Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ — УКЛОНЕНИЯ

В. И. Максимов

(Свердловск)

Рассматривается нелинейная дифференциально-разностная игра сближения — уклонения с функциональной целью при интегральных ограничениях на управления игроков и функциональных ограничениях на отрезки управляемых траекторий. Подобно [1-3] строится позиционная процедура управления с поводырем, разрешающая задачи сближения и уклонения. Изучается вопрос о существовании седловой точки в рассматриваемой игре. Работа примыкает к исследованиям [1-9].

1. Задана управляемая система

$$x^{\cdot}(t) = f(t, x_t(s)) + F_1(t, x_t(s))\, u + F_2(t, x_t(s))\, v, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор; u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков; векторный функционал $f(t, x(s))$ и матричные функционалы $F_i(t, x(s))$, $i = 1, 2$ определены на множестве $[t_0, \vartheta] \times H_\omega$, где H_ω — гильбертово пространство n-мерных функций $x(s)$ с нормой

$$\|x(s)\|_\omega = \left(\|x(0)\|^2 + \int_{-\omega}^{0} \|x(s)\|^2 ds\right)^{1/2}$$

$$\|z\| = (z_1^2 + \ldots + z_n^2)^{1/2}, \quad z \in E_n$$

причем

$$f(t, x(s)) = f(t, x(-\tau_1), \ldots, x(-\tau_m), \varphi((t, x(s)))$$

$\varphi(t, x(s))$ — непрерывный на $[t_0, \vartheta]$ функционал со значениями в E_r, удовлетворяющий (равномерно по $t \in [t_0, \vartheta]$) условию Липшица по $x(s)$ на каждом ограниченном множестве $D \subset H_\omega$, т. е.

$$\|\varphi(t, x_1(s)) - \varphi(t, x_2(s))\| \leqslant L \|x_1(s) - x_2(s)\|_\omega$$

$$L = L(D), \quad x_j(s) \in D, \quad j = 1, 2$$

Функции $f(t, z_1, \ldots, z_m, z)$, $F_i(t, z)$, $i = 1, 2$ непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют условию Липшица по $(z_1, \ldots, z_m, z)$ и z соответственно. Для любого $x(s) \in H_\omega$ выполняются условия роста

$$\|f(t, x(s))\| \leqslant \zeta_1(t) + \zeta_2(t) \|x(s)\|_\omega + \sum_{j=1}^{m} \eta_j(t) \|x(-\tau_j)\|$$

$$\|F_i(t, x(s))\| \leqslant \zeta_{i+2}(t) + \varkappa_i \|x(s)\|_\omega$$

где $\zeta_i(t)$, $\eta_j(t)$ — неотрицательные суммируемые с квадратом функции, $\varkappa_i = \text{const} \geqslant 0$.

Реализации управлений $u[t]$ и $v[t]$ стеснены ограничениями

$$(1.2)\qquad \Big(\int_{t_0}^{\infty} \| u[t] \|^2 dt\Big)^{1/2} \leqslant \lambda[t_0], \quad \Big(\int_{t_0}^{\infty} \| v[t] \|^2 dt\Big)^{1/2} \leqslant \nu[t_0]$$

Изменение ограничений $\lambda[t]$ и $\nu[t]$ определяется равенствами

$$\lambda[t_2] = \lambda[t_1] - \Big(\int_{t_1}^{t_2} \| u[t] \|^2 dt\Big)^{1/2}$$

$$\nu[t_2] = \nu[t_1] - \Big(\int_{t_1}^{t_2} \| v[t] \|^2 dt\Big)^{1/2}$$

Пусть $\{u(\cdot);\ t_0,\ \vartheta;\ \lambda[t_0]\}$, $\{v(\cdot);\ t_0,\ \vartheta;\ \nu[t_0]\}$ — суммируемые функции на $[t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие (1.2). Указанные ограничения на правую часть системы (1.1) гарантируют существование и продолжимость на $[t_0, \vartheta]$ решения задачи Коши в смысле Каратеодори, каковы бы ни были начальные данные $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $x(s) \in H_\omega$ и функции $u(t) \in \{u(\cdot);\ t_0,\ \vartheta;\ \lambda[t_0]\}$, $v(t) \in \{v(\cdot);\ t_0, \vartheta; \nu[t_0]\}$.

