Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.31

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С РАЗРЕЗАМИ ИЛИ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Г. Я. Попов

(Одесса)

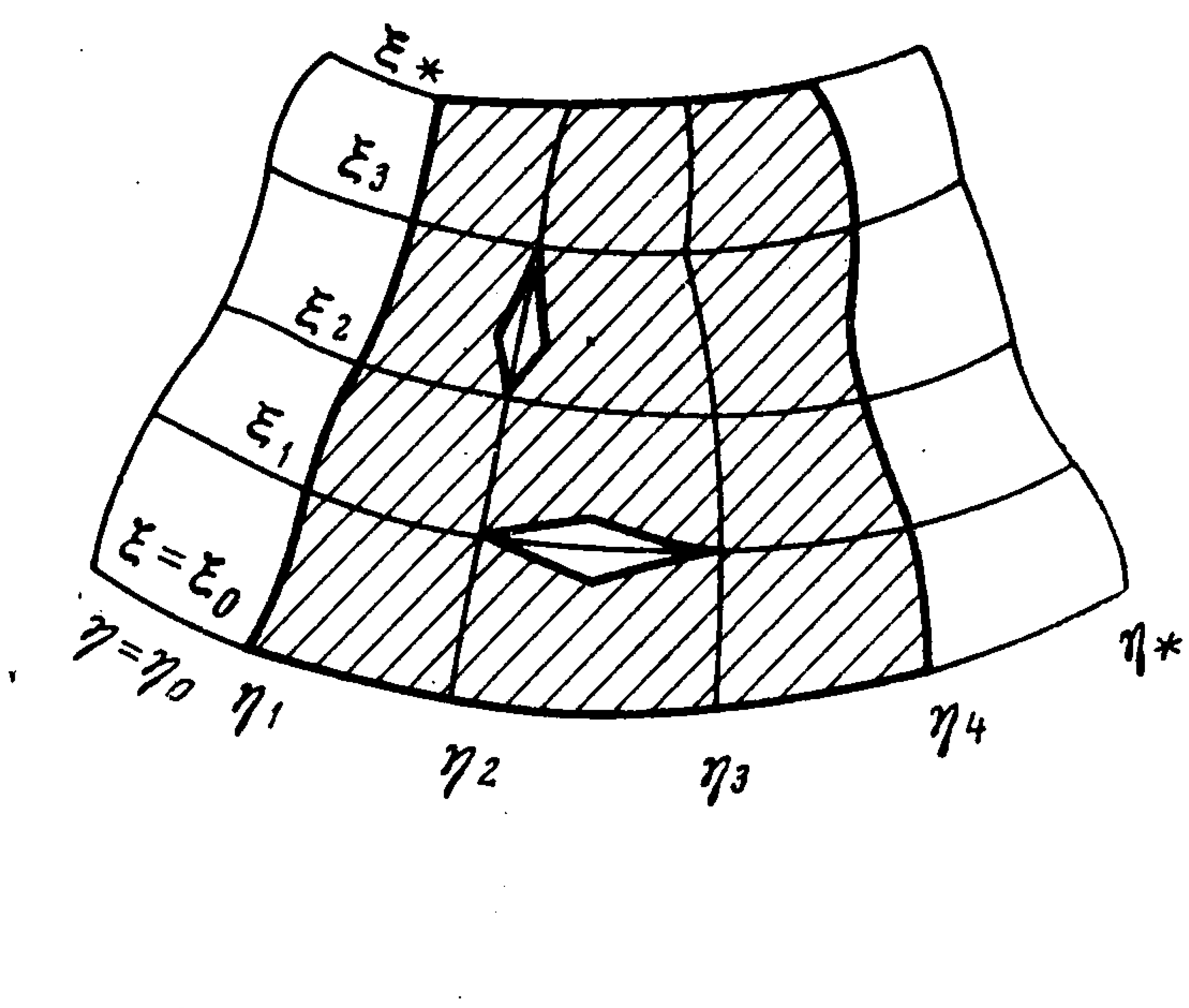
Развивается способ решения задач механики сплошной среды и математической физики для областей с разрезами (трещинами) или тонкими включениями, основанный, во-первых, на интегральном преобразовании по переменной, пересекающей разрез или включение, во-вторых, на формулировке исследуемой краевой задачи в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Способ иллюстрируется на конкретных задачах механики.

По-видимому, впервые идею интегрального преобразования (Фурье) по прямой, пересекающей разрез, применил Р. В. Серебряный [1] при решении задачи об изгибе неограниченной пластинки, шарнирно-разрезанной вдоль бесконечной прямой.

1. Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$r_1(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[p_1(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]+r_2(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\left[p_2(\eta)\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]-q_1(\xi)u-q_2(\eta)u=0 \tag{1.1}$$

в области, показанной на фигуре, с граничными условиями общего типа на координатных линиях: $\xi=\xi_0$, $\xi=\xi_*$; $\eta=\eta_1$, $\eta=\eta_4$. Будем полагать, что на координатной линии $\xi=\xi_1$ при $\eta_2<\eta<\eta_3$ имеется разрез или тонкое включение, т. е. линия, на которой терпит разрыв искомая функция (но задана ее нормальная производная)



$$u|_{\xi=\xi_1-0}-u|_{\xi=\xi_1+0}=\chi(\eta),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\xi_1-0}=\left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\xi_1+0}=g(\eta)\quad(\eta_2\leqslant\eta\leqslant\eta_3) \tag{1.2}$$

или терпит разрыв нормальная производная (но заданы значения функции), т. е.

$$u|_{\xi_1-0}=u|_{\xi_1+0}=g(\eta),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\xi_1-0}-\left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\xi_1+0}=\chi(\eta)\quad(\eta_2\leqslant\eta\leqslant\eta_3) \tag{1.3}$$

Здесь $\chi(\eta)$ — неизвестная функция, равная нулю на продолжении разреза или включения, а $g(\eta)$ — заданная функция.

