Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.31

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ О ЗАТУХАНИИ РЕШЕНИЙ

В. Л. Бердичевский

(Москва)

Вводятся энергетические характеристики затухания решений систем уравнений вариационного типа и исследуются их свойства. В качестве примеров рассмотрены классический вопрос о затухании решений в полубесконечной цилиндрической и конической областях, а также вопрос о затухании решений при удалении от края тонкой трехмерной цилиндрической области (пластины).

1. Постановка задачи. Рассмотрим в n-мерном пространстве R_n область V с кусочно-гладкой границей ∂V. В V определены функции $w^a (a, b = 1, \ldots, m)$ декартовых координат $x^i (i, j, k, l = 0, 1, \ldots, n-1)$, являющиеся решениями системы уравнений вида

$$\frac{\partial U}{\partial w^a} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial U}{\partial w^a_{,i}} = 0 \tag{1.1}$$

где плотность энергии U — неотрицательная функция x^i, w^a, $w_{,i}{}^a \equiv \equiv \partial w^a / \partial x^i$, выпуклая по совокупности переменных w^a, $w_{,i}{}^a$; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Пусть на поверхности ∂V выделена некоторая область Ω, на которой заданы величины $p_a{}^k n_k = q_a$ ($p_a{}^k = \partial U / \partial w_{,k}{}^a$, n_k — компоненты вектора нормали к ∂V). На остальной части S поверхности ∂V будем задавать однородные краевые условия. Для определенности можно считать, что на S либо $p_a{}^k n_k = 0$, либо $w^a = 0$, либо краевые условия смешанные.

Предположим, что для краевых данных q_a существует единственное решение уравнений (1.1) с конечной энергией

$$E = \int_V U \, dv$$

Если плотность энергии имеет ядро (обращается в нуль на ненулевых функциях w^a), а краевые условия ядро не исключают, то для единственности решения могут потребоваться дополнительные условия, которые считаются выставленными.

Будем выбирать краевые данные q_a на Ω из некоторого множества M. Требуется указать множества M, для которых решения уравнений (1.1) убывают при удалении от Ω, и описать характер убывания. Как правило, интересно исследование максимально широкого множества M — множества $M^{\times}$ всех краевых данных q_a, для которых решение имеет конечную энергию.

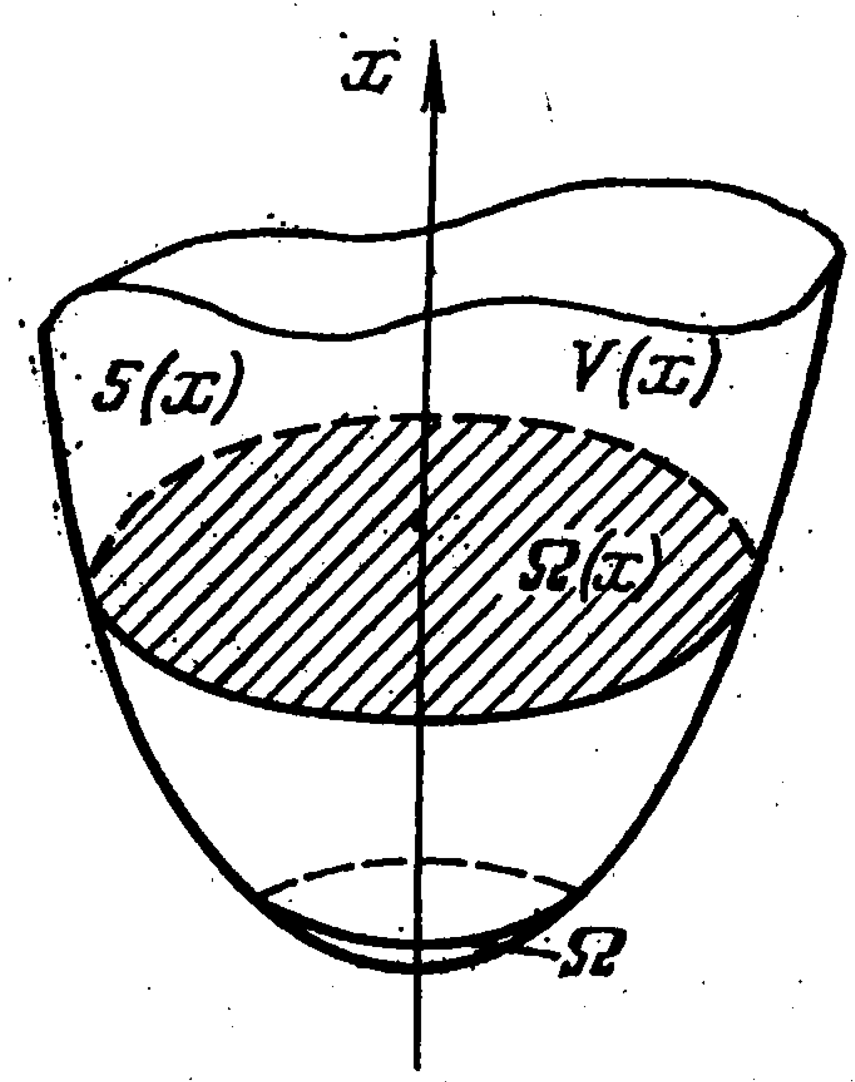
Ряд утверждений приводится ниже только для уравнений Лапласа (с учетом неоднородности и анизотропии) и системы уравнений линейной теории упругости

$$2U = E^{ij}(x^k)\, w_{,i} w_{,j} \tag{1.2}$$

$$2U = E^{ijkl}(x^k)\, \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad 2\varepsilon_{ij} = w_{i,j} + w_{j,i} \tag{1.3}$$

Квадратичные формы (1.2) и (1.3) положительно определены. Исследование поставленного вопроса для системы (1.3) связано с обоснованием принципа Сен-Венана [1-6].

Выберем систему координат x^i так, чтобы поверхность Ω лежала на координатной поверхности $x^0 \equiv x = 0$. Координаты x^i при этом могут оказаться криволинейными. Обозначим через $\Omega(x)$ сечения области V координатными плоскостями $x = \mathrm{const}$, $\Omega(0) = \Omega$. Сечение $\Omega(x)$ делит область V и ее границу ∂V на две части. Те части V и ∂V, которые не содержат Ω, обозначим через $V(x)$ и $S(x)$, $V(0) = V$, $S(0) = S$ (см. фиг. 1).



Фиг. 1

Следуя [5], в качестве основной характеристики решения возьмем энергию решения $E(x)$ в области $V(x)$

$$E(x) = \int_{V(x)} U\, dv$$

В силу положительности U функция $E(x)$ убывающая. Ниже приводятся и исследуются характеристики затухания $E(x)$, не зависящие от выбора краевых данных из M. Дается элементарное доказательство экспоненциального затухания энергии в полубесконечных цилиндрических областях и степенного затухания в конических областях. Описан класс систем, для которых независимо от M и геометрии области V имеет место экспоненциальное затухание энергии. Для систем (1.2) и (1.3) в случае полубесконечной цилиндрической области указана связь введенных энергетических характеристик с собственными числами. Указаны некоторые множества M, для которых решения систем (1.2) и (1.3) экспоненциально затухают при удалении от края тонкой трехмерной цилиндрической области. В связи с этим дается метод построения приближенных решений в тонких областях с погрешностью, меньшей любой степени относительной толщины.

Отметим, что для систем (1.2) и (1.3) в случае однородности и изотропии доказана [7] теорема о среднем: квадрат напряжений в центре шара не превосходит энергии шара

$$p_a^{\ i} p_a^{\ i} \leqslant c \int U\, dv \tag{1.4}$$

Поэтому из энергетических оценок вытекают оценки поточечные [5].