Встречающиеся ниже понятия и обозначения, не сопровождаемые пояснениями, содержатся в [9].

Заданы элемент $x_0(s) \in H_\omega$ и непустые замкнутые множества $N \subset [t_0, \vartheta] \times H_\omega$ и $M \subset [t_0 - \omega + \tau, \vartheta] \times H_\mu$ ($\mu = \text{const} \geqslant 0$, $\tau = \max \times \times [\omega, \mu]$).

Задача сближения состоит в том, чтобы выбором управления u, формируемого по принципу обратной связи, обеспечить попадание отрезка фазовой траектории $x[t + s;\ \mu]$ на $M(t)$ в течение промежутка $[t_0 - - \omega + \tau,\ \vartheta]$, оставляя отрезок $x[t + s;\ \omega]$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ внутри $N(t)$. При этом предполагается, что первый игрок может столкнуться с любым способом формирования воздействия v, вырабатывающим измеримые реализации $v[t]$, удовлетворяющие (1.2).

Задача уклонения состоит в том, чтобы выбором управления v, формируемого по принципу обратной связи, обеспечить уклонение отрезка $x[t + s;\ \mu]$ фазовой траектории $x[t]$ от $M(t)$, оставляя $x[t + s;\ \omega]$ внутри $N(t)$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$, или вывести $x[t + s;\ \omega]$ из $N(t)$ ($t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$) до попадания $x[t + s;\ \mu]$ на $M(t)$ ($t_0 - \omega + \tau \leqslant t \leqslant \vartheta$). Предполагается также, что второй игрок, в свою очередь, может столкнуться с любым способом формирования воздействия u, вырабатывающим измеримые на $[t_0, \vartheta]$ реализации $u[t]$, удовлетворяющие (1.2).

Игры сближения и уклонения для конфликтно-управляемых систем, описываемых дифференциально-функциональными уравнениями, при мгновенных ограничениях на управления рассматривались в [3–5, 9]. Основное отличие данной работы от этих исследований состоит в том, что здесь изучается случай интегральных ограничений на управляющие воздействия (см. [2, 6–8]).

2. Опишем процедуру, доставляющую решение задач сближения и уклонения.

Четверку $p_{t_*} = \{t_*,\ \lambda_*,\ \nu_*,\ x_*(s;\ \tau)\}$ назовем позицией игры, R — пространство позиций, $R^{(1)} = E_1 \times E_1 \times H_\tau$, $p(t_*) = \{\lambda_*,\ \nu_*,\ x_*(s;\ \tau)\}$.

Символом $\sigma_\tau(p_{t_*}, v(\cdot))$, $v(t) \in \{v(\cdot); t_*, \infty; \nu_*\}$ обозначим множество элементов $p_t = \{t, \lambda(t), \nu(t), x(t+s; \tau)\}$ вида

$$\vartheta \geqslant t \geqslant t_*, \quad \lambda^2(t) = \lambda_*^2 - J_u^2(t_*, t), \quad \nu^2(t) = \nu_*^2 - J_v^2(t_*, t)$$

$$x(t) = x_*(0; \tau) + \int_{t_*}^{t} [f(\xi, x_\xi(s)) + F_1(\xi, x_\xi(s))u(\xi) +$$
$$+ F_2(\xi, x_\xi(s))v(\xi)]\,d\xi$$

$$\left(J_u(t_*, t) = \left(\int_{t_*}^{t} \|u(\xi)\|^2 d\xi\right)^{1/2}, \quad J_v(t_*, t) = \left(\int_{t_*}^{t} \|v(\xi)\|^2 d\xi\right)^{1/2}\right)$$

$u(t)$ — всевозможные суммируемые функции, удовлетворяющие неравенству $J_u(t_*, \infty) \leqslant \lambda_*$.