Обычный путь (например [2]) решения таких задач методом интегральных преобразований основывается на разбиении исследуемой области (фигура) на две части координатной линией $\xi = \xi_1$, содержащей разрез. Последующее сопряжение решений для этих областей с учетом условий (1.2) или (1.3) приводит к парным интегральным уравнениям.

Будем использовать другой путь решения, не требующий разбиения на части первоначальной области и базирующийся на наличии преобразования по переменной ξ в промежутке (ξ_0, ξ_*), выражаемого в общем случае формулами

$$(1.4) \qquad u_\lambda(\eta) = \int_{\xi_0}^{\xi_*} u(\xi, \eta) K(\xi, \lambda) r_1^{-1}(\xi)\, d\xi, \quad u(\xi, \eta) = \int_l R_*(\xi, \lambda) u_\lambda(\eta) d\sigma(\lambda)$$

(l может представлять некоторую линию в плоскости комплексного переменного λ).

Для реализации развиваемого здесь способа умножаем обе части уравнения (1.1) на $r_1^{-1}(\xi) K(\xi, \lambda)$ и проводим интегрирование по частям отдельно на промежутках (ξ_0, ξ_1) и (ξ_1, ξ_*). Использование дифференциального уравнения и краевых условий задачи Штурма—Лиувилля, решением которой [3] является ядро $K(\xi, \lambda)$, а также обозначения (1.4), позволяет свести уравнение (1.1) к следующему:

$$(1.5) \qquad r_2 \frac{d}{d\eta}\left(p_2 \frac{d}{d\eta} u_\lambda\right) - (q_2 + \lambda) u_\lambda = n(\lambda)\left[u|_{\xi_1-0} - u|_{\xi_1+0}\right] -$$
$$- l(\lambda)\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\bigg|_{\xi_1-0} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\bigg|_{\xi_1+0}\right] \quad (\eta_1 < \eta < \eta_4)$$
$$n(\lambda) = \left[p_1 \frac{\partial K}{\partial \xi}\right]_{\xi=\xi_1}, \quad l(\lambda) = [p_1 K]_{\xi=\xi_1}$$

Пусть, например, на разрезе (включении) реализовано условие (1.2) Тогда вместо (1.5) можно записать

$$(1.6) \qquad r_2 \frac{d}{d\eta}\left(p_2 \frac{d}{d\eta} u_\lambda\right) - (q_2 + \lambda) u_\lambda = n(\lambda) \chi(\eta) \quad (\eta_1 < \eta < \eta_4)$$

К полученному уравнению еще следует добавить трансформированные краевые условия по граничным линиям $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_4$, имеющие в общем случае вид [4]

$$(1.7) \qquad U_j[u_\lambda] = \gamma_j \quad (j = 0, 1)$$

Если построена функция Грина $G(\eta, \sigma)$ полуоднородной ($\gamma_j = 0$, $j = 0,1$) краевой задачи (1.6), (1.7) и известна базисная система функций $\psi_j(\eta)$, $j = 0,1$, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению (1.6) и граничным условиям

$$(1.8) \qquad U_j[\psi_k] = \delta_{jk} \quad (j, k = 0, 1)$$

то решение краевой задачи (1.6), (1.7) будет иметь вид [5]

$$(1.9) \qquad u_\lambda(\eta) = \int_{\eta_2}^{\eta_3} G(\eta, \sigma) n(\lambda) \chi(\sigma) d\sigma + \sum_{j=0}^{1} \gamma_j \psi_j(\eta)$$

Пользуясь далее формулой обращения (1.4), по трансформанте (1.9) найдем оригинал $u(\xi, \eta)$. Подставив его производную по ξ, в (1.2) придем к интегральному уравнению для определения $\chi(\eta)$. Оно оказывается, как правило, сингулярным.

Для того чтобы сингулярная часть заранее выделялась в явном виде, рекомендуется функцию Грина брать в следующем виде:

$$G(\eta, \sigma) = \Phi(\eta, \sigma) - \sum_{j=0}^{1} \psi_j(\eta) U_j[\Phi] \tag{1.10}$$

понимая под $\Phi(\eta, \sigma)$ фундаментальную функцию, с помощью которой решение $u(\eta)$ уравнения (1.6) с произвольной правой частью $f(\sigma)$ выражается формулой

$$u(\eta) = \int_{\eta_1}^{\eta_4} \Phi(\eta, \sigma) f(\sigma)\, d\sigma \tag{1.11}$$

Если учесть (1.8) и определяющие свойства функций Грина [4, 5], можно убедиться, что формула (1.10) действительно определяет функцию Грина краевой задачи (1.6), (1.7).

Замечание. Именно первое слагаемое в (1.10) и определяет сингулярную часть в ядре упомянутого интегрального уравнения. Приведенная здесь формула (1.10) для функции Грина является, по-видимому, новой. Она остается справедливой и для дифференциальных уравнений любого порядка (изменяется лишь количество слагаемых под знаком суммы).

Фундаментальную функцию $\Phi(\eta, \sigma)$ проще всего строить с помощью интегрального преобразования

$$\int_{\eta_0}^{\eta_*} K_2(\eta, \mu)\, r_2^{-1}(\eta) f(\eta)\, d\eta = f_\mu, \quad f(\eta) = \int_{l_2} R_2(\eta, \mu) f_\mu d\sigma_2(\mu) \tag{1.12}$$

ядро которого — решение проблемы Штурма — Лиувилля для уравнения

$$r_2(\eta) \frac{d}{d\eta}\left[p_2(\eta) \frac{d}{d\eta} K_2\right] - q_2 K_2 = -\mu K_2 \quad (\eta_0 < \eta < \eta_*) \tag{1.13}$$

