установлено, что вычисленное по приближенному решению отношение прижимающей силы к величине смещения верхнего торца цилиндра стремится к точному значению при неограниченном увеличении порядка алгебраической системы.

Задачи о контакте упругих тел, описываемых цилиндрическими координатами, в последние годы решались в различных постановках. Так, в [1] была рассмотрена задача о сцеплении цилиндра и полупространства. Приближенное удовлетворение условий сопряжения в зоне контакта достигнуто с помощью метода коллокаций, а условие отсутствия напряжений на цилиндрической поверхности сведено к дополнительной бесконечной системе. В статье [2] задача для упругого полупространства с бесконечным цилиндрическим выступом сведена к связанным бесконечной алгебраической системе и интегральному уравнению, решаемым методом последовательных приближений. Следует заметить, что полученное в [2] в виде ряда первое приближение для контактных напряжений имеет логарифмический, а не степенной, как это должно быть [3,4], вид особенности в угловых точках. В предположении отсутствия касательных контактных напряжений задачи о вдавливании упругого цилиндра в полупространство или слой рассмотрены в [1,5,6].

1. Общая теория. Рассмотрим два однородных изотропных упругих тела (области D_1, D_2), спаянные по конечной поверхности Ω (требования однородности и изотропности выдвинуты лишь для упрощения изложения) Кроме уравнений теории упругости и соответствующих граничных условий (вообще говоря, смешанных), на Ω должны выполняться условия непрерывности перемещений и напряжений

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \tag{1.1}$$

Здесь введены следующие определенные на Ω вектор-функции: $\mathbf{u}_i$ — перемещения тех точек тела D_i, которые расположены на Ω, $\mathbf{F}_i$ — контактные напряжения ($i = 1, 2$).

Отделим мысленно тело D_1 и решим задачу об определении в D_1 перемещений, возникающих при заданных внешних воздействиях, предполагая, что на части Ω границы отсутствуют напряжения; обозначим след этого решения на Ω через $\mathbf{u}_1^\circ$. Аналогично для D_2 введем вектор-функцию $\mathbf{u}_2^\circ$.

Задавая теперь на Ω напряжения $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, 2$), определим для тела D_i оператор $\mathbf{A}_i$, сопоставляющий $\mathbf{F}_i$ приращение перемещений точек Ω

$$\mathbf{A}_i\mathbf{F}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^\circ \tag{1.2}$$

Операторы $\mathbf{A}_i$ будем рассматривать в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$, элементами которого являются вектор-функции, определенные на Ω, а скалярное произведение дается соотношением $(\varphi, \psi) = \int\limits_\Omega \varphi\cdot\psi d\Omega$ (точка — скалярное произведение трехмерных векторов); $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

Операторы $\mathbf{A}_i$ ($i = 1, 2$) являются линейными, самосопряженными, а также положительными, т. е. $(\mathbf{A}_i\varphi, \varphi) > 0$ при $\|\varphi\| > 0$. Первое очевидно, второе следует из теоремы Бетти. Третье утверждение доказывается при рассмотрении вспомогательной краевой задачи для D_i, когда на той части O_i (соответственно B_i) границы тела D_i, где в основной задаче поставлены геометрические условия (соответственно условия на напряжения), заданы условия равенства нулю перемещений (соответственно напряжений). Имеем тогда $\mathbf{u}_i^\circ \equiv 0$, и свойство положительности $\mathbf{A}_i$ оказывается следствием формулы Клапейрона [7].

С помощью введенных операторов условия сопряжения (1.1) могут быть записаны в форме операторного уравнения с положительным оператором

$$\mathbf{A}\mathbf{F} = \mathbf{u}^\circ \tag{1.3}$$

$$(\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2,\ \mathbf{u}^\circ = \mathbf{u}_2^\circ - \mathbf{u}_1^\circ,\ \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2)$$

Напомним, что $\mathbf{u}_i^\circ$ ($i = 1, 2$) определяется по граничным условиям задачи, а также отметим, что при приближенном решении уравнения (1.3) второе из условий (1.1) будет удовлетворяться точно, а первое — приближенно.

Дополнительное исследование показывает, что операторы $\mathbf{A}_i$, а следовательно, и $\mathbf{A}$, являются только положительными, но не положительно-определенными (см. определение на стр. 73 [8]).

Покажем это на примере.