Пусть D — некоторое множество из R. Обозначим

$$D(t_*, t^*) = \{p_t = \{t, \lambda, \nu, x(s; \tau)\} \in D \mid t_* \leqslant t \leqslant t^*\}$$
$$D(t_*) = \{\{\lambda, \nu, x(s; \tau)\} \mid \{t_*, \lambda, \nu, x(s; \tau)\} \in D\}$$
$$D_\delta = \{\{t, \lambda, \nu, x(s; \delta)\} \mid \{t, \lambda, \nu, x(s; \tau)\} \in D,\ x(0; \delta) = x(0; \tau)$$
$$x(s; \delta) = x(s; \tau) \text{ при почти всех } s \in [-\delta, 0]\} \quad (\delta \in [0, \tau])$$
$$M^* = \{\{t, \lambda, \nu, x(s; \mu)\} \mid \{t, x(s; \mu)\} \in M,\ \lambda \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0\}$$
$$N^* = \{\{t, \lambda, \nu, x(s; \omega)\} \mid \{t, x(s; \omega)\} \in N,\ \lambda \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0\}$$

Множества $W^{(u)}(t) \subset R^{(1)}$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $W_\omega^{(u)}(t) \subset N^*(t)$ назовем u-стабильными, если $W_\mu^{(u)}(\vartheta) \subset M^*(\vartheta)$ или $W^{(u)}(\vartheta) = \varnothing$ и для любых $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$, $p(t_*) = \{\lambda_*, \nu_*, x_*(s; \tau)\} \in W^{(u)}(t_*, \ v(t) \in \in \{v(\cdot); t_*, \infty; \nu_*\}$ либо $\sigma_\tau(t^*; p_{t_*}, v(\cdot)) \cap W^{(u)}(t^*) \neq \varnothing$, либо $\sigma_\mu(p_{t_*}, v(\cdot)) \cap M^*(t_*, t^*) \neq \varnothing$.

Здесь $\sigma_\tau(t^*; p_{t_*}, v(\cdot))$ — сечение гиперплоскостью $t = t^*$ множества $\sigma_\tau(p_{t_*}, v(\cdot))$.

Введем $u_*(p_{t_*}, p_{t_*}^*, \delta)$ и $v^*(p_{t_*}, p_{t_*}^*, \delta)$ $(\delta > 0)$ — функции, на которых достигаются соответственно

$$\min_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_*}^{t_*+\delta} b'u(t)\,dt \,\middle|\, \int_{t_*}^{t_*+\delta} \|u(t)\|^2 dt \leqslant \lambda^2 - \lambda^{*2} \right\} \quad \text{при } \lambda > \lambda^*,\ b \neq 0$$

$$\max_{v(\cdot)} \left\{ \int_{t_*}^{t_*+\delta} c'v(t)\,dt \,\middle|\, \int_{t_*}^{t_*+\delta} \|v(t)\|^2 dt \leqslant \nu^{*2} - \nu^2 \right\} \quad \text{при } \nu^* > \nu,\ c \neq 0$$

Здесь

$$p_{t_*} = \{t_*, \lambda, \nu, x(s; \tau)\}, \quad p_{t_*}^* = \{t_*, \lambda^*, \nu^*, x^*(s; \tau)\}$$
$$b = (x(0; \tau) - x^*(0; \tau))' F_1(t_*, x(s; \tau))$$
$$c = (x(0; \tau) - x^*(0; \tau))' F_2(t_*, x(s; \tau))$$

(штрих означает транспонирование). Если $\lambda \leqslant \lambda^*$ или $b = 0$ $(\nu^* \leqslant \nu$ или $c = 0)$, то полагаем

$$u_*(p_{t_*}, p_{t_*}{}^*, \delta) = 0 \quad (v^*(p_{t_*}, p_{t_*}{}^*, \delta) = 0)$$

Для заданных начальной позиции $p_{t_0} = \{t_0, \lambda[t_0], \nu[t_0], x_0(s; \tau)\}$ и u-стабильных множеств $W^{(u)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $W^{(u)}(t_0) \neq \varnothing$ определим процедуру управления с поводырем первого игрока. Возьмем элемент $p^*[t_0] = \{\lambda^*, \nu^*, x^*(s;\ \tau)\} \in W^{(u)}(t_0)$, ближайший к $p[t_0]$ (предположим для простоты, что такой элемент существует; общий случай исследуется путем перехода к минимизирующей последовательности подобно тому, как это делается в [4,5]).