В случае уравнения (1.6) с постоянными коэффициентами построенная таким путем фундаментальная функция становится зависящей от разности аргументов и оказывается удобным в формуле (1.10) в качестве $\Phi(\eta, \sigma)$ взять одно из следующих выражений:

$$\Phi(\eta, \sigma) = \Phi(\eta - \sigma) \pm \Phi(\eta + \sigma) \tag{1.14}$$

2. Реализуем изложенную схему на примере такой задачи. В упругом слое ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $-\infty < y, z < \infty$) с защемленной гранью $x = 1$ имеется тонкое жесткое включение в виде полосы: $0 \leqslant x \leqslant a$ ($a < 1$), $-\infty < z < \infty$, расположенной в плоскости $y = 0$. Требуется найти поле напряжений, если к внешнему краю указанного включения приложена равномерно распределенная сдвигающая (т. е. действующая вдоль оси z) нагрузка. Эта антиплоская задача эквивалентна краевой задаче

$$\Delta w = 0 \quad (-\infty < y < \infty, \quad 0 < x < 1) \tag{2.1}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=1} = 0 \quad \left(\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \ \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \ \mu\right)$$

с выполнением следующих условий на включении (μ — модуль сдвига), представляющих аналог условий (1.3):

$$\tau_{yz}|_{y=-0} - \tau_{yz}|_{y=+0} = \mu\left[\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{-0} - \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{+0}\right] = \chi(x) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{y=0} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a,\ \chi(x) \equiv 0,\ x \notin (0, a))$$

Применяя к уравнению Лапласа из (2.1) преобразование Фурье по y с разбиением (согласно схеме п. 1) участка интегрирования на два: $(-\infty, -0)$ $(+0, \infty)$ и с учетом (2.2), приходим к следующему аналогу краевой задачи (1.6), (1.7):

$$\frac{d^2 w_\beta(x)}{dx} - \beta^2 w_\beta(x) = -\frac{\chi(x)}{\mu} \quad (0 < x < 1) \tag{2.3}$$

$$\frac{dw_\beta(x)}{dx}\Big|_{x=0} = w_\beta(1) = 0 \quad \left(w_\beta(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta y} w(x, y)\, dy\right)$$

Легко находим базисную систему функций, удовлетворяющую краевым условиям (1.8)

$$\psi_0(x) = -\frac{\operatorname{sh}\beta(1-x)}{\beta \operatorname{ch}\beta}, \quad \psi_1(x) = \frac{\operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{ch}\beta} \tag{2.4}$$

С помощью преобразования Фурье по y (выполняющего здесь роль преобразования (1.12)), примененного к уравнению (2.3), определяем фундаментальную функцию

$$\Phi(x-\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha(x-\xi)}}{\alpha^2-\beta^2}\, d\alpha = -\frac{e^{-|\beta|\,|x-\xi|}}{2|\beta|} \tag{2.5}$$

Формула (1.10) с подстановкой первого выражения из (1.14) и с учетом (2.4) и (2.5) приводит к следующему выражению для функции Грина краевой задачи (2.3):

$$-G(x, \xi) = \frac{e^{-|\beta|\,|x-\xi|} + e^{-|\beta|\,|x+\xi|}}{2|\beta|} - \frac{\operatorname{ch}\beta x \operatorname{ch}\beta\xi}{e^{|\beta|}\,|\beta| \operatorname{ch}\beta} \tag{2.6}$$

Используя ее, найдем $dw_\beta(x)\,/\,dx$.

Последующее использование формулы обращения для преобразования Фурье, вычисление известных интегралов по параметру преобразования β позволит получить выражение для $\partial w/\,\partial x$. Его подстановка в (2.2) приводит к следующему интегральному уравнению:

$$\int\limits_{-a}^{a} \operatorname{cosec}\frac{\pi(x-\xi)}{2}\,\chi(\xi)\, d\xi = 0 \quad (|x| \leqslant a)$$

для определения функции $\chi(\xi)$ (продолженной четным образом на отрицательные значения аргумента).

Полученное уравнение допускает простое точное решение, содержащее произвольную постоянную. Значение последней можно зафиксировать из условия равновесия включения.

3. Изложенная в п. 1 схема очевидным образом обобщается на случай конечного числа включений (или разрезов), расположенных на коорди-

натных линиях $\xi = \text{const}$ (вместо одного интегрального уравнения будет система таковых). Ее можно обобщить и на случай более общих условий на включениях, чем (1.2) или (1.3).

Принципиально более сложным является наличие включений как по линиям $\xi = \text{const}$, так и по линиям $\eta = \text{const}$.

Пусть помимо включения (разреза) на линии $\xi = \xi_1$ (фигуре), разобранного в п. 1, имеется еще включение (разрез) на линии $\eta = \eta_2$. Для определенности будем считать, что на нем реализуются условия типа (1.2), т. е.

$$(3.1) \qquad u|_{\eta_2-0} - u|_{\eta_2+0} = \psi(\xi) \quad (\psi(\xi) \equiv 0, \ \xi \notin (\xi_2, \xi_3))$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta_2-0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta_2+0} = h(\xi) \quad (\xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_3)$$

Применение к первому из этих условий преобразования (1.4) дает

$$(3.2) \qquad u_\lambda|_{\eta_2-0} - u_\lambda|_{\eta_2+0} = \psi_\lambda \quad \left(\psi_\lambda = \int_{\xi_2}^{\xi_3} r_1^{-1}(\xi) K(\xi, \lambda) \psi(\xi) d\xi\right)$$

Это условие и надлежит теперь присовокупить к краевой задаче (1.6), (1.7). Для того чтобы выполнить его, найдем предварительно вспомогательную функцию $u_\lambda^*(\eta)$, которая должна иметь скачок (3.2), удовлетворять дифференциальному уравнению (1.6) на интервалах (η_0, η_2) и (η_2, η_*), причем $\eta_0 \leqslant \eta_1$, $\eta_* \geqslant \eta_4$, и краевым условиям проблемы Штурма — Лиувилля для ядра интегрального преобразования (1.12).