Пример. Рассмотрим смешанную осесимметричную задачу о кручении упругого полупространства $x < 0$ жестким штампом единичного радиуса ($\Omega = \{(\rho, \varphi, 0) : \rho \leqslant 1\}$, (ρ, φ, x) — цилиндрические координаты, γ — угол поворота штампа). Если предположить, что оператор $\mathbf{A}_*\mathbf{F}_* = \mathbf{u}_*$, связывающий контактное напряжение $\mathbf{F}_* = \{0, \tau_{x\rho}|_{x=0}, 0\}$ с перемещением $\mathbf{u}_* = \{0, \gamma\rho, 0\}$ точек штампа, положительно-определенный, то должно быть [8] $\mathbf{F}_* \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, что невозможно, так как контактные напряжения имеют в этом случае [9] особенность, не интегрируемую с квадратом.

Таким образом, задача нахождения решения уравнения (1.3) некорректна [10]. Поэтому, во-первых, вопросы существования решения этого уравнения должны изучаться с привлечением дополнительных исследований, например с использованием [11–13]; во-вторых, обычные (например проекционные) методы приближенного решения (1.3) могут оказаться малоэффективными для вычисления контактных напряжений. Это может вызвать необходимость применения методов регуляризации (см. [10], а также [14], где в смешанной задаче теории упругости регуляризации добиваются с помощью выделения особенности напряжений в угловых точках).

Единственность решения (1.3) следует из положительности оператора A.

Изложенное выше позволит применить далее к задаче о контакте цилиндра и слоя метод Ритца. Напомним поэтому (см. [8], гл. V), что задача нахождения решения уравнения (1.3) может быть сведена к эквивалентной вариационной задаче на отыскание минимума квадратичного функционала

$$\Psi(\mathbf{F}) = (\mathbf{AF}, \mathbf{F}) - 2(\mathbf{F}, \mathbf{u}^\circ) \tag{1.4}$$

приближенное решение которого $\mathbf{F}^{(N)}$ (N — число привлекаемых координатных функций) сходится в энергетической норме (в метрике оператора A) при выполнении условий полноты и линейной независимости системы координатных функций к истинному решению $\mathbf{F}^*$ при $N \to \infty$, а значение функционала Ψ, вычисляемое по приближенному решению, монотонно убывая, стремится к своему минимальному значению

$$\Psi(\mathbf{F}^{(N)}) = -(\mathbf{u}^\circ, \mathbf{F}^{(N)}) \downarrow \Psi_{\min}, \quad N \to \infty \tag{1.5}$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричную задачу о совместной упругой деформации однородных изотропных слоя толщины H и припаянного к нему цилиндра радиуса a и высоты L, предполагая, что верхний торец цилиндра перемещается на величину w°.

Относя все линейные размеры к радиусу цилиндра, введем систему безразмерных цилиндрических координат (ρ, φ, x), а также обозначения

$$l = L/a, \quad h = H/a, \quad w_* = w^\circ/a$$

Предположим далее, что в точках поверхности $x = l$ отсутствуют касательные напряжения, а при $x = -h$ поставим, например, условия отсутствия перемещений. Остальные части поверхностей упругих тел будем считать свободными от напряжений.

Приписывая величинам, относящимся к цилиндру, индекс *1*, а к слою — индекс *2*, выпишем граничные условия задачи и условия сопряжения

$$\sigma_\rho^{(1)}(1, x) = \tau_{x\rho}^{(1)}(1, x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{2.1}$$

$$w^{(1)}(\rho, l) = w_*, \quad \tau_{x\rho}^{(1)}(\rho, l) = 0, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \tag{2.2}$$

$$u^{(2)}(\rho, -h) = w^{(2)}(\rho, -h) = 0, \quad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{2.3}$$

$$\sigma_x^{(2)}(\rho, 0) = \tau_{x\rho}^{(2)}(\rho, 0) = 0, \quad 1 < \rho < \infty \tag{2.4}$$

$$\sigma_x^{(1)}(\rho, 0) = \sigma_x^{(2)}(\rho, 0) = \sigma(\rho), \quad \tau_{x\rho}^{(1)}(\rho, 0) = \tau_{x\rho}^{(2)}(\rho, 0) = \tau(\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \tag{2.5}$$

$$u^{(1)}(\rho, 0) = u^{(2)}(\rho, 0), \quad w^{(1)}(\rho, 0) = w^{(2)}(\rho, 0), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \tag{2.6}$$

Здесь $\{u, 0, w\}$ — вектор перемещений в цилиндрической системе координат, σ_x, $\tau_{x\rho}$, ... — составляющие тензора напряжений, $\sigma(\rho)$, $\tau(\rho)$ — неизвестные контактные напряжения.