Пусть Δ — покрытие промежутка $[t_0, \vartheta]$ системой полуинтервалов

$$[\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \ldots, l(\Delta))$$

$$\tau_0 = t_0,\ \tau_l = \vartheta,\ \tau_{i+1} - \tau_i = \delta = \mathrm{const}$$

Положим, что на $[\tau_0, \tau_1)$ движение системы (1.1) порождается постоянным управлением $u^{(0)}[t] = u_*(p_{t_0}, p_{t_0}^*, \delta)$ $(\tau_0 \leqslant t < \tau_1)$ в паре с некоторой реализацией $v[t] \in \{v(\cdot);\ t_0, \infty;\ \nu[t_0]\}$. Тогда в момент τ_1 определим позицию $p_{\tau_1} = \{\tau_1, \lambda[\tau_1], \nu[\tau_1], x[\tau_1 + s;\ \tau]\}$. Позицию поводыря $p_{\tau_1}^*$ выберем из условия

$$p^*[\tau_1] \in W^{(u)}(\tau_1) \cap \sigma_\tau(\tau_1;\ p_{\tau_0}^*, v^{(0)}[\cdot])$$

$$(v^{(0)}[t] = v^*(p_{t_0}, p_{t_0}^*, \delta),\ \tau_0 \leqslant t < \tau_1)$$

предполагая, что это пересечение непусто. На $[\tau_1, \tau_2)$ управление первого игрока определим соотношением $u^{(1)}[t] = u_*(p_{\tau_1}, p_{\tau_1}^*, \delta)$ $(\tau_1 \leqslant t < \tau_2)$. В результате выбора управления $u^{(1)}[t]$ и некоторого управления $v[t]$ реализуется позиция p_{τ_2}. Позицию поводыря в момент $t = \tau_2$ определим теперь из условия

$$p^*[\tau_2] \in W^{(u)}(\tau_2) \cap \sigma_\tau(\tau_2;\ p_{\tau_1}^*, v^{(1)}[\cdot])$$

$$(v^{(1)}[t] = v^*(p_{\tau_1}, p_{\tau_1}^*, \delta),\ \tau_1 \leqslant t < \tau_2)$$

снова полагая, что это пересечение непусто. Если

$$W^{(u)}(\tau_{i+1}) \cap \sigma_\tau(\tau_{i+1};\ p_{\tau_i}^*, v^{(i)}[\cdot]) \neq \varnothing \quad \text{при всех } i = 0, \ldots, l-1$$

то указанную процедуру осуществим до момента $t = \vartheta$.

Пусть τ_j — момент времени, когда впервые

$$W^{(u)}(\tau_j) \cap \sigma_\tau(\tau_j;\ p_{\tau_{j-1}}^*, v^{(j-1)}[\cdot]) = \varnothing$$

Тогда $M^*(\tau_{j-1}, \tau_j) \cap \sigma_\mu(p_{\tau_{j-1}}^*, v^{(j-1)}[\cdot]) \neq \varnothing$. Значит, существует момент времени $\tau_* \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$, когда позицию поводыря $p_{\tau_*}^* = \{\tau_*, \lambda_*, \nu_*, x[\tau_* + s;\ \tau]\}$ можно определить из условий

$$p_{\tau_*}^* \in \sigma_\tau(p_{\tau_{j-1}}^*, v^{(j-1)}[\cdot])$$

$$\{\lambda_*, \nu_*, x[t_* + s;\ \mu]\} \in M(\tau_*)$$

В момент $t = \tau_j$ в качестве позиции поводыря $p_{\tau_j}^*$ берем произвольный элемент из $\tau_j \times \sigma_\tau(\tau_j;\ p_{\tau_*}^*, v^{j-1}[\cdot])$. Далее, управления $u^{(i)}[t]$ и $v^{(i)}[t]$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1},\ j \leqslant i \leqslant l-1)$ определим соотношениями

$$u^{(i)}[t] = u_*(p_{\tau_i}, p_{\tau_i}^*, \delta), \quad v^{(i)}[t] = v^*(p_{\tau_i}, p_{\tau_i}^*, \delta)$$