2. **Функция γ.** Рассмотрим в области $V(x)$ следующую краевую задачу для системы уравнений (1.1): на $S(x)$ краевые условия те же, что и в исходной задаче, на $\Omega(x)$ заданы $p_a{}^k n_k = q_a$. Краевые данные на $\Omega(x)$ выбираются из некоторого множества $M(x)$. При этом: 1) величины $p_a{}^k n_k$ на $\Omega(x)$, где $p_a{}^k$ — решение исходной задачи в V, входят в $M(x)$ при любых краевых данных на Ω из M; 2) $M(0) \equiv M$; 3) для любых q_a из $M(x)$ в области $V(x)$ существует решение с конечной энергией.

Для каждых краевых данных из $M(x)$ можно, вообще говоря, найти решение поставленной задачи и вычислить соответствующие «поверхностную» и объемную энергии

$$E_\Omega(q_a) = \int\limits_{\Omega(x)} U\,d\omega, \quad E_V(q_a) = \int\limits_{V(x)} U\,dv$$

Аргумент q_a подчеркивает зависимость от выбора краевых данных на $\Omega(x)$. Не исключено, что поверхностная энергия для некоторых q_a обращается в бесконечность.

Определим величину γ соотношением [6]

$$\gamma = \inf_{q_a \in M(x)} \frac{E_\Omega(q_a)}{E_V(q_a)} \tag{2.1}$$

Согласно (2.1) γ имеет размерность $(\text{длина})^{-1}$ и является функцией x. Функция $\gamma(x)$ зависит от геометрии области V, коэффициентов $E_1, \ldots, E_s$, входящих в энергию U, выбора $\Omega(x)$ и $M(x)$ и не зависит от конкретных краевых данных q_a, выставляемых на $\Omega(x)$.

Пусть $E(x)$ — энергия любого решения, соответствующего краевым данным q_a из M. Покажем, что для $E(x)$ имеет место оценка

$$E(x) \leqslant E_0 \exp\left(-\int\limits_0^x \gamma(x)\,dx\right), \quad E_0 \equiv E(0) \tag{2.2}$$

В самом деле, из (2.1)

$$\gamma(x) E(x) \leqslant \int\limits_\Omega U\,d\omega = -\frac{dE}{dx} \tag{2.3}$$

Из дифференциального неравенства (2.3) вытекает (2.2).

Замечания. 1). Разумеется, оценка (2.2) содержательна только в случае, когда $\gamma(x) \not\equiv 0$. Последнее для линейно-упругих тел доказано в [6], для других линейных систем доказательство аналогично [1].

2). Можно убедиться, что оценка (2.2) остается справедливой, если область изменения координат $x^1, \ldots, x^{n-1}$ меняется скачком, как это имеет место, например, для цилиндрического стержня, составленного из двух стержней с разным поперечным сечением.

[1] После того, как статья была сдана в печать, появился цикл работ [8–11], в которых были получены неравенства, представляющие, по существу, некоторые оценки γ снизу для одного эллиптического уравнения и для уравнений теории упругости. Эти оценки позволили указать классы единственности решений краевых задач в неограниченных областях. Аналогичные вопросы для параболических уравнений исследовались в [12].

3. О вычислении γ. Определение (2.1) выглядит неконструктивно. Тем не менее удается найти зависимость γ от x явно в ряде случаев, характерных наличием у задачи достаточно богатой группы симметрии. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

1°. Полубесконечный цилиндр со свободной поверхностью. Пусть область V представляет полубесконечный цилиндр с образующей, направленной вдоль оси x, $x \geqslant 0$, Ω — основание цилиндра в плоскости $x = 0$, на S $p_a{}^k n_k = 0$, $M = M(x) = M^\times$, U не зависит явно от x. Из определения (2.1) следует, что функция $\gamma(x)$ инвариантна относительно сдвигов вдоль оси x и, следовательно, является постоянной. Таким образом

$$E(x) \leqslant E(0)\, e^{-\gamma x} \tag{3.1}$$

Пусть, далее, плотность энергии U не зависит явно от остальных координат. Тогда γ — функция от диаметра h области Ω, формы Ω и коэффициентов $E_1, \ldots, E_s$, входящих в U. Если $E_1, \ldots, E_s$ имеют размерности, независимые от длины, то по π-теореме [13]

$$\gamma = \gamma^* / h \tag{3.2}$$

где γ^* — функция формы поперечного сечения и безразмерных величин, образованных из $E_1, \ldots, E_s$. Формула (3.2) справедлива, в частности, для систем с энергией (1.2) и (1.3).

Соотношения (3.1), (3.2) и (1.4) показывают, что решения с конечной энергией в полубесконечном цилиндре всегда имеют характер погранслоя.

2°. Самоуравновешенные краевые данные и конечность энергии. В случаях, когда плотность энергии имеет группу инвариантности, условие конечности энергии в задачах со свободной границей накладывает ряд ограничений на краевые данные. Найдем эти ограничения.

Пусть U имеет r-параметрическую группу инвариантности: $U(x, w^a, w_{,i}{}^a) = U(x^i, w'^a, w_{,i}{}'^a)$, где $w'^a = w^a + \psi_s{}^a(x^k)\,\omega^s$, $\omega^1, \ldots, \omega^r$ — параметры группы, $\psi_s{}^a$ — известные функции x^k. Тогда в задаче имеется r интегралов

$$\langle \psi_s^a \partial U / \partial w_{,x}^a \rangle = P_s = \mathrm{const} \tag{3.3}$$

Здесь $\langle\cdot\rangle$ — интеграл по поперечному сечению. В самом деле, из инвариантности U вытекает, что для любых w^a справедливо тождество $\psi_s{}^a \partial U / \partial w^a + \psi_{s,k}{}^a \partial U / \partial w_{,k}{}^a \equiv 0$. Умножая (1.1) на $\psi_s{}^a$, интегрируя по поперечному сечению и используя отмеченное тождество и краевые условия на S, получим $\partial \langle \psi_s{}^a \partial U / \partial w_{,x}{}^a \rangle / \partial x = 0$, откуда и следует (3.3).

Предположим, что U обладает следующим свойством:

$$\text{из } U \to 0 \Rightarrow \partial U / \partial w_{,x}^a \to 0 \tag{3.4}$$

Условие конечности энергии означает, что $U \to 0$ при $x \to \infty$. Из (3.4) следует, что $\partial U / \partial w_{,x}{}^a \to 0$ при $x \to \infty$. Это позволяет, как правило, вычислить постоянную P_s в (3.3). Из (3.3) и краевых условий на Ω получим ограничения на краевые данные

$$\langle \psi_s{}^a q_a \rangle = -P_s$$

Проиллюстрируем сказанное на примере системы (1.2). Краевые условия при $x = 0$ имеют вид $-\partial U / \partial w_{,x} = q$. Плотность энергии удовлетворяет условию (3.4) и инвариантна относительно сдвигов по $w : w' = w + \psi\omega$, $\psi \equiv 1$. Из (3.3), устремляя x к бесконечности, находим, что $P = 0$, и, следовательно,

$$\langle q \rangle = 0 \tag{3.5}$$

Если w — температура (потенциал течения несжимаемой жидкости), то E имеет смысл диссипации (кинетической энергии), а (3.5) — условия того, что суммарный поток тепла (расход жидкости) равен нулю.

Плотность энергии упругого тела имеет шестипараметрическую группу инвариантности (группу движений тела как твердого). В соответствии с этим условие конечности энергии приведет к шести ограничениям: условиям обращения в нуль равнодействующей и суммарного момента сил, приложенных на Ω.

Краевые данные, удовлетворяющие условиям типа (3.5), будем называть самоуравновешенными. Требование самоуравновешенности краевых данных, а также некоторой их гладкости (для систем (1.2) и (1.3) $q_a \in L_2$) достаточно для существования решения с конечной энергией.