3. Построение решений. Решение в слое может быть получено с использованием представления Папковича — Нейбера и интеграла Ханкеля (см. [15], ч. III). Опуская довольно громоздкие выкладки, приведем здесь лишь формулы, выражающие перемещения точек поверхности $x = 0$

через контактные напряжения (условия (2.3) — (2.5) при этом удовлетворены)

$$w^{(2)}(\rho, 0) = \frac{1}{G_2}\int_0^\infty J_0(\lambda\rho) F_1(\lambda)\, d\lambda \tag{3.1}$$

$$u^{(2)}(\rho, 0) = \frac{1}{G_2}\int_0^\infty J_1(\lambda\rho) F_2(\lambda)\, d\lambda$$

$$F_k(\lambda) = f_{k1}(\lambda h)\int_0^1 \sigma(\xi) J_0(\lambda\xi)\,\xi\, d\xi + f_{k2}(\lambda h)\int_0^1 \tau(\xi) J_1(\lambda\xi)\,\xi\, d\xi \qquad k = 1, 2$$

$$\begin{Bmatrix} f_{11}(\mu) \\ f_{22}(\mu) \end{Bmatrix} = 2(1-\nu_2)\,[(3-4\nu_2)\operatorname{sh}\mu\operatorname{ch}\mu \mp \mu] \,/\, \Delta(\mu)$$

$$f_{12}(\mu) = f_{21}(\mu) = [(1-2\nu_2)(3-4\nu_2)\operatorname{sh}^2\mu - \mu^2]/\Delta(\mu)$$

$$\Delta(\mu) = 4(1-\nu_2)^2 + \mu^2 + (3-4\nu_2)\operatorname{sh}^2\mu$$

Равенства (3.1) при $\rho \in [0,1]$ определяют конкретный вид введенного выше оператора $\mathbf{A}_2$.

Решение для цилиндра построим, опираясь на так называемые «однородные решения», удовлетворяющие условиям (2.1) отсутствия напряжений на боковой поверхности. В отличие от слоя, для цилиндра оператор $\mathbf{A}_1$ может быть построен в явном виде только в случае, когда контактные напряжения σ, τ представляют суперпозицию следов однородных решений на поверхности $x = 0$

$$\sigma(\rho) = 2G_1 \sum_k C_k \sigma_k(\rho), \qquad \tau(\rho) = 2G_1 \sum_k r_k C_k \tau_k(\rho) \tag{3.2}$$

В этом случае получаем, учитывая (2.2)

$$w^{(1)}(\rho, 0) - w_* = \sum_k r_k C_k w_k(\rho), \qquad u^{(1)}(\rho, 0) = \sum_k C_k u_k(\rho) \tag{3.3}$$

Здесь знак суммирования распространен на все целые k; C_k — последовательность комплексных коэффициентов, C_0 вещественно; все величины, отвечающие номерам k и $-k$, комплексно-сопряжены. Кроме того, введены обозначения [6]

$$\sigma_0 \equiv 1, \quad \sigma_k = -\frac{(\rho\varepsilon_k')'}{\rho}, \quad \tau_0 \equiv 0, \quad \tau_k = \varepsilon_k'$$

$$w_0 = \frac{l}{1+\nu_1}, \quad w_k = \varepsilon_k - \delta_k, \quad u_0 = -\frac{\nu_1}{1+\nu_1}\rho, \quad u_k = \varepsilon_k' + \delta_k'$$

$$r_0 = 1, \quad r_k = p_k \operatorname{th} p_k l, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k(\rho) = J_0(p_k) J_0(p_k\rho) + \rho J_1(p_k) J_1(p_k\rho)$$

$$\delta_k = \delta_k(\rho) = 2(1-\nu_1) J_1(p_k) J_0(p_k\rho) \,/\, p_k$$

где p_k — комплексные корни уравнения $2[(1-\nu_1) - p^2]J_1^2(p) = p^2 J_0^2(p)$, расположенные в правой полуплоскости; а штрих — оператор дифференцирования по аргументу ρ.