Такая функция легко найдется с помощью этого преобразования, примененного к уравнению (1.6) на интервале (η_0, η_*) с разбиением последнего на два: $(\eta_0, \eta_2 - 0)$ и $(\eta_2 + 0, \eta_*)$ и с учетом скачка (3.2). Она будет иметь вид

$$(3.3) \qquad u_\lambda^*(\eta) = -\int_{l_2} \frac{n(\lambda)\chi_\mu + n_2(\mu)\psi_\lambda}{\lambda + \mu} R_2(\eta, \mu) d\sigma_2(\mu)$$

$$(n_2(\mu) = [p_2(\eta)\partial K_2 / \partial\eta]_{\eta=\eta_2})$$

Если теперь найти значения функционалов, содержащихся в (1.7)

$$(3.4) \qquad U_j[u_\lambda^*] = \gamma_j^*$$

и располагать базисной системой функций, удовлетворяющей условию (1.8), то можно убедиться, что решение краевой задачи (1.6), (1.7) при наличии скачка (3.2) будет иметь вид

$$(3.5) \qquad u_\lambda(\eta) = u_\lambda^*(\eta) + \sum_{j=0}^{1} (\gamma_j - \gamma_j^*) \psi_j(\eta)$$

Последующее использование формулы обращения из (1.4) позволит найти функцию $u(\xi, \eta)$ и ее производные. Реализация же вторых условий из (1.2) и (3.1) на включениях (разрезах) приведет к системе интегральных уравнений относительно искомых функций $\chi(\xi)$ и $\psi(\eta)$.

Проиллюстрируем изложенную схему на задаче, разобранной в п. 2, усложнив ее наличием трещины на отрезке: $x = a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ с условиями

$$w(a-0, y) - w(a+0, y) = \psi(y) \tag{3.6}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{a-0} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{a+0} = 0 \quad (|y| < b)$$

что приведет к усложнению краевой задачи (2.3) за счет выполнения условия

$$w_\beta(a-0) - w_\beta(a+0) = \psi_\beta \tag{3.7}$$

полученного преобразованием Фурье по y первого из условий (3.6).

В качестве аналога интегрального преобразования (1.12) возьмем косинус-преобразование Фурье

$$\int_0^\infty \cos \alpha x f(x)\, dx = f_\alpha, \quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \alpha x f_\alpha d\alpha \tag{3.8}$$

Применяя его к дифференциальному уравнению (2.3) с учетом разбиения интервала $(0, \infty)$ на два: $(0, a-0)$, $(a+0, \infty)$ и скачка (3.7), находим аналог функции (3.3)

$$w_\beta^*(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha a \psi_\beta + \mu^{-1}\chi_\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\cos \alpha x d\alpha \tag{3.9}$$

В разбираемом случае значения функционалов из (3.4) имеют вид

$$\gamma_0^* = \left.\frac{dw^*_\beta}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \gamma_1^* = w_\beta^*(1) \quad (\gamma_j = 0) \tag{3.10}$$

и базисная система функций определена формулами (2.4). Поэтому согласно (3.5) решение краевой задачи (2.3) при наличии скачка (3.7) имеет вид

$$w_\beta(x) = w_\beta^*(x) - \gamma_1^* \operatorname{ch} \beta x \operatorname{sech} \beta \tag{3.11}$$

Воспользовавшись формулой обращения для преобразования Фурье, отсюда найдем $w(x, y)$. После вычисления известных интегралов по параметру β приходим к следующей формуле:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\pi}{4\mu}\int_{-a}^{a}\frac{\sin {}^1/_2\pi(x-\xi)\operatorname{ch}{}^1/_2\pi y\chi(\xi)}{\operatorname{sh}^2 {}^1/_2\pi y + \sin^2 {}^1/_2\pi(x-\xi)}d\xi - \tag{3.12}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int_{-b}^{b}\left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sh}{}^1/_2\pi(\eta-y)}{\sin{}^1/_2\pi(a-x)} + \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sh}{}^1/_2\pi(\eta-y)}{\sin{}^1/_2\pi(a+x)}\right]\frac{\psi'(\eta)}{\pi}d\eta$$

Здесь функция $\chi(x)$ четным образом продолжена на отрицательные значения аргумента, а производная функции $\psi(y)$ появилась за счет интегрирования по частям. Пользуясь полученной формулой, реализуем оставшиеся условия на включении (2.2) и на трещине (3.6). В результате приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{2\mu}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(\xi)\,d\xi}{\sin{}^1/_2\pi(\xi-x)} - \int_{-b}^{b}[s(x,\eta)-s(-x,\eta)]\,\psi'(\eta)\,d\eta = 0 \quad (|x|\leqslant a) \tag{3.13}$$

$$\int_{-b}^{b}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}{}^1/_2\pi(\eta-y)} - s(a, \eta-y)\right]\psi'(\eta)\,d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\mu}\int_{-a}^{a}c(y,\xi)\,\chi(\xi)\,d\xi = 0 \quad (|y|\leqslant b)$$

$$s(x,y) = \frac{\operatorname{sh}{}^1/_2\pi y\cos{}^1/_2\pi(a+x)}{\operatorname{sh}^2{}^1/_2\pi y + \sin^2{}^1/_2\pi(a+x)}, \quad c(y,\xi) = \frac{\operatorname{ch}{}^1/_2\pi y \sin{}^1/_2\pi(a-\xi)}{\operatorname{sh}^2{}^1/_2\pi y + \sin^2{}^1/_2\pi(a-\xi)}$$

Заметим, что из этой системы можно найти производную от раскрытия трещины $\psi'(y)$. Наибольший интерес, однако, представляет коэффициент интенсивности напряжения [6]. В случае плоских задач связь этого коэффициента с коэффициентом при особенности в производной от раскрытия трещины установлена путем анализа комплексных потенциалов [6]. Аналогичную связь можно установить и в общем случае, если проблема сформулирована в виде сингулярного уравнения относительно производной от раскрытия трещины. Для этого следует воспользоваться известным [7] поведением интегралов типа Коши, заданных на отрезке, при приближении переменной к концам интегрирования с внешней и внутренней точки указанного отрезка.