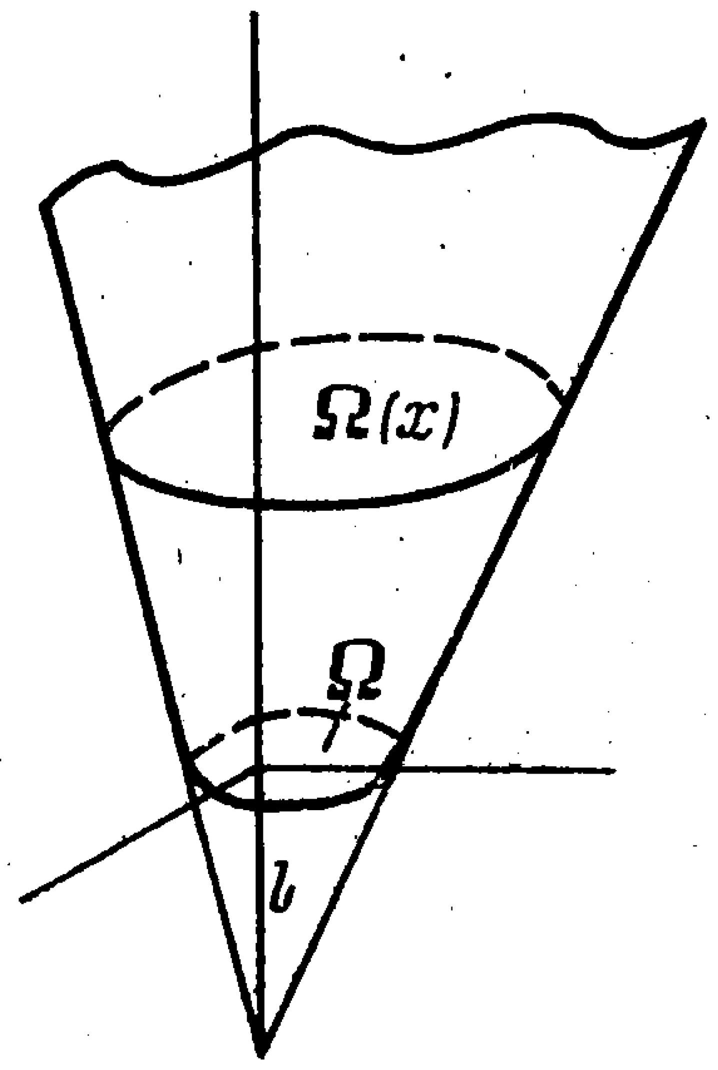
3°. Полубесконечный цилиндр с «защемленным» участком боковой поверхности. Разобьем границу Γ области Ω на две части: Γ_p и Γ_w и положим $S_p = \Gamma_p \times [0, \infty]$, $S_w = \Gamma_w \times [0, \infty]$.

Будем считать, что на S_p $p_a{}^k n_k = 0$, на S_w $w^a = 0$. Так же, как и в п. 1°, придем к формулам (3.1) и (3.2). Однако условие конечности энергии уже не связано с условием самоуравновешенности краевых данных, так как соотношение (3.3) не имеет места. Напряжения в упругом теле (тепловой поток) будут экспоненциально затухать и в случае, когда суммарные сила и момент на торце (суммарный поток тепла) отличны от нуля.

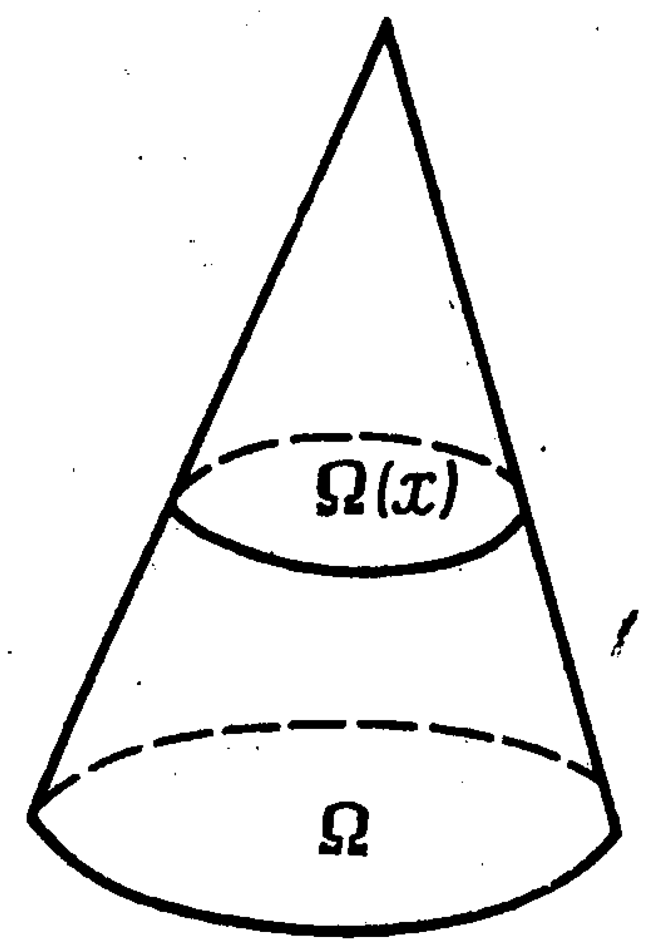
4°. Полубесконечный цилиндр с периодическими краевыми условиями. Пусть на границе полупространства заданы периодические краевые условия. Выделяя на границе элементарную периодически повторяющуюся ячейку, придем к задаче о полубесконечном цилиндре с поперечным сечением в форме параллелограмма, на противоположных гранях которого поставлены условия периодичности w^a и $p_a{}^k$. Повторяя дословно рассуждения п. 2 и 3.1°, получим соотношения (3.1) и (3.2).

Можно проверить, что для системы (1.2) условие конечности энергии приведет к (3.5), для упругого тела — к обращению в нуль равнодействующей внешних сил, приложенных на Ω. Суммарный момент внешних сил при этом может отличаться от нуля.

5°. О формулировке принципа Сен-Венана для цилиндрических упругих стержней. Примеры 3°, 4° показывают, что самоуравновешенность нагрузки не может служить необходимым условием затухания напряжений. Общим критерием является условие конечности энергии: для того, чтобы напряжения экспоненциально затухали при удалении от торца полубесконечного цилиндрического однородного в направлении оси упругого стержня, на боковой поверхности которого либо обращаются в нуль поверхностные силы или перемещения, либо выполнены условия периодичности, необходимо и достаточно, чтобы энергия стержня была конечной. Скорость затухания энергии γ для полностью однородного стержня имеет вид $\gamma = \gamma^* / h$, где γ^* зависит только от формы поперечного сечения и упругих модулей, h — диаметр поперечного сечения.



Фиг. 2



Фиг. 3

Необходимость утверждения очевидна, достаточность показана в п. 1° — 4°.

Для стержней конечной длины l в предыдущей формулировке условие конечности энергии надо заменить требованием: энергия остается ограниченной при $l \to \infty$.

Дальше до конца п. 3 рассматриваются только системы (1.2) и (1.3).

6°. Расширяющийся конус. Возьмем в плоскости $x = 0$ область Ω и проведем прямые через точки границы Ω и точку, лежащую на отрицательной части оси x на расстоянии l от начала координат (см. фиг. 2). Рассмотрим расширяющийся конус V — часть полупространства $x \geqslant 0$, лежащую внутри получившейся конической поверхности. Коническую часть границы будем считать свободной. Положим $M(x) \equiv M$. Наиболее интересны при этом два способа выбора множества M: $M = M^\times$ и $M = M^{\times\times}$, где $M^{\times\times}$ — множество самоуравновешенных краевых данных. В отличие от задачи п. 1° эти множества различны (например для системы (1.2) величины типа $\langle \partial U / \partial w_{,x} \rangle$ не зависят от x, однако не обязаны обращаться в нуль, так как наряду с уменьшением $\partial U / \partial w_{,x}$ при $x \to \infty$ растет область интегрирования).