4. Сведение задачи к системе линейных алгебраических уравнений. Воспользуемся методом Ритца: задавая контактные напряжения в виде конечных сумм однородных решений

$$\mathbf{F}^{(N)} = \{\tau^{(N)}, 0, \sigma^{(N)}\}, \quad \tau^{(N)} = 2G_1 \sum_{|k|\leqslant N} r_k C_k \tau_k(\rho) \tag{4.1}$$

$$\sigma^{(N)} = 2G_1 \sum_{|k|\leqslant N} C_k \sigma_k(\rho)$$

вычислим по $\mathbf{F}^{(N)}$ значение функционала Ψ (1.4), учитывая, что операторы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ определяются правыми частями (3.1) и (3.3), а условия (2.1) — (2.4) определяют в рассматриваемом случае

$$\mathbf{u}^\circ = \mathbf{u}_1{}^\circ = \{0, 0, w_*\}, \quad \mathbf{u}_2{}^\circ = 0$$

Минимизируя $\Psi(\mathbf{F}^{(N)})$ по коэффициентам C_k, $|k| \leqslant N$, приходим к комплексной системе линейных алгебраических уравнений, которой можно придать следующий вид:

$$\sum_{|k|\leqslant N} (\gamma_{nk}^{(1)} + \gamma_{nk}^{(2)}) X_k = \begin{cases} {}^1/_2, & n = 0 \\ 0, & n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N \end{cases} \tag{4.2}$$

Здесь

$$X_k = C_k / w_*, \quad g = G_2 / G_1$$

$$\gamma_{nk}^{(1)} = r_k \int_0^1 \sigma_n(\rho) w_k(\rho) \rho\, d\rho + r_n \int_0^1 \tau_n(\rho) u_k(\rho) \rho\, d\rho$$

$$\gamma_{nk}^{(2)} = \int_0^\infty \Phi_{nk}(\lambda) \alpha_n(\lambda) \alpha_k(\lambda)\, d\lambda, \quad \Phi_{00}(\lambda) = f_{11}(\lambda h)$$

$$\Phi_{n0}(\lambda) = \Phi_{0k}(\lambda) = f_{11}(\lambda h) - \lambda^{-1} f_{12}(\lambda h)$$

$$\Phi_{nk}(\lambda) = f_{11}(\lambda h) - 2\lambda^{-1} f_{12}(\lambda h) + \lambda^{-2} f_{22}(\lambda h)$$

$$\alpha_k(\lambda) = \int_0^1 \sigma_k(\rho) J_0(\lambda\rho) \rho\, d\rho, \quad n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$$

Замечания. 1°. В системе (4.2) X_0 — вещественное неизвестное, а уравнение, соответствующее $n = 0$, содержит лишь действительную часть. Определитель системы отличен от нуля.

2°. Матрица коэффициентов системы уравнений (4.2) симметрична, так как $\gamma_{nk}^{(1)} = \gamma_{kn}^{(1)}$, $\gamma_{nk}^{(2)} = \gamma_{kn}^{(2)}$. Второе очевидно, а первое следует из соотношения обобщенной ортогональности Шиффа [16], которому здесь можно придать следующий вид:

$$\int_0^1 [\sigma_n(\rho) w_k(\rho) - \tau_k(\rho) u_n(\rho)] \rho d\rho = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 2Nn, & n = k \end{cases}$$

3°. Предположение о полноте системы однородных решений для цилиндра, высказанное в [17], в настоящее время доказано лишь в случае отсутствия перемещений на цилиндрической поверхности [18], хотя аналогичные решения для полуполосы изучены более подробно [19].

5. Обратимся к вычислению жесткости C упругой системы, понимая под C отношение силы P, прижимающей цилиндр к слою, к перемещению w_* верхнего торца цилиндра.