а позиции поводыря выбираем произвольным образом из множеств $\tau_{i+1} \times \times \varphi_\tau (\tau_{i+1}; p_{\tau_i}{}^*, v^{(i)} [\cdot])$. Построенное движение системы (1) обозначим

$$x_\Delta [t] = x [t; p_{t_0}, u_\delta, v]$$
$$u_\delta [t] = u^{(i)} [t], \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}, \qquad i = 0 \ldots, l-1$$

Функцию $x [t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ назовем движением системы (1.1), если существует последовательность функций $x_{\Delta_k} [t] = x [t; p_{t_0}{}^{(k)}, u_{\delta_k}, v_k]$, удовлетворяющая условиям

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} &x_{\Delta_k} [t] \to x [t] \text{ в } C([t_0, \vartheta]) \\ &(\tau_{i+1} (k) - \tau_i (k)) \to 0 \\ &p_{t_0}^{(k)} \to p_{t_0} \text{ при } k \to \infty \\ &p_{t_0}^{(k)} = \{t_0, \lambda_0^{(k)}, \nu_0^{(k)}, x_0^{(k)} (s; \tau)\} \end{aligned}$$

Можно показать, что это движение (обозначим его символом $x [t; p_{t_0}, W^{(u)}]$) существует. Не нарушая общности, считаем $M (\vartheta) \neq \varnothing$.

Лемма 2.1. Если существуют u-стабильные множества $W^{(u)} (t)$, $t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant \vartheta$, такие, что $p [t_0] \in W^{(u)} (t_0)$ и $W_\mu{}^{(u)} (\vartheta) \subset M^* (\vartheta)$, то для любого движения $x [t] = x [t; p_{t_0}, W^{(u)}]$ можно указать момент $t_* \in [t_0 - \omega + + \tau, \vartheta]$, когда впервые $\{t_*, x [t_* + s; \mu]\} \in M$, причем $\{t, x [t + s; \omega]\} \in \in N$ при $t \in [t_0, t_*]$.

Приведем схему доказательства леммы. Пусть Δ_k — покрытие отрезка $[t_0, \vartheta]$ промежутками $\tau_i (k) \leqslant t < \tau_{i+1} (k)$, $i = 0, \ldots, l_k$, $\tau_0 (k) = t_0$, $\tau_{l_k} = \vartheta$, $l_k = l (\Delta_k)$; $x_{\Delta_k} [t] = x_{\Delta_k} [t; p_{t_0}{}^{(k)}, u_{\delta_k}, v_k]$ — фазовый вектор системы (1.1), реализовавшийся в момент t; $x^*_{\Delta_k} [t]$ — фазовый вектор поводыря, движение которого формировалось совместно с движением $x_{\Delta_k} [t]$; $u_{\delta_k}{}^* [t]$ — управление первого игрока, под действием которого осуществляется движение $x_{\Delta_k}{}^* [t]$.

Можно проверить, что какова бы ни была n-мерная вектор-функция $\varphi (t) \in \in L^2 [t_0, \vartheta]$ справедливо равенство

$$(2.2) \qquad \lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{i\zeta}^{(i+1)\zeta} \| \varphi (t) \| dt \right)^2 = 0, \quad \zeta = \frac{\vartheta - t_0}{m}$$

Исходя из способа формирования движений $x_{\Delta_k} [t]$ и $x_{\Delta_k}{}^* [t]$, с помощью (2.2) устанавливаем соотношение

$$(2.3) \qquad \lim_{k \to \infty} \max_i \{\| r_{k, i} \|, \quad i = 0, \ldots, l_k\} = 0$$

Здесь

$$r_{k, i} = \| x_{\Delta_k} [\tau_i (k) + s; \tau] - x^*_{\Delta_k} [\tau_i (k) + s; \tau] \|_\tau +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{-\tau_j}^{0} \| x_{\Delta_k} [\tau_i (k) + s; \tau] - x^*_{\Delta_k} [\tau_i (k) + s; \tau] \| ds +$$
$$+ 2 (x_{\Delta_k} [\tau_i (k)] - x^*_{\Delta_k} [\tau_i (k)])' \left(\int_{\tau_{i-1}(k)}^{\tau_i(k)} F_1 (\xi, x^*_{\Delta_k} [\xi + s]\right) u^*_{\delta_k} [\xi] d\xi -$$
$$- \int_{\tau_{i-1}(k)}^{\tau_i(k)} F_2 (\xi, x_{\Delta_k} [\xi + s]) v_k [\xi] d\xi$$

Справедливость леммы следует из (2.3).