Пусть сначала $M(x) = M^{\times\times}$. Из определения (2.1) следует, что γ зависит от $x + l$, формы Ω, телесного угла конуса α и параметров $E_1, \ldots$ $\ldots, E_s$. По π-теореме

$$\gamma = \gamma^* / (x + l) \tag{3.6}$$

где γ^* имеет тот же смысл, что и в (3.2). Вводя $\gamma(0) = \gamma^* / l$, (3.6) можно переписать в виде $\gamma = \gamma(0)(1 + x / l)^{-1}$. Оценка (2.2) принимает форму

$$E(x) \leqslant E_0 (1 + x / l)^{-\gamma(0) l} \tag{3.7}$$

Таким образом, энергия в случае конуса убывает, по крайней мере, по степенному закону с показателем $\gamma(0)\,l$. Естественно ожидать, что $\gamma(0)$ непрерывно зависит от формы конуса и при вырождении конуса в цилиндр (при $l \to \infty$) стремится к соответствующему значению постоянной γ для цилиндра — γ_0. При этом для краевых данных с одинаковым значением полной энергии E_0 степенной закон убывания (3.7) переходит в экспоненциальный (3.1).

Если $M(x) = M^\times$, то, рассуждая аналогично, придем к (3.7), однако предельный переход от конуса к цилиндру станет невозможен, так как при этом E_0, вообще говоря, обращается в бесконечность.

7°. *Сужающийся конус.* Расположим теперь вершину конуса в точке $x = l$ положительной части оси x, при этом область будет ограничена конусом и участком плоскости Ω (фиг. 3) и имеет конечный объем. Пусть коническая часть границы V свободна. В рассматриваемом случае γ — функция от $(l - x)$, формы Ω, телесного угла конуса и параметров E_1, $E_2, \ldots, E_s$. По π-теореме $\gamma = \gamma^* / (l - x) = \gamma(0)\,(1 - x / l)^{-1}$. Оценка (2.2) дает

$$E(x) \leqslant E(0)(1 - x / l)^{\gamma(0)l} \tag{3.8}$$

При $l \to \infty$ (3.8) переходит в (3.1). Формулы (3.1), (3.7) и (3.8) позволяют проследить, как зависит характер затухания от формы тела. По мере сужения расширяющегося конуса («приближения» свободной границы к месту нагружения) степенное затухание убыстряется, пока не переходит в экспоненциальное. При дальнейшем «схлопывании» цилиндра в сужающийся конус затухание становится еще быстрее ($(1 - x / l)^{\gamma(0)l} < e^{-\gamma(0)x}$).

4. **Системы с автономным затуханием.** Характер затухания энергии у систем (1.2) и (1.3) существенно зависит от геометрии области. Можно выделить класс систем с затуханием, не зависящим от формы границы области. Такие системы естественно назвать системами с автономным затуханием. Приведем одно достаточное условие автономности затухания. Пусть $\Omega = \partial V$, M произвольно, $M(x)$ — множество краевых условий на $\Omega(x)$, индуцируемых решениями задачи с краевыми данными из M, плотность энергии такова, что для любых w^a, $w_{,i}{}^a$ и любого единичного вектора n^k имеет место неравенство

$$\alpha\,|w^a n^k \partial U / \partial w^a_{,k}| \leqslant U(x^k, w^a, w^a_{,i}), \quad \alpha = \mathrm{const} \tag{4.1}$$

Тогда в силу (1.1), (4.1) и неравенства $U \leqslant w^a \partial U / \partial w^a + w_{,k}{}^a\, \partial U / \partial w_{,k}{}^a$, следующего из выпуклости U, имеем

$$\begin{aligned} E(x) &\leqslant \int\limits_{V(x)} \left(w^a \frac{\partial U}{\partial w^a} + w^a_{,k} \frac{\partial U}{\partial w^a_{,k}} \right) dv = \\ &= \int\limits_{\Omega(x)} w^a \frac{\partial U}{\partial w^a_{,k}}\, n_k\, d\omega \leqslant \alpha^{-1} \int\limits_{\Omega(x)} U\, d\omega \end{aligned} \tag{4.2}$$

Следовательно, при любом M будет $\alpha \leqslant \gamma$ и $E(x) = E(0) \exp(-\alpha x)$. Для линейных систем (4.2) можно усилить, поставив в первом соотношении (4.2) вместо неравенства знак равенства и коэффициент $1/2$ перед интегралом. Поэтому $2\alpha \leqslant \gamma$ и

$$E(x) \leqslant E(0) \exp(-2\alpha x) \tag{4.3}$$

Неравенство (4.1) может иметь место только в случаях, когда плотность энергии явно зависит от w^a. Оно выполняется, например, для систем с энергией вида

$$U = U_1(w^a) + U_2(w^a_{,i}), \quad w^a w_a \leqslant \operatorname{const} U_1 \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial w^a_{,i}} \frac{\partial U}{\partial w^a_{,i}} \leqslant \operatorname{const} U_2$$

К системам типа (4.4) принадлежат, в частности, пластины на упругом основании.

В случае одного уравнения с плотностью энергии $2U = w^2 + h^2 w_{,i} w_{,i}$ (h — малый параметр) $\alpha = h^{-1}$ и (4.3) вместе с формулой типа (1.4) дают элементарное доказательство того, что решение имеет характер погранслоя.

5. Некоторые оценки γ. Рассмотрим систему уравнений (1.1) в цилиндрической области конечной высоты, l, $0 \leqslant x \leqslant l$. Будем считать, что U может явно зависеть от всех координат x^i и не зависит от w^a. Для энергии $E(x)$ можно написать

$$E(x) = \int_x^l \langle U \rangle \, dx \leqslant \int_x^l \left\langle w^a_{,i} \frac{\partial U}{\partial w^a_{,i}} \right\rangle dx = -\int_{\Omega(x)} w^a \frac{\partial U}{\partial w^a_{,x}} \, d\omega \tag{5.1}$$

Если имеет место неравенство

$$\alpha(x) \left| \langle w^a \partial U / \partial w^a_{,x} \rangle \right| \leqslant \langle U \rangle \tag{5.2}$$

то из (5.1) получим $E(x) \leqslant \alpha^{-1} \langle U \rangle$ и, следовательно, оценку γ: $\alpha(x) \leqslant \gamma(x)$.

Укажем достаточные условия для выполнения неравенства (5.2). Пусть U удовлетворяет ограничениям

$$a \frac{\partial U}{\partial w^c_{,x}} \frac{\partial U}{\partial w^c_{,x}} \leqslant U(x^i, w^c_{,i}), \quad b w^a_{,a} w_{a,a} \leqslant U(x^i, w^a_{,i}) \tag{5.3}$$

Если на части границы Ω в силу краевых условий $w^a = 0$, то, как известно, имеет место неравенство [14]

$$\lambda^2 \langle w^a w_a \rangle \leqslant \langle w^a_{,a} w_{a,a} \rangle \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) имеем

$$\begin{aligned} \left| \langle w^a \partial U / \partial w^a_{,x} \rangle \right| &\leqslant \left(\langle (\partial U / \partial w^a_{,x}) \partial U / \partial w^a_{,x} \rangle \langle w^a w_a \rangle \right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \left(a^{-1} \langle U \rangle \lambda^{-1/2} \langle w^a_{,a} w_{a,a} \rangle \right)^{1/2} \leqslant a^{-1/2} b^{-1/2} \lambda^{-1} \langle U \rangle \end{aligned} \tag{5.5}$$

Таким образом, справедливо неравенство (5.2) с постоянной $\alpha = (ab)^{1/2}\lambda$.