Приближенное значение жесткости $C^{(N)}$, вычисляемое по решению (4.1) системы (4.2), выражается, как это нетрудно показать, только через нулевую составляющую этого решения

$$(5.1) \qquad C^{(N)} = \frac{2\pi}{w_*}\int_0^1 \sigma^{(N)}(\rho)\,\rho\,d\rho = 2\pi G_1 X_0^{(N)}$$

Заметим, кроме того, что в рассматриваемом случае значение функционала Ψ на приближенном решении также выражается только через $X_0^{(N)}$ (см. (1.5))

$$(5.2) \qquad \Psi(\mathbf{F}^{(N)}) = -2\pi G_1 w_*^2 X_0^{(N)}$$

Сравнивая (5.1) и (5.2), на основании (1.5) приходим к следующему выводу, оправдывающему применение метода Ритца к задаче о контакте спаянных цилиндра и слоя: приближенное значение жесткости $C^{(N)}$, вычисляемое по решению системы алгебраических уравнений (4.2) N-го порядка, монотонно возрастая, сходится к истинному значению C при $N \to \infty$. Численное определение величины C может быть проведено по схеме, опробованной в работе [6].

6. **Замечания.** Использование метода Ритца для решения рассмотренной выше задачи не позволяет исследовать поведение напряжений в области контакта. Что касается типа особенности в напряжениях у границы зоны контакта, то он известен и является таким же, как и в плоской задаче о контакте полу- и четвертьплоскости (см., например, [20]).

В некоторых задачах, подобных рассмотренной выше, удается, не рассматривая уравнение (1.3), при удовлетворении условий сопряжения свести решение к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (укажем для примера работы [21, 22], где рассмотрены задачи о совместном кручении цилиндра и слоя). При этом усеченная бесконечная система совпадает с системой, получаемой при решении уравнения (1.3) методом Ритца, и отпадает необходимость в использовании критериев существования и единственности теории бесконечных систем (см. [23], гл. 1, § 2).

В заключение заметим, что изложенный метод решения может быть эффективно применен при решении различных (как основных, так и смешанных) задач теории упругости и математической физики в случае областей, являющихся объединением ограниченных координатными поверхностями подобластей. Причем некоторые задачи математической физики будут сводиться к уравнениям с положительно-определенными операторами, что улучшит качество получаемых приближенных решений.

Автор благодарит Я. С. Уфлянда за постоянное внимание и консультации, а Э. А. Троппа за прочтение рукописи и полезные советы.

Поступила 17 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khadem R., O'Connor J. J.* Axial compression of an elastic circular cylinder in contact with two identical elastic half spaces. Internat. J. Engng Sci., 1969, vol. 7, No. 8, p. 785—800.
2. *Васильев В. З.* Концентрация напряжений в полупространстве вблизи цилиндрического выступа при осесимметричном нагружении. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4.
3. *Zak A. R.* Stresses in the vicinity of boundary discontinuities in bodies of revolution. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1964, т. 31, № 1.)

4. *Каландия А. И.* Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
5. *Aihara Tamihiko.* On the stress distribution in elastic contact between flat end of a circular cylinder and a semi-infinit body. Bull. JSME, 1975, vol. 18, No. 120, p. 570—578.
6. *Златин А. Н., Уфлянд Я. С.* Осесимметричная контактная задача о вдавливании упругого цилиндра в упругий слой. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
9. *Ростовцев Н. А.* К задаче о кручении упругого полупространства. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1.
10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
11. *Соболев С. Л.* Алгоритм Шварца в теории упругости. Докл. АН СССР, 1936, т. 4(13), № 6(110).
12. *Никольский Е. Н.* Алгоритм Шварца в задачах теории упругости о напряжениях. Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 3.
13. *Цвик Л. Б.* Обобщение алгоритма Шварца на случай областей, сопряженных без налегания. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 2.
14. *Гринченко В. Т., Карнаухов В. Г., Сенченков И. К.* Напряженно-деформированное состояние и разогрев вязкоупругого цилиндра с ограничениями по торцам. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 4.
15. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
16. *Нуллер Б. М.* О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
17. *Ворович И. И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек. Материалы 1 Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975.
18. *Оразов М. Б.* О полноте собственных и присоединенных векторов самосопряженного квадратичного пучка. Функциональный анализ и его приложения, 1976, т. 10, вып. 2.
19. *Устинов Ю. А., Юдович В. И.* О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
20. *Bogy D. B.* Two edge-bounded elastic wedge of different materials and wedge angles under surface tractions. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1971, vol. 38, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж-механ. Сер. E, 1971, т. 38, № 2.)
21. *Златин А. Н., Уфлянд Я. С.* О совместном кручении цилиндра и слоя. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 4.
22. *Грилицкий Д. В., Поддубняк А. П.* Кручение полого кругового цилиндра, сцепленного с двухслойной упругой средой. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2.
23. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.