4. При рассмотрении более сложных краевых задач математической физики и механики сплошных сред приходится иметь дело не с одним уравнением второго порядка, а с системой таких уравнений или с одним уравнением, но порядка выше второго (теория упругости, теория изгиба пластин и оболочек и т. п.).

Для решения таких задач с разрезами (трещинами) или тонкими включениями изложенным выше способом следует записывать дифференциальные уравнения исследуемых краевых задач в виде полной системы дифференциальных уравнений первого порядка, что позволяет наиболее просто записать и реализовать условия на разрезе или включении.

Проиллюстрируем это на такой задаче изгиба пластинок. Прямоугольная в плане ($a_0 \leqslant x \leqslant a_1$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $a_1 - a_0 > b$) и шарнирно-опертая по граням $y = 0$, $y = b$ пластинка подвергается воздействию равномерно распределенной по всей указанной области нормальной нагрузки: $q(x, y) = q$. При достижении этой нагрузкой определенной величины $q = q_p$ в центре пластинки нормальное напряжение σ_y достигнет предела текучести σ_p (соответственно $M_y = M_p$). Дальнейшее увеличение нагрузки $q > q_p$ в предположении отсутствия упрочнения материала может привести к возникновению линейного пластического шарнира на отрезке $c_0 < x < c_1$, на котором будет выполняться условие

$$M_y\big|_{y=l} = M_p \quad (c_0 \leqslant x \leqslant c_1,\ l = {}^1\!/_2 b) \tag{4.1}$$

(Такой шарнир определенно возникает, если на указанном отрезке имеется неглубокая трещина).

Требуется выяснить перераспределение напряжений в пластинке при возникновении указанного пластического шарнира.

Для решения поставленной задачи развиваемым здесь способом будем исходить из полной системы уравнений первого порядка относительно изгибных характеристик

$$u = Dw, \quad \varphi_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varphi_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad M_x,\ M_y,\ M_{xy},\ Q_x,\ Q_y, V_x, V_y$$

Учитывая шарнирное опирание пластинки по граням $y = 0, b$, к этой системе применим конечные синус- и косинус-преобразования Фурье, определяемые формулами типа

$$u^s = \int_0^b Dw(x, y)\sin\beta y\, dy \quad \left(\beta = \frac{n\pi}{b},\ n = 0, 1, 2, \ldots\right) \tag{4.2}$$

$$Q_y{}^c = \int_0^b Q_y(x, y)\cos\beta y\, dy, \quad q^s = \int_0^b q(x, y)\sin\beta y\, dy$$

При выполнении связанного с этой операцией интегрирования по частям следует интервал интегрирования разбить на два участка: $(0,\ l - 0)$, $(l + 0,\ b)$ и учесть, что при переходе через шарнир терпят разрыв углы поворота φ_y, т. е.

(4.3) $$\varphi_y|_{l-0} - \varphi_y|_{l+0} = \chi(x) \quad (\chi(x) \equiv 0,\ x \notin (c_0, c_1))$$

В результате будем иметь (коэффициент Пуассона считаем равным нулю)

$$\frac{dQ_x^s}{dx} - \beta Q_y^c = -q^s, \quad \frac{dM_x^s}{dx} - \beta M_{xy}^c - Q_x^c = 0$$

$$\frac{dM_{xy}^c}{dx} + \beta M_y^s - Q_y^c = 0, \quad \frac{d\varphi_x^s}{dx} + M_x^s = 0, \quad \frac{du^s}{dx} = \varphi_x^s$$

$$M_y^s - \beta\varphi_y^c + \sin\beta l\chi(x) = 0, \quad M_{xy}^c + \beta\varphi_x^s = 0, \quad \varphi_y^c = \beta u^s$$

$$\frac{dM_{xy}^c}{dx} + Q_y^c = V_y^c, \quad V_x^c = Q_x^s - \beta M_{xy}^c$$

Путем исключения и линейных комбинаций полученную систему можно свести к дифференциальному уравнению

(4.4) $$\frac{dz}{dx} + Pz = f \quad (a_0 < x < a_1)$$

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta^2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta^4 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad f = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q^s - \beta^2 \sin\beta l\chi(x) \end{Vmatrix}$$

относительно вектор-функции (матрицы-столбца) $z(x) = (u^s,\ M_x^s,\ \varphi_x^s,\ V_x^s)$. Если к полученному уравнению присоединить краевые условия на гранях $x = a_j$, которые в общем случае будут иметь такой вид:

(4.5) $$Az(a_0) + Bz(a_1) = \gamma$$

(A, B — матрицы, γ — матрица-столбец четвертого порядка), то приходим к одномерной краевой задаче для вектора z. Если построена [4] матричная функция Грина (матрица Грина $G(x,\ \xi)$) для полуоднородной ($\gamma = 0$) краевой задачи (4.4), (4.5) и базисная матрица $\Psi(x)$, удовлетворяющая уравнению и краевым условиям

(4.6) $$d\Psi/dx + P\Psi = 0$$

(4.7) $$A\Psi(a_0) + B\Psi(a_1) = I$$

то решение неоднородной краевой задачи (4.4), (4.5) можно получить по формуле

(4.8) $$z(x) = \int_{a_0}^{a_1} G(x,\ \xi) f(\xi)\, d\xi + \Psi(x)\gamma$$

представляющей аналог формулы (1.9).