Пусть теперь граница свободна. Если краевые данные самоуравновешены $\langle q_a\rangle = 0$, то $\langle \partial U/\partial w_{,x}^a\rangle = 0$. Поэтому

$$(5.6)\qquad \left\langle w^a \frac{\partial U}{\partial w_{,x}^a}\right\rangle = \left\langle (w^a - \langle w^a\rangle) \frac{\partial U}{\partial w_{,x}^a}\right\rangle$$

Остается вместо неравенства (5.4) воспользоваться неравенством

$$(5.7)\qquad \lambda^2 \langle (w^a - \langle w^a\rangle)(w_a - \langle w_a\rangle)\rangle \leqslant \langle w_{,a}^a w_{a,a}\rangle$$

Значения постоянной λ в (5.4) и (5.7), разумеется, различны.

Аналогично (5.5) из (5.6), (5.3) и (5.7) получим $\alpha = (ab)^{1/2}\lambda$.

В выражении для α функции a и b связаны только с характеристиками системы, λ — с геометрией поперечного сечения. Очевидно, что λ имеет вид $\lambda = \lambda^*/h$, где λ^* — функция только формы поперечного сечения, поэтому $\alpha = \alpha^*/h$, α^* — функция формы поперечного сечения и характеристик системы.

Случай криволинейного цилиндра и других нецилиндрических областей сводится к рассмотренному преобразованием координат. Соответствующие оценки будут удовлетворительны, если произведение ab не слишком мало.

6. Постоянная γ для полубесконечного цилиндра и собственные значения. В остальной части работы будут рассматриваться только линейные системы (U — положительная квадратичная форма переменных w^a и $w_{,i}{}^a$). Для линейных систем в полубесконечном цилиндре решение задач 1° и 3° п. 3 можно строить в форме ряда по функциям вида $e^{-\varkappa x}u^a(x^\alpha)$ (греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ пробегают значения $1, 2, \ldots, n-1$ и соответствуют координатам в плоскости $x = 0$). При этом $u^a(x^\alpha)$ и $\varkappa$ — собственные функции и собственное число некоторой задачи о собственных значениях. Характер затухания решений (для $q_a \in M^\times$) определяется наименьшим собственным числом δ. Возникает вопрос, как связаны δ и γ.

Рассмотрим его сначала на примере системы (1.2). Будем считать, что плотность энергии инвариантна при отражениях относительно плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. Это означает, что в (1.2) не входят произведения вида $w_{,\alpha}\, w_{,x}$, т. е.

$$(6.1)\qquad 2U = E^{\alpha\beta}(x^\gamma)\, w_{,\alpha} w_{,\beta} + E(x^\alpha)\, w_{,x}^2$$

Для определения $u(x^\alpha)$ и $\varkappa$ получается самосопряженная задача в области Ω (ν_α — компоненты вектора нормали к границе Γ области Ω)

$$(6.2)\qquad (E^{\alpha\beta}u_{,\beta})_{,\alpha} + E\varkappa^2 u = 0, \quad E^{\alpha\beta}u_{,\beta}\nu_\alpha|_\Gamma = 0$$

Соответствующие собственные значения действительны, отделены от нуля и их множество счетно. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны относительно скалярных произведений $\langle E^{\alpha\beta}u_{,\alpha}u_{,\beta}\rangle$ и $\langle Euv\rangle$. Раскладывая решение в ряд по собственным функциям, для γ можно написать (коэффициенты разложения включены множителями в собственные функции)

$$\gamma = \inf_{u_{(k)}} \sum_k U_{(k)} \Big/ \sum_k U_{(k)} (2\varkappa_{(k)})^{-1} \tag{6.3}$$

$$2U_{(k)} = \langle E^{\alpha\beta} u_{(k),\alpha} u_{(k),\beta} \rangle + \varkappa_{(k)}^2 \langle E u_{(k)}^2 \rangle$$

Отсюда следует, что $\gamma = 2\delta$.

Задача о собственных функциях для упругого тела, в отличие от предыдущей, несамосопряженная, поэтому собственные числа комплексные. Можно показать, что $\gamma \leqslant 2\delta$, где δ — минимальное значение положительных действительных частей собственных чисел. Причем если собственная функция u^i, соответствующая собственному числу с действительной частью δ, ортогональна по энергии остальным собственным функциям, то $\gamma = 2\delta$, в противном случае $\gamma < 2\delta$.

7. **Функция β (x).** В самосопряженной задаче, рассмотренной в п. 6, γ отличается только множителем от наименьшего собственного значения и поэтому обладает рядом замечательных свойств, вытекающих из вариационной формулы Релея для наименьшего собственного значения; в частности, γ увеличивается при наложении ограничений. Возникает вопрос: не является ли это свойство общим для всех задач. Не располагая ответом на этот вопрос, покажем, однако, что γ можно оценить снизу некоторой величиной β, обладающей рядом свойств частного Релея.

Примем, что плотность энергии U удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial w^a_{,i}} n^i \frac{\partial U}{\partial w^a_{,k}} n^k\right) \leqslant U(x^i, w^a, w^a_{,i}) \tag{7.1}$$

где μ не зависит от w^a, $w_{,i}^a$, n^i — компоненты единичного вектора на Ω. Определим β (x) формулой

$$\beta(x) = \inf_{q_a \in M(x)} \frac{\langle \mu^{-1} q_a q^a \rangle}{E_V(q_a)} \tag{7.2}$$

В отличие от (2.1) числитель отношения в (7.2) определяется краевыми условиями на Ω, и, таким образом, решение краевой задачи входит в это отношение только через объемную энергию. Из (7.1),(7.2) и (2.1) имеем

$$\beta(x) \leqslant \gamma(x) \tag{7.3}$$

Функция β (x) обладает следующими свойствами (термин «меньше» всюду употребляется в смысле «меньше либо равно»):

1) Если характеристики системы с плотностью энергии U_1 меньше характеристик системы с плотностью энергии U_2 (в том смысле, что $U_1(x^i, w^a, w_{,i}{}^a) \leqslant U_2(x^i, w^a, w_{,i}{}^a)$ для любых x^i, w^a, $w_{,i}{}^a$ и $\mu_1{}^{-1} \leqslant \mu_2{}^{-1}$), то соответствующие значения функции β_1 (x) первой системы меньше соответствующих значений функции β_2 (x) второй системы.

2) При расширении части границы, на которой заданы значения $w^a = 0$, функция β (x) возрастает.

3) Пусть геометрия области V допускает постановку на S периодических краевых условий (например, V — цилиндр с поперечным сечением

в форме параллелепипеда, Ω — торцы цилиндра). Тогда функция β_1, вычисленная для свободной поверхности S ($p_a{}^k n_k = 0$ на S), меньше $\beta_2(x)$, вычисленной для периодических краевых условий.

4) Рассмотрим разбиение области $V(x)$ поверхностью $R(x)$ на две подобласти $V_1(x)$ и $V_2(x)$ и обозначим через $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$ части $\Omega(x)$, лежащие на границах $V_1(x)$ и $V_2(x)$, через $M_1(x)$ и $M_2(x)$ — множества краевых условий, индуцируемые множеством $M(x)$ на $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$. Определим $\beta_1(x)$ формулой (7.2), в которой под $V(x)$ понимается $V_1(x)$, под $\Omega(x)$ — $\Omega_1(x)$, а на $R(x)$ берется множество $M_R(x)$ краевых условий вида $p_a{}^k n_k = r_a$, такое, чтобы задача для области $V_1(x)$ была разрешима. Аналогично определяется $\beta_2(x)$, при этом на R берутся краевые условия $p_a{}^k n_k = -r_a$. Тогда $\beta(x) \geqslant \min(\beta_1(x), \beta_2(x))$.