Пусть

$$\Phi^* = \{p_t = \{t, \lambda, \nu, x(s; \tau)\} \mid \{t, x(s; \tau)\} \in \Phi, \lambda \geqslant 0, \nu \geqslant 0\}$$
$$\Psi^* = \{p_t = \{t, \lambda, \nu, x(s; \tau)\} \mid \{t, x(s; \tau)\} \in \Psi, \lambda \geqslant 0, \nu \geqslant 0\}$$

где Φ и Ψ — замкнутые множества в $E_1 \times H_\tau$, удовлетворяющие условиям $(\alpha > 0)$

$$\overline{\Phi}_\mu{}^\alpha \cap M = \varnothing, \quad \overline{\Psi}_\omega{}^\alpha \cap N = \varnothing$$

Множества $W^{(v)}(t) \subset R^{(1)}$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $W^{(v)}(t) \subset \Phi^*(t)$ назовем v-стабильными, если для любых $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$, $p(t_*) = \{\lambda_*, \nu_*, x_*(s, \tau)\} \in W^{(v)}(t_*)$, $u(t) \in \{u(\cdot); t_*, \infty; \lambda_*\}$ либо $\sigma_\tau(t^*; p_{t_*}, u(\cdot)) \cap W^{(v)}(t^*) \neq \varnothing$, либо $\sigma_\tau(p_{t_*}, u(\cdot)) \cap \Psi^*(t_*, t^*) \neq \varnothing$.

Введем $u^*(p_{t_*}, p_{t_*}{}^*, \delta)$ и $v_*(p_{t_*}, p_{t_*}{}^*, \delta)$ — функции, на которых достигаются соответственно

$$\max_{u(\cdot)} \left\{ \int_{t_*}^{t_*+\delta} b'u(t)\,dt \mid \int_{t_*}^{t_*+\delta} \|u(t)\|^2\,dt \leqslant \lambda^{*2} - \lambda^2 \right\} \quad \text{при } \lambda^* > \lambda,\ b \neq 0$$

$$\min_{v(\cdot)} \left\{ \int_{t_*}^{t_*+\delta} c'v(t)\,dt \mid \int_{t_*}^{t_*+\delta} \|v(t)\|^2\,dt \leqslant \nu^2 - \nu^{*2} \right\} \quad \text{при } \nu > \nu^*,\ c \neq 0$$

Если $\lambda \geqslant \lambda^*$ или $b = 0$ ($\nu^* \geqslant \nu$ или $c = 0$), то полагаем $u^*(p_{t_*}, p_{t_*}{}^*, \delta) = 0$ ($v_*(p_{t_*}, p_{t_*}{}^*, \delta) = 0$).

Определим для v-стабильных множеств $W^{(v)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ процедуру управления с поводырем второго игрока. Будем формировать управление второго игрока следующим образом:

$$v_\delta[t] = v_*(p_{\tau_i}, p_{\tau_i}{}^*, \delta) \quad (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1},\ i = 0, \ldots, l-1)$$

Здесь p_{τ_i} — позиция игры, а $p_{\tau_i}{}^*$ — позиция поводыря, реализующиеся в момент $t = \tau_i$. При определении позиций поводыря используются управления

$$u_\delta{}^*[t] = u^*(p_{\tau_i}, p_{\tau_i}{}^*, \delta) = u^{(i)}[t], \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$$