Замечание. Если исходить не из системы уравнений первого порядка, а из уравнения Софи Жермен, то вместо (4.4) будем иметь одно скалярное уравнение четвертого порядка. Однако в правой части последнего будет содержаться $\chi''(x)$, имеющая неинтегрируемые особенности в точках $x = c_j$. При решении же иных задач математической физики на включения (в частности и задач изгиба пластинок) таких затруднений не возникает, и можно применить излагаемый способ непосредственно к разрешающим уравнениям высокого порядка (в частности к уравнению Софи Жермен), если это, конечно, представляется более удобным.

Найдя вектор $z(x)$ и воспользовавшись формулой обращения для конечного синус-преобразования, найдем $M_y(x, y)$. Это позволит реализовать условие (4.1) и тем самым получить интегральное уравнение для искомой функции $\chi(x)$.

Как видим, главная трудность (техническая) состоит в построении матрицы Грина. Поскольку общий способ [4] построения таких матриц громоздок и неудобен с точки зрения выделения сингулярных частей в получаемых уравнениях, ниже излагается специальный прием построения матриц Грина.

5. Будем для общности считать, что вектор $z(x)$ n-го порядка. Для уравнений типа (4.4) с постоянными коэффициентами можно построить так называемый [8] матрицант, т. е. решение $Z(x)$ уравнения (4.6), обладающее свойством

(5.1) $$Z(0) = I$$

Действительно, введем в рассмотрение матрицу

(5.2) $$M(\zeta) = I\zeta + P$$

определитель которой, очевидно, будет многочленом степени n, т. е.

(5.3) $$|M(\zeta)| = Q_n(\zeta) = \prod_{j=0}^{n-1}(\zeta - \zeta_j)$$

Если ζ не совпадает ни с одним из корней (они могут быть и кратными) этого многочлена, то будет существовать

(5.4) $$M^{-1}(\zeta) = \Delta^*(\zeta)\, Q_n^{-1}(\zeta)$$

где $\Delta^*(\zeta)$ — матрица, транспонированная к матрице алгебраических дополнений для элементов матрицы (5.2).

Покажем, что

(5.5) $$Z(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\Delta^*(\zeta)}{Q_n(\zeta)} e^{\zeta x}\, d\zeta$$

(C — любой замкнутый контур, охватывающий все нули многочлена Q_n).

Подставим (5.5) в уравнение (4.6), примем во внимание, что матрица (5.4) является обратной к матрице $M(\zeta)$ и воспользуемся теоремой Коши. В результате придем к тождеству. Осталось показать справедливость равенства (5.1), которое эквивалентно следующему:

(5.6) $$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{\Delta^*(\zeta)\, d\zeta}{Q_n(\zeta)} = I$$

Чтобы убедиться в его справедливости, достаточно подсчитать вычет подынтегрального выражения (5.6) при $\zeta = \infty$.

Полученное выражение (5.5) для матриканта можно, очевидно, записать и в таком виде:

$$Z(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Res} \left[\frac{\Delta^*(\zeta) e^{\zeta x}}{Q_n(\zeta)} \right]_{\zeta=\zeta_j} \tag{5.7}$$

Зная матрицант, можно построить базисную матрицу, обладающую свойством (4.7)

$$\Psi(x) = Z(x) C \tag{5.8}$$

Можно показать, подобно тому как и в случае формулы (1.10), справедливость следующей формулы для матрицы Грина краевой задачи (4.4), (4.5):

$$G(x, \xi) = \Phi(x, \xi) - \Psi(x) [A\Phi(a_0, \xi) + B\Phi(a_1, \xi)] \tag{5.9}$$

где $\Phi(x, \xi)$ — фундаментальная матрица, выполняющая ту же роль, что и фундаментальная функция в скалярном случае.

В случае уравнения (4.4) с постоянными коэффициентами легко построить фундаментальную матрицу, зависящую от разности аргументов, если учесть [4], что всякая матрица $\Phi(x - \xi)$, удовлетворяющая при $x > \xi$ и при $x < \xi$ матричному уравнению (4.6), а при $x = \xi$ имеющая скачок

$$\Phi(+0) - \Phi(-0) = I \tag{5.10}$$

является фундаментальной.

Этим свойством, например, обладает такая матрица

$$\Phi(y) = \pm \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\pm} \frac{\Delta^*(\zeta)}{Q_n(\zeta)} e^{\zeta y} \, d\zeta \quad (y \gtrless 0) \tag{5.11}$$

где C_+ — контур, охватывающий какие-либо m корней многочлена $Q_n(\zeta)$, а C_- — контур, охватывающий оставшиеся $n - m$ корней. Чтобы убедиться в этом, достаточно учесть, что на основании (5.4) каждый из контурных интегралов в (5.11) удовлетворяет уравнению (4.6). Равенство же (5.10) оказывается справедливым на основании (5.6). Фундаментальную матрицу можно также построить, применив к уравнению (4.4) преобразование Фурье подобно тому, как это сделано при получении фундаментальной функции (2.5). В результате придем к формуле

$$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Delta^*(\zeta)}{Q_n(\zeta)} e^{\zeta y} \, d\zeta \tag{5.12}$$

представляющей частную реализацию формулы (5.11).

Сопоставляя (5.12), (5.11) с (5.5), видим, что фундаментальная матрица выражается через те же вычеты, что и матрицант (5.7). Как и в скалярном случае, иногда бывает удобным при наличии фундаментальных матриц типа (5.11) в формулу (5.9) подставлять одно из следующих выражений:

$$\Phi(x, \xi) = \Phi(x - \xi) \pm \Phi(x + \xi) \tag{5.13}$$

Замечание. Формула (5.9) справедлива и в общем случае уравнения (4.4), когда перед производной стоит матрица P_0 вместо единичной ($\det P_0 \neq 0$) и когда обе матрицы P_0 и P_1 зависят от переменной x. Излагаемый здесь способ построения матрицанта и фундаментальной матрицы основан на методе Коши [9] и на его развитии, сделанном М. Г. Крейном применительно к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