5) Пусть на S $p_a{}^k n_k = 0$. Рассмотрим область $V_1(x)$, вложенную в $V(x)$ и такую, что граница $V_1(x)$ содержит $\Omega(x)$. Определим величину $\beta_1(x)$ соотношением (7.2), в котором под E_V понимается энергия решения краевой задачи для области $V_1(x)$ с однородными краевыми условиями $p_a{}^k n_k = 0$ вне $\Omega(x)$. Тогда $\beta_1(x) \leqslant \beta(x)$.

Приведенные свойства $\beta(x)$ обусловлены соответствующими свойствами энергии (см. дополнение в работе [6]).

При помощи свойства 1) можно оценивать $\beta_2(x)$ через функцию $\beta_1(x)$ более простой системы (например, в задачах теории анизотропной упругости в качестве U_1 можно взять плотность энергии изотропного тела с коэффициентом Ляме $\lambda = 0$). Свойства 2) и 3) показывают, что $\beta(x)$ увеличивается при наложении дополнительных кинематических ограничений. На основании свойств 4), 5) имеется возможность оценивать $\beta(x)$ через значения $\beta_1(x)$ для тел с простой геометрической формой. (Этот прием использовался в [6].) В частности, на свойстве 5) и формуле (7.3) может быть основано доказательство положительности γ для тела произвольной формы — достаточно показать, что величина β отлична от нуля, например, для сужающегося конуса с достаточно тупым углом при вершине.

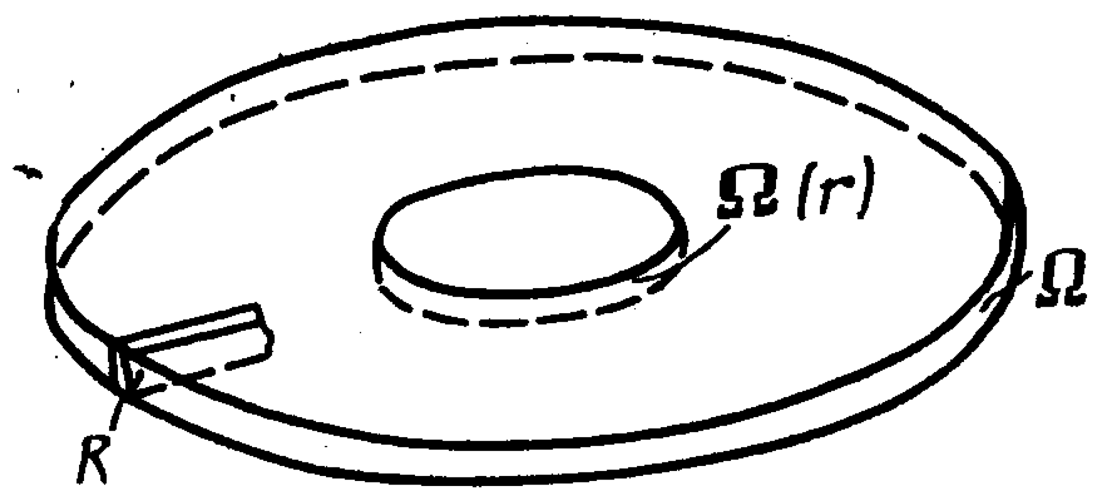
Для конуса высоты h, опирающегося на область диаметра h, очевидно, $\beta = \beta^* / h$. Поэтому, например, для однородного упругого криволинейного стержня постоянного поперечного сечения, вписывая опирающийся на поперечное сечение конус, в силу (7.3) и свойства 5) получим оценку $\beta^* / h \leqslant \gamma$, которая гарантирует экспоненциальное затухание решения при удалении от торца, по крайней мере со скоростью β^* / h.

Интересно выяснить, насколько груба оценка γ через β (7.3). Покажем, что в задаче 1^a п. 3 для системы (1.2) β в два раза меньше γ. Из (7.1) имеем $\mu = 2E(x^\alpha)$. Выписывая для β формулу, аналогичную формуле для γ (6.3), и учитывая, что $\langle E^{\alpha\beta} u_{(k),\alpha} u_{(k),\beta} \rangle = \varkappa_{(k)}{}^2 \langle E u_{(k)}{}^2 \rangle$, получим $\beta = \delta$.

Из формулировки задачи о собственных значениях (6.2) следует, что δ совпадает с наименьшей частотой ω свободных собственных колебаний системы с потенциальной энергией (6.1) и кинетической энергией $^1/_2 E u_{,t}{}^2$. Соотношение $\beta = \omega$ вместе с определением (7.2), записанным для цилиндрической области, приводит к новой вариационной формуле для наименьшей собственной частоты.

8. Об экспоненциальном затухании решения у края тонкой цилиндрической области. Пусть V — цилиндр с высотой h и диаметром поперечного сечения L, $h \ll L$. Спрашивается, в каких краевых задачах, поставленных для линейной системы вида (1.1), решение убывает при удалении от края (цилиндрической части границы), по крайней мере, экспоненциально, с показателем в экспоненте вида c/h, c — число.

Выделим в V (n — 1)-мерную полоску (фиг. 4). Эта полоска представляет собой цилиндр с диаметром поперечного сечения, значительно меньшим длины. Условия экспоненциального затухания в таких цилиндрах сформулированы в п. 3. Естественно предположить, что при выполнении этих условий на каждой полоске, вырезанной из V, решение будет экспоненциально затухать в целом. Опишем класс систем, для которых высказанное предположение оказывается справедливым.



Фиг. 4

Цилиндр расположим относительно осей координат так же, как в п. 6, $-h/2 \leqslant x \leqslant h/2$, через T_+ и T_- обозначим плоские грани цилиндра, через T и Γ — сечение цилиндра плоскостью $x = 0$ и его границу. Область T ограничена и для простоты односвязна. В определенных выше терминах $\Omega = \Gamma \times [-h/2, h/2]$, $S = T_+ + T_-$. Краевые условия на T_+, T_- возьмем такие, чтобы в каждой точке T_+, T_- «работа внешних сил» была равна нулю, т. е.

$$(8.1) \qquad w^a \partial U / \partial w^a_{,x} = 0$$

Введем однопараметрическое семейство контуров $\Gamma(r)$ и соответствующих цилиндрических поверхностей $\Omega(r) = \Gamma(r) \times [-h/2, h/2]$, как показано на фиг. 4. Используя (8.1) и (1.1), для энергии решения в области $V(r)$ можно написать

$$(8.2) \qquad E(r) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma(r)} \left\langle w^a \nu_\alpha \frac{\partial U}{\partial w^a_{,\alpha}} \right\rangle ds$$

Здесь и дальше $\langle \cdot \rangle$ — интеграл по x в пределах $-h/2$, $h/2$, ν_α — компоненты вектора внешней единичной нормали. Экспоненциальность убывания $E(r)$ можно доказать, если удастся вывести неравенство

$$(8.3) \qquad E(r) \leqslant c^{-1} h \int\limits_\Gamma \langle U \rangle \, ds, \quad c = \mathrm{const}$$

Тогда из (2.1) получим оценку γ снизу: $c/h \leqslant \gamma$, которая и гарантирует требуемый характер затухания.