В качестве исходной позиции $p_{t_0}{}^*$ поводыря выбирается элемент множества $t_0 \times W^{(v)}(t_0)$, ближайший к p_{t_0} (снова предполагаем существование такого элемента). Затем позиция $p_{\tau_i}{}^*$ определяется последовательно из условия

$$p^*[\tau_i] \in \sigma_\tau(\tau_i; p^*_{\tau_{i-1}}, u^{(i-1)}[\cdot]) \cap W^{(v)}(\tau_i)$$

либо до момента $\tau_l = \vartheta$, если все эти пересечения непусты, либо до момента τ_j, для которого впервые оказывается это пересечение пустым. В момент τ_j позиция $p_{\tau_j}{}^*$ определяется из условия

$$p^*[\tau_j] \in \sigma_\tau(\tau_j; p_{\tau_*}{}^*, u^{(j-1)}[\cdot])$$

где $p^*[\tau_*] \in \sigma_\tau(\tau_*; p^*_{\tau_{j-1}}, u^{(j-1)}[\cdot]) \cap \Psi^*(\tau_*)$, $\tau_{j-1} \leqslant \tau_* \leqslant \tau_j$. Существование такого элемента $p_{\tau_*}{}^*$ вытекает из включения $p^*[\tau_{j-1}] \in W^{(v)}(\tau_{j-1})$ и определения v-стабильности множеств $W^{(v)}(t)$. Затем в качестве $p_{\tau_i}{}^*$ $(j < i \leqslant l)$ выбираются произвольные элементы из множеств $\tau_i \times \sigma_\tau(\tau_i; p^*_{\tau_{i-1}}, u^{(i-1)}[\cdot])$.

Движение системы (1.1), реализующееся при управлении $v_\delta[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ второго игрока в паре с некоторым управлением $u[t] \in \{u(\cdot);$ $t_0, \infty; \lambda[t_0]\}$, обозначим символом $x_\Delta[t] = x[t; p_{t_0}, u, v_\delta]$.

Функцию $x[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, порожденную последовательностью движений $x_{\Delta_k}[t] = x[t; p_{t_0}^{(k)}, u_k, v_{\delta_k}]$, удовлетворяющих (2.1), обозначим $x[t;$ $p_{t_0}, W^{(v)}]$.

Аналогично лемме 2.1 доказывается

Лемма 2.2. Если существуют v-стабильные множества $W^{(v)}(t)$, $t_0 \leqslant$ $\leqslant t \leqslant \vartheta$, такие, что $p[t_0] \in W^{(v)}(t_0)$, то для любого движения $x[t] = x[t;$ $p_{t_0}, W^{(v)}]$ элемент $\{t, x[t+s; \tau]\}$ остается в области Φ либо до момента ϑ, либо до момента τ_*, когда впервые $\{\tau_*, x[\tau_* + s; \tau]\} \in \Psi$.

Пусть $W_*^{(v)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ — максимальная v-стабильная система множеств. Обозначим $W_*^{(u)}(t) = R^{(1)} \setminus W_*^{(v)}(t)$.

Теорема 2.1. Какова бы ни была начальная позиция p_{t_0} игры: либо $p[t_0] \in W_*^{(u)}(t_0)$ и тогда задача о сближении имеет решение, которое доставляет процедура с поводырем, определенная для u-стабильных множеств $W_*^{(u)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, либо $p[t_0] \notin W_*^{(u)}(t_0)$ и тогда имеет решение задача об уклонении, причем $p[t_0] \in W^{(v)}(t_0)$, где $W^{(v)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ — некоторые v-стабильные множества, и это решение доставляет процедура управления с поводырем, определенная для множеств $W^{(v)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Доказательство теоремы может быть проведено по плану доказательства теоремы 3.3 из [2].

3. Предположим, что $N = [t_0, \vartheta] \times H_\omega$ и первый игрок измеряет фазовые состояния системы (1.1) неточно. Именно в момент t ему известна величина $w[t+s; \tau]$, связанная с реализацией $x[t+s; \tau]$ соотношением

$$\| w[t+s; \tau] - x[t+s; \tau] \|_\tau \leqslant \alpha, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \ \alpha = \mathrm{const} \geqslant 0$$