6. Применим полученные формулы к решению поставленной выше задачи о линейном пластическом шарнире, приняв для определенности, что грани пластинки $x = a_0$, a_1 шарнирно оперты, причем

$$a_0 = 0,\ a_1 = a.$$

При использовании формулы (5.9) оказывается удобным оперировать не с компонентами матриц P, A, B, z, f, а с их блоками. Это частично связано с тем, что обычно краевые условия (4.5) задаются в разделенном (относительно краев) виде применительно к определенным совокупностям (блокам) $z^{\pm}(x)$ элементов вектор-функции $z(x) = \{z^+(x),\ z^-(x)\}$. Например, в случае разбираемой задачи, если к блоку $z^+(x)$ отнести u^s и $M_x{}^s$, а к блоку $z^-(x)$ отнести $\varphi_x{}^s$, $V_x{}^s$, то условия шарнирного опирания запишутся в виде

$$z^+(0) = 0,\quad z^+(a) = 0 \tag{6.1}$$

Представим матрицы в (4.4) — (4.7) в виде блоков

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & P^+ \\ P^- & 0 \end{Vmatrix},\quad P^+ = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 2\beta^2 & -1 \end{Vmatrix},\quad P^- = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^4 & 0 \end{Vmatrix} \tag{6.2}$$

$$f = \begin{Vmatrix} f^+ \\ f^- \end{Vmatrix},\quad f^+ = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix},\quad f^- = \begin{Vmatrix} 0 \\ -q^s - \beta^2 \sin\beta l \chi(x) \end{Vmatrix}$$

$$A = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{Vmatrix},\quad \gamma = 0$$

Блоки матрицы Грина $G(x, \xi)$ и базисной матрицы $\Psi(x)$ будем помечать верхними индексами, т. е. $G^{jk}(x, \xi)$, $\Psi^{jk}(x)$, $j, k = 0,1$. При этом на основании (4.8) и (6.2) будем иметь

$$z^+(x) = \begin{Vmatrix} u^s \\ M_x{}^s \end{Vmatrix} = \int_0^a G^{01}(x, \xi) f^-(\xi)\, d\xi \tag{6.3}$$

т. е. для решения разбираемой задачи понадобится только один блок матрицы Грина.

Матрица (5.2) на основании (6.2) в блочном виде запишется так:

$$M(\zeta) = \begin{Vmatrix} \zeta I & P^+ \\ P^- & \zeta I \end{Vmatrix} \tag{6.4}$$

Блоки ее обратной матрицы (5.4) обозначим M_{-1}^{jk}. Их находить удобно из четырех уравнений, получаемых из матричного равенства

$$\begin{Vmatrix} \zeta I & P^+ \\ P^- & \zeta I \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} M_{-1}{}^{00} & M_{-1}{}^{01} \\ M_{-1}{}^{10} & M_{-1}{}^{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix}$$

В результате получаем

$$(6.5)\qquad Q_n(\zeta) = (\zeta^2 - \beta^2)^2, \quad \Delta^*(\zeta) = \sum_{j=0}^{3} \zeta^j \Delta_j$$

$$\Delta_0 = \begin{Vmatrix} 0 & S^+ \\ S^- & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Delta_1 = -\begin{Vmatrix} R^+ & 0 \\ 0 & R^- \end{Vmatrix}, \quad \Delta_2 = -\begin{Vmatrix} 0 & P^+ \\ P^- & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\Delta_3 = I, \quad R^+ = \begin{Vmatrix} 2\beta^2 & 1 \\ -\beta^4 & 0 \end{Vmatrix}, \quad R^- = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^4 & 2\beta^2 \end{Vmatrix}$$

$$S^+ = R^+P^+ = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ \beta^4 & 0 \end{Vmatrix}, \quad S^- = R^-P^- = \begin{Vmatrix} -\beta^4 & 0 \\ -2\beta^6 & -\beta^4 \end{Vmatrix}$$

Формула (5.7) для матриканта на основании (6.5) приводится к виду

$$(6.6)\qquad Z(x) = \sum_{j=0}^{3} \Delta_j u^{(j)}(x), \quad u(x) = \frac{\beta x \operatorname{ch} \beta x - \operatorname{sh} \beta x}{2\beta^3}, \quad u^{(j)} = \frac{d^j u}{dx^j}$$

а формула (5.12) после вычисления вычетов приобретает вид

$$(6.7)\qquad \Phi(y) = \sum_{j=0}^{3} \Delta_j \varphi^{(j)}(y), \quad \varphi(y) = \frac{e^{-\beta|y|}(1 + \beta|y|)}{4\beta^3}$$

Для построения базисной матрицы запишем краевые условия (4.7) по блокам

$$(6.8)\qquad \Psi^{00}(0) = \Psi^{01}(a) = I, \quad \Psi^{01}(0) = \Psi^{00}(a) = 0$$

Первое и третье равенства в силу (5.1) будут выполнены, если в (5.8) положить

$$(6.9)\qquad C = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ C^{10} & C^{11} \end{Vmatrix}$$

Реализация же оставшихся двух приводит к формулам

$$(6.10)\qquad C^{11} = [Z^{01}(a)]^{-1} = N, \; C^{10} = -NZ^{00}(a) = -N'$$

Принимая во внимание (6.6), находим ($\rho = a\beta$)

$$(6.11)\qquad N = \frac{1}{2\beta \operatorname{sh}^2 \rho} \begin{Vmatrix} \beta^2(\rho \operatorname{ch} \rho + \operatorname{sh} \rho) & \rho \operatorname{ch} \rho - \operatorname{sh} \rho \\ \beta^4(3 \operatorname{sh} \rho + \rho \operatorname{ch} \rho) & \beta^2(\rho \operatorname{ch} \rho + \operatorname{sh} \rho) \end{Vmatrix}$$

$$N' = \frac{1}{4\beta \operatorname{sh}^2 \rho} \begin{Vmatrix} \beta^2(2\rho + \operatorname{sh} 2\rho) & 2\rho - \operatorname{sh} 2\rho \\ \beta^4(3 \operatorname{sh} 2\rho + 2\rho) & \beta^2(2\rho + \operatorname{sh} 2\rho) \end{Vmatrix}$$