Увеличим подынтегральное количество в (8.2) при помощи неравенства Коши — Буняковского

$$(8.4) \qquad \langle w^a \nu_\alpha \partial U / \partial w^a_{,\alpha} \rangle \leqslant (\langle \nu^\alpha \nu^\beta \, (\partial U / \partial w^a_{,\alpha}) \partial U / \partial w_{a,\alpha} \rangle \, \langle w^b w_b \rangle)^{1/2}$$

Первый сомножитель в (8.4) оценивается через $\langle U \rangle$, если система обладает свойством (7.1). Оценка второго сомножителя в (8.4) через $\langle U \rangle$ возможна, например, для систем, удовлетворяющих условию (4.4). Дальше рассмотрим менее тривиальные случаи, когда U не зависит явно от w^a, и оценка $\langle w_a w^a \rangle$ через $\langle U \rangle$ производится, как и в п. 5, при помощи неравенства

$$(8.5)\qquad \lambda^2 \langle w^a w_a\rangle \leqslant \left\langle \frac{dw^a}{dx}\frac{dw_a}{dx}\right\rangle,\quad \lambda=\frac{\lambda^*}{h}$$

Неравенство (8.5) справедливо, если w^a удовлетворяют ограничениям, исключающим сдвиг по w^a на постоянную. Например, $\langle w^a\rangle = 0$ или $w^a (h/2) = 0$, или известно, что $w^a (x, x^\alpha)$ — нечетные функции и т. п. Таким образом, для систем, удовлетворяющих (7.1), а также условию

$$(8.6)\qquad b\frac{\partial w^a}{\partial x}\frac{\partial w_a}{\partial x}\leqslant U$$

неравенства (8.4) — (8.6) приводят к искомому неравенству (8.3). Этот путь удается реализовать, в частности, для системы (6.1).

Экспоненциальное затухание энергии имеет место в следующих краевых задачах для системы (6.1).

1°. На T_+ и T_- $w_{,x} = 0$ область Γ разбита на две части: Γ_p и Γ_w; на $\Gamma_p \times [-h/2, h/2]$: $E^{\alpha\beta} w_{,\beta} \nu_\alpha = q (x^\alpha, x)$ на $\Gamma_w \times [-h/2, h/2]$: $w = S (x^\alpha, x)$, причем

$$(8.7)\qquad \langle q\rangle = 0 \text{ на } \Gamma_p,\quad \langle s\rangle = 0 \text{ на } \Gamma_w$$

2°. На T_+ $w = 0$, на T_- $ww_{,x} = 0$, на Ω краевые условия любые.

Доказательство. Проинтегрируем по x уравнение (1.1), выписанное для системы (6.1) в пределах $-h/2$, $h/2$. С учетом краевых условий для краевой задачи 1° получим

$$(8.8)\qquad (E^{\alpha\beta}\langle w\rangle_{,\beta})_{,\alpha} = 0$$

Решение краевой задачи (8.8) при $\Gamma_w \neq \varnothing$ единственно и имеет вид

$$(8.9)\qquad \langle w\rangle = 0 \text{ в } T$$

Если $\Gamma_w = \varnothing$, то из (8.8) следует, что $\langle w\rangle = \mathrm{const}$. Поскольку при $\Gamma_w = \varnothing$ решение исходной задачи в V определено с точностью до постоянной, эту постоянную можно выбрать так, чтобы выполнялось (8.9). В силу (8.9) имеет место (8.5) с наилучшей постоянной $\lambda^* = \pi$, в неравенстве (8.6) наилучшая постоянная $b = E/2$. Из (8.4)—(8.6) находим

$$(8.10)\qquad \langle w\nu_\alpha E^{\alpha\beta} w_{,\beta}\rangle \leqslant (\langle E^{\sigma\beta} w_{,\beta} E_\sigma{}^\alpha w_{,\alpha}\rangle \langle w^2\rangle)^{1/2} \leqslant h\pi^{-1} (\langle E^{\alpha\beta} E_{\max} w_{,\alpha} w_{,\beta}\rangle \ \langle w^2_{,x}\rangle)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant h\pi^{-1}\nu^{-1}\langle U\rangle,\quad \nu = \min_{x^\alpha\in T} (E(x^\alpha)/E_{\max}(x^\alpha))^{1/2}$$

где $E_{\max}$ — максимальное собственное значение тензора $E^{\alpha\beta}$. Подстановка (8.10) в (8.2) приводит к (8.3) с постоянной $c = 2\pi\nu$. Доказательство для краевой задачи 2° не требует вывода равенства типа (8.9), так как неравенство (8.5) оказывается справедливым непосредственно в силу краевого условия на T_+ с наилучшей постоянной $\lambda^* = \pi/2$. Для постоянной затухания c в этом случае получим $c = \pi\nu$.

Подчеркнем, что для однородной среды в каждой $(n - 1)$-мерной полоске R с индуцированными краевыми условиями энергия экспоненциально затухает со скоростью $2\pi\nu/h$ в краевой задаче 1° и со скоростью $\pi\nu/h$ в краевой задаче 2°. Это подтверждает высказанное в начале п. 8 предположение и показывает, что полученные значения постоянных c наилучшие. Для неоднородных анизотропных сред полученную оценку можно усилить, так как неравенство (8.3) останется справедливым, если постоянная c связана с ν прежними формулами, а под ν понимается функция r

$$\nu(r) = \min_{x^\alpha \in \Gamma(r)} (E(x^\alpha) / E_{\max}(x^\alpha))^{1/2}$$

При этом для $E(r)$ в задаче 1° найдем

$$E(r) \leqslant E(0) \exp\left[-\frac{2\pi}{h}\int_0^r \nu(r)\,dr\right] \tag{8.11}$$

В краевой задаче 2° множитель 2π в (8.11) заменяется на π.

Отметим, что приведенное рассуждение дословно распространяется на системы, у которых $E^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}(x^\gamma)f(x)$, а E — произвольная положительная функция x, x^α. Это позволяет делать выводы об экспоненциальном затухании решений в областях, отображение которых на цилиндр приводит к уравнению с указанной зависимостью коэффициентов от координат.

Перейдем к рассмотрению аналогичных вопросов для системы уравнений теории упругости, считая, что упругие свойства инвариантны при отражении относительно плоскости, параллельной срединной

$$2U = E^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} + 2E^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon + E\varepsilon^2 + 4G^{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta, \quad \varepsilon_{0\alpha} \equiv \varepsilon_\alpha, \quad \varepsilon_{00} \equiv \varepsilon \tag{8.12}$$

Оказывается, что в отличие от системы (6.1), даже если на торце каждой полоски R суммарные силы и момент равны нулю, может существовать проникающее (не убывающее экспоненциально) решение (см. п. 10). Тем не менее удается выделить ряд частных случаев, когда энергия экспоненциально затухает. Эти случаи перечислены ниже.

1°. Коэффициенты $E^{\alpha\beta} = 0$ (в изотропном случае коэффициент Пуассона равен нулю), T_+ и T_- свободны от нагрузок ($p^{i0} = 0$), на $\Gamma_p \times [-h/2, h/2]$: $p^{i\alpha}\nu_\alpha = q^i(x^\alpha, x)$ на $\Gamma_w \times [-h/2, h/2]: w_i = s_i(x^\alpha, x)$, q^α и r^α — четные функции x, r^0 и q^0 — нечетные функции x и, кроме того

$$\langle q^\alpha \rangle = 0 \text{ на } \Gamma_p, \quad \langle s^\alpha \rangle = 0 \text{ на } \Gamma_w \tag{8.13}$$

2°. На T_+ $w^i = 0$, на T_- либо $w^i = 0$, либо $p^{i0} = 0$, на Ω краевые условия любые.

3°. Коэффициенты $E^{\alpha\beta} = 0$, на T_+ $w^0 = 0$, $p^{\alpha 0} = 0$, на T_- $p^{i0} = 0$, на Ω краевые условия такие же, как в задаче 1, однако q^i и s^i не обязательно подчиняются условиям четности.

Доказательство проводится по той же схеме, что и для системы (6.1).

9. О построении решений задач в тонких цилиндрических областях с погрешностью, меньшей любой степени относительной толщины. Решение в тонких цилиндрических областях обычно ищут в форме ряда по малому параметру $h/L = h_*$. Погрешность получаемых таким образом приближенных решений есть $O(h_*^n)$, показатель n зависит от числа удержанных членов ряда [15–17]. Сформулированные в п. 8 утверждения позволяют указать метод построения приближенных решений, которые отличаются от точного на величину, меньшую любой степени h_*.