Движение $x_0[t; p_{t_0}, W^{(u)}]$ определим подобно движению $x[t; p_{t_0}, W^{(u)}]$. Отличие будет состоять в том, что управления $u^{(i)}[t]$ и $v^{(i)}[t]$ полагаем равными при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$u^{(i)}[t] = u_*(p_{\tau_i}^{(0)}, p_{\tau_i}^*, \delta), \quad v^{(i)}[t] = v^*(p_{\tau_i}^{(0)}, p_{\tau_i}^*, \delta)$$

$$p_t^{(0)} = \{t, \lambda[t], \nu[t], w[t+s; \tau]\}$$

Лемма 3.1. Пусть имеются замкнутые u-стабильные множества $W^{(u)}(t) \subset R^{(1)}$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, такие, что $p[t_0] \in W^{(u)}(t_0)$ и $W_\mu^{(u)}(\vartheta) \subset$ $\subset M^*(\vartheta)$. Тогда, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует такое число $\alpha > 0$, что для любого движения $x_0[t; p_{t_0}, W^{(v)}]$ можно указать момент $t_* \in [t_0 - \omega + \tau, \vartheta]$, когда впервые $\{t_*, x[t_* + s; \mu]\} \in \bar{M}^\varepsilon$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2.1.

Заметим, что при $N = [t_0, \vartheta] \times H_\omega$ в определении v-стабильности множеств $W^{(v)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ следует опускать условие

$$\sigma_\tau(p_{t_*}, u(\cdot)) \cap \Psi^*(t_*, t^*) \neq \varnothing$$

Если второму игроку в момент t известна также величина $w[t+s; \tau]$, то подобно движению $x[t; p_{t_0}, W^{(v)}]$ можно определить движение $x_0[t;$

$p_{t_0}, W^{(v)}]$, полагая при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$u_\delta^*[t] = u^*(p_{\tau_i}^{(0)}, p_{\tau_i}^*, \delta), \quad v_\delta[t] = v_*(p_{\tau_i}^{(0)}, p_{\tau_i}^*, \delta)$$

Тогда имеет место

Лемма 3.2. Пусть заданы v-стабильные множества $W^{(v)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ и $p[t_0] \in W^{(v)}(t_0)$. Существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\alpha_0 > 0$, такие, что для движений $x_0[t; p_{t_0}, W^{(v)}]$ будет выполняться условие

$$x_0[t+s; \mu] \notin \bar{M}^\varepsilon(t), \quad t_0 - \omega + \tau \leqslant t \leqslant \vartheta$$

если $\alpha \leqslant \alpha_0$.

Пусть первый игрок выбором управления $u[t]$ стремится минимизировать в момент ϑ значение некоторого непрерывного функционала $\varphi(x(s; \mu))$, а второй игрок выбором управления $v[t]$ стремится максимизировать в момент ϑ значение $\varphi(x(s; \mu))$ на траекториях системы (1.1). Функционал $\varphi(x(s; \mu))$ определен на пространстве H_μ.

Опираясь на теорему 2.1, подобно [1] (см. § 18, 97) можно показать справедливость утверждения.

Теорема 3.1. Какова бы ни была начальная позиция p_{t_0}, существуют число c_0, u-стабильные множества $W^{(u)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ и v-стабильные множества $W^{(v)}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, такие, что имеет место соотношение

$$\varphi(x[\vartheta + s; p_{t_0}, W^{(u)}]) \leqslant c_0 \leqslant \varphi(x[\vartheta + s; p_{t_0}, W^{(v)}])$$

Автор благодарит Ю. С. Осипова за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 10 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Субботин А. И., Ушаков В. Н.* Альтернатива для дифференциальной игры сближения — уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
3. *Осипов Ю. С., Алесенко Л. П.* О регуляризации управлений в дифференциально-разностной игре сближения — уклонения. Дифференциальные уравнения, 1976, т. 12, № 6.
4. *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры систем с последействием. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 4.
5. *Осипов Ю. С.* Дифференциальная игра наведения для систем с последействием. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
6. *Пшеничный Б. Н., Опончук Ю. Н.* Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 1.
7. *Никольский М. С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 6.
8. *Ушаков В. Н.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
9. *Максимов В. И.* Альтернатива в дифференциально-разностной игре сближения — уклонения с функциональной целью. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.