Таким образом, искомая базисная функция на основании (5.8) и (6.9) — (6.11) определяется формулой

$$(6.12)\qquad \Psi(x) = \sum_{j=0}^{3} u^{(j)}(x) \Delta_j \begin{Vmatrix} I & 0 \\ -N' & N \end{Vmatrix}$$

Беря второе выражение из (5.13) и используя (6.7) и (6.12), по формуле (5.9) получим матрицу Грина, нужный блок которой имеет вид

$$G^{01}(x,\xi)=[\varphi(x-\xi)-\varphi(x+\xi)]\,S^{+}-[\varphi^{(2)}(x-\xi)-\varphi^{(2)}(x+\xi)]\times \tag{6.13}$$
$$\times P^{+}-\frac{u(x)}{2\beta^{3}e^{\rho}}[\operatorname{sh}\beta\xi S^{+}NE^{+}+(\rho\operatorname{sh}\beta\xi-\beta\xi\operatorname{ch}\beta\xi)S^{+}NE^{-}]+$$
$$+\frac{u^{(2)}(x)}{2\beta^{3}e^{\rho}}[\operatorname{sh}\beta\xi P^{+}NE^{+}+(\rho\operatorname{sh}\beta\xi-\beta\xi\operatorname{ch}\beta\xi)P^{+}NE^{-}]$$
$$(\beta a=\rho,\ E^{\mp}=S^{+}\mp\beta^{2}P^{+})$$

Помечая компоненты полученного блока нижними индексами, на основании (6.3), (6.2) и (6.5), (6.11) будем иметь

$$u^{s}(x)=-\int_{c_0}^{c_1}G_{01}{}^{01}(x,\xi)\beta^{2}\sin\beta l\chi(\xi)\,d\xi-\int_{0}^{a}G_{01}{}^{01}(x,\xi)\,q^{s}(\xi)\,d\xi \tag{6.14}$$
$$G_{01}{}^{01}(x,\xi)=\varphi(x+\xi)-\varphi(x-\xi)-k(x,\xi,\beta)$$
$$k(x,\xi,\beta)=[2\beta^{3}e^{\rho}\operatorname{sh}\rho]^{-1}[\beta x\operatorname{ch}\beta x\operatorname{sh}\beta\xi+\beta\xi\operatorname{sh}\beta x\operatorname{ch}\beta\xi-$$
$$-\operatorname{sh}\beta x\operatorname{sh}\beta\xi\,(1+\rho\,e^{\rho}\operatorname{cosech}\rho)]$$

Отсюда, пользуясь формулой обращения для конечного синус-преобразования, найдем прогиб пластинки и изгибающий момент. Последующая реализация условия (4.1) после некоторых преобразований приводит к следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$\frac{3}{4\pi}\frac{d^{2}}{dx^{2}}\int_{c_0}^{c_1}\ln\operatorname{cth}\frac{\pi}{2b}|x-\xi|\,\chi(\xi)\,d\xi+ \tag{6.15}$$
$$+\int_{c_0}^{c_1}K_{p}(x,\xi)\,\chi(\xi)\,d\xi=M_{p}-Q(x)\quad(c_0\leqslant x\leqslant c_1)$$

Регулярная часть ядра $K_p(x,\xi)$ и функция $Q(x)$ определяются формулами

$$K_{p}(x,\xi)=\frac{1}{4b}\frac{d^{2}}{dx^{2}}\frac{x-\xi}{\sin\pi b^{-1}(x-\xi)}+K_{4}\left(x,\xi,\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right)$$
$$Q(x)=\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\left[S_{2}\left(x-\xi,\frac{b}{2},\eta\right)+K_{2}\left(x,\xi,\frac{b}{2},\eta\right)\right]q(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$
$$\begin{Bmatrix}K_{j}(x,\xi,y,\eta)\\ S_{j}(X,y,\eta)\end{Bmatrix}=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}k(x,\xi,\beta)-\varphi(x+\xi)\\ \varphi(X)\end{Bmatrix}\beta^{j}\sin\beta y\sin\beta\eta$$
$$(\beta=n\pi b^{-1},\ j=0,1\ldots)$$

Найдя решение (приближенное) полученного уравнения, например, методом ортогональных многочленов с использованием разложения [10]

$$\ln\operatorname{cth}|y|=\ln\frac{1}{|y|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}(2^{2k-1}-1)\,2^{2k}}{k\,(2k)!}y^{2k}$$

и спектрального соотношения [11]

$$\frac{1}{\pi}\frac{d^{2}}{dx^{2}}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-\xi|}\sqrt{1-\xi^{2}}\,U_{n}(\xi)\,d\xi=-(n+1)\,U_{n}(x)\quad(|x|\leqslant 1)$$

по формуле (6.14) получим трансформанту прогибов, а по ней — прогибы пластинки и расчетные усилия.

В заключение заметим, что можно рассмотреть более сложную задачу о крестообразном пластическом шарнире и свести ее к системе двух сингулярных интегральных уравнений, а также задачи при наличии аналогичных сквозных щелей и подкреплений из упругих узких балок. И вообще изложенный способ применим ко всем тем краевым задачам с разрезами и включениями, которые разрешимы методом интегральных преобразований при удалении указанных дефектов. Важно только, чтобы разрезы и включения вписывались в соответствующую координатную сетку.

Поступила 8 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Серебряный Р. В.* Расчет тонких шарнирно соединенных плит на упругом основании. М., Госстройиздат, 1962.
2. *Sneddon I. N., Lowengrub M.* Crack problems in the classical theory of elasticity. N. Y. Wiley, 1969.
3. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Гостехиздат, 1953.
9. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
11. *Попов Г. Я.* Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. Укр. матем. ж., 1968, т. 20, № 4.