Опишем его на примере следующей краевой задачи для системы (6.1):

$$Ew_{,x} = q_{\pm}(x^\alpha) \text{ на } T_+, T_-$$

$$E^{\alpha\beta}w_{,\alpha}\nu_\beta = q(x^\alpha, x) \text{ на } \Gamma_p \times [-h/2, h/2]$$

$$w = s(x^\alpha, x) \text{ на } \Gamma_w \times [-h/2, h/2]$$

Будем искать решение в виде суммы $w = w^*(x, x^\alpha) + u(x^\alpha) + w'(x, x^\alpha)$, где w^* — решение задачи в бесконечном слое, ограниченном плоскостями T_+ и T_-, краевые значения $q_{\pm}(x^\alpha)$ продолжены на все значения x^α каким-нибудь способом, $u(x^\alpha)$ — решение задачи: $(E^{\alpha\beta}u_{,\alpha})_{,\beta} = 0$ в T, $E^{\alpha\beta}u_{,\alpha}\nu_\beta = \langle q - E^{\alpha\beta}w^*_{,\alpha}\nu_\beta\rangle$ на Γ_p, $u = \langle s - w^*\rangle$ на Γ_w. Для w', таким образом, получим краевую задачу 1°. Следовательно, w' экспоненциально затухает при удалении от края с показателем в экспоненте c/h, поэтому в любой фиксированной точке погрешность приближенного решения $w = w^* + u$ при $h_* \to 0$ меньше любой степени h_*. Продолжение функций $q_{\pm}(x^\alpha)$ следует выбирать так, чтобы краевые данные для w' получились порядка $q_{\pm}(x^\alpha)$ или меньше. Тогда амплитуда у экспоненциально убывающей функции w' будет того же порядка или меньше амплитуды приближенного решения.

Аналогично строится приближенное решение в других краевых задачах. Отметим, что указанное в п. 7. свойство краевой задачи 3° для упругого тела позволяет строить «сверхточное» решение задачи о штампе.

10. Дополнение. Рассмотрим пластину, лицевые поверхности которой свободны от нагрузок. На краю пластины заданы поверхностные силы так, что вдоль каждого поперечного волокна суммарные сила и момент равны нулю.

Покажем, что напряженное состояние, тем не менее, может быть проникающим, т. е. не затухает экспоненциально со скоростью const h^{-1}. Будем считать пластину полубесконечной ($|x| \leqslant h/2$, $|y| < +\infty$, $0 \leqslant z \leqslant +\infty$), изотропной, коэффициент Ляме λ положим для простоты равным нулю. Краевые условия возьмем в виде

$$\sigma_{zz} = 2\mu k \cos ky \left(x + \sum_{s=1}^{3} a_s \varkappa_s \sin(2s-1)\pi x h^{-1}\right) \tag{10.1}$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu \sin ky \left(kx + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} a_s(\varkappa_s^2 + k^2)\sin(2s-1)\pi x h^{-1}\right)$$

$$\sigma_{xz} = -\mu k h^{-1}\pi \cos ky \sum_{s=1}^{3} a_s(2s-1)\cos(2s-1)\pi x h^{-1}$$

$$\varkappa_s = h^{-1}(\pi^2(2s-1)^2 + k^2h^2)^{1/2}$$

Здесь μ — модуль сдвига, k, a_s — фиксированные числа. Нетрудно построить решение этой задачи

$$w_x = -k^{-1}e^{-kz}\cos ky \tag{10.2}$$

$$w_y = -xe^{-kz}\sin ky - \sin ky \sum_{s=1}^{3} a_s\varkappa_s e^{-\varkappa_s z}\sin(2s-1)\pi x h^{-1}$$

$$w_z = -xe^{-kz}\cos ky - k\cos ky \sum_{s=1}^{3} a_s e^{-\varkappa_s z}\sin(2s-1)\pi x h^{-1}$$

Решение сконструировано из бигармонического и вихревых решений [15]. Оно содержит проникающую часть (первые слагаемые в (10.2)) и погранслой.

Наложим на краевые данные (10.1) ограничения: $\langle\sigma_{zz}x\rangle = \langle\sigma_{yz}x\rangle = \langle\sigma_{xz}\rangle = 0$. Эти ограничения представляют собой систему трех неоднородных линейных уравнений относительно a_1, a_2, a_3. Определитель системы Δ дается формулой $\Lambda = \mu^3k^4h^4(2\varkappa_1 -$

$-3\varkappa_2 + 4\varkappa_3$) и отличен от нуля. Возьмем в качестве a_s в (10.1) решения этой системы, тогда суммарные сила и момент на каждом поперечном волокне при $z = 0$ будут равны нулю.

Можно проверить, что a_s имеют порядок h^2, следовательно, σ_{yz}, $\sigma_{yx} \sim 1$, σ_{zz}, σ_{xz}, $\sigma_{yy} \sim h$ при $z = 0$. В проникающей части решения σ_{zz}, σ_{yz}, $\sigma_{yy} \sim h$, $\sigma_{xx} = \sigma_{xz} = \sigma_{xy} \equiv 0$. Это согласуется с формулировкой принципа Сен-Венана в теории пластин, данной И. И. Воровичем [15].

Построенный пример показывает, что уточненные двумерные уравнения теории пластин, учитывающие на краю только суммарные силу и момент, не могут правильно описать поправки порядка h. Из этого примера следует также, что в случае, когда на краю пластины на каждом поперечном волокне известны только суммарные сила и момент, а точное распределение поверхностных сил вдоль поперечных волокон неизвестно, построение напряженного состояния с учетом членов порядка h невозможно, и максимально достижимую точность дают классические двумерные уравнения.

Поступила 30 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Saint-Venant B.* Memoire sur la torsion des prismes. Mem. Divers Savantsm, 1855, vol. 14, p. 233—560.
2. *Boussinesq M. S.* Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des solides élustiques. Paris, Gauthier-Villars, 1885. Nouveau tirage, 1969.
3. *Von Mises R.* On Saint-Venant's principle. Bull. Amer. Math. Soc., 1945, vol. 51, No. 8, p. 555—562.
4. *Sternberg E.* On Saint-Venant's principle. Quart. Appl. Math., 1954, vol. 11, No. 4, p. 393—402.
5. *Toupin R. A.* Saint-Venant's principle. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1965, vol. 18, No. 2.
6. *Бердичевский В. Л.* К доказательству принципа Сен-Венана для тел произвольной формы. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
7. *Diaz J. B., Payne L. E.* Mean value theorems in the theory of elasticity. Proc. 3rd US Nat. Congr. of Appl. Mech., Providence, 1958, p. 293. New York, ASME, 1958.
8. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Энергетические оценки обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка и их приложения. Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 6.
9. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Принцип Сен-Венана для смешанной задачи теории упругости и его приложения. Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 5.
10. *Oleinik O. A., Yosifian G. A.* Boundary value problems for second oder elliptic equations in unbounded domains and Saint-Venant's principle. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat, Ser 4, 1977, vol. 4, No. 2.
11. *Oleinik O. A., Yosifian G. A.* On singularities at the boundary points and uniqueness theorems for solutions of the first boundary value problem of elasficity. Comm. partial differential equations, 1977, vol. 2, No. 9, p. 237—969.
12. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений в неограниченных областях. Успехи матем. наук, 1976, т. 31, № 6.
13. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1977.
14. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
15. *Ворович И. И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек. Материалы I Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек (Гегечкори, ГрузССР, 1974). Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975.
16. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотический метод построения теории оболочек. Материалы I Всес. школы по теории оболочек и численным методам расчета (Гегечкори, ГрузССР, 1974). Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975.
17. *Джавадов М. Г.* Асимптотика решения краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в тонких областях. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 10.