

**О НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

**В. М. Александров, В. Г. Буряк**

(Ростов-на-Дону, Ворошиловград)

Рассматриваются вертикальные, горизонтальные и угловые колебания жесткого штампа, лежащего на упругой изотропной полуплоскости, под действием нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону. Задачи формулируются таким образом, что одна из компонент напряжения считается равной нулю на всей границе полуплоскости. Приводятся три метода исследования интегральных уравнений, к которым сводятся эти задачи для малых, средних и больших частот. Численное исследование задачи о вертикальных колебаниях показывает, что с достаточной для практики степенью точности происходит смыкание приближенных решений, полученных для малых, средних и больших значений относительной частоты.

Указанные задачи для малых частот изучались в работах [1-6], причем в работах [1, 2, 5, 6] не была учтена половина вычета в полусе Релея.

**1. Постановка задач.** Использование принципа предельного поглощения [7] приводит задачи о вертикальных (задача 1), горизонтальных (задача 2) и угловых (задача 3) колебаниях штампа к решению следующего интегрального уравнения:

$$(1.1) \quad \int_{-1}^1 q_\varepsilon(\xi) k_\varepsilon[\kappa(\xi - x)] d\xi = 2\pi\Delta\delta_\varepsilon(x), \quad |x| \leq 1, \quad \Delta = \frac{G}{a}$$

$$\kappa = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

$$q_\varepsilon(x) = q_{1\varepsilon}(x) + iq_{2\varepsilon}(x), \quad \delta_\varepsilon(x) = \delta_{1\varepsilon}(x) + i\delta_{2\varepsilon}(x)$$

(для задачи 3  $\delta_\varepsilon(x) = \theta_\varepsilon x$ ,  $\theta_\varepsilon = \theta_{1\varepsilon} + i\theta_{2\varepsilon}$  — амплитуда угла поворота штампа).

Здесь  $\sigma(x, t) = q_\varepsilon(x)e^{i\omega t}$  — неизвестная функция распределения контактных напряжений (нормальных для задач 1 и 3, касательных для задачи 2) под штампом,  $\delta_\varepsilon(x)e^{i\omega t}$  — величина перемещения штампа, вызываемого приложенной нагрузкой, причем  $\delta_\varepsilon(x) = \delta_0(x)e^{-i\varphi}$ , где  $\varphi$  — угол сдвига фаз между колебаниями штампа и возмущающей нагрузки,  $\delta_0(x)$  — модуль комплексной амплитуды колебания штампа,  $\rho, G$  — плотность и модуль сдвига упругой полуплоскости,  $2a$  — длина линии контакта. Ось  $x$  направлена по линии контакта, ось  $y$  перпендикулярна оси  $x$  (см. фиг. 1 работы [5]).

В дальнейшем для краткости, говоря о напряжениях, перемещениях, сдвиге фаз, подразумеваем их амплитудные значения. Истинные значения получаются умножением на  $e^{i\omega t}$ .

Ядро  $k_\varepsilon(x)$  уравнения (1.1) имеет вид

$$(1.2) \quad k_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(u) e^{-i|x|u} du$$

$$(1.3) \quad K_\varepsilon(u) = \frac{\sqrt{u^2 - (1 - i\varepsilon)l^2}}{4u^2 \sqrt{u^2 - (1 - i\varepsilon)b^2} \sqrt{u^2 - (1 - i\varepsilon)} - [2u^2 - (1 - i\varepsilon)]^2}$$

$$b^2 = 1/2 (1 - 2\nu) / (1 - \nu)$$

где  $l = b$  для задач 1 и 3 и  $l = 1$  для задачи 2,  $\varepsilon$  — коэффициент пропорциональности, характеризующий внутреннее трение,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Функция  $K_\varepsilon(u)$  — четная, имеющая на вещественной оси два полюса и две пары точек ветвления, симметрично расположенных относительно начала координат.

**2. Метод малых частот.** Для нахождения равномерного предела от функции  $\delta_\varepsilon(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  контур интегрирования в представлении (1.2) на основании результатов работы [8] деформируем таким образом, чтобы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  смещающиеся на вещественную ось полюсы и точки ветвления функции  $K_\varepsilon(u)$  не пересекали бы его. В результате уравнения (1.1), (1.2) примут вид

$$(2.1) \quad \int_{-1}^1 q(\xi) k[\kappa(\xi - x)] d\xi = 2\pi\Delta\delta(x) \quad (|x| \leq 1, \Delta = \frac{G}{a})$$

$$(2.2) \quad k(x) = \int_{\Gamma} K(u) e^{-i|x|u} du$$

$$q(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q_\varepsilon(\xi), \quad k(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_\varepsilon(x), \quad \delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x)$$

$$K(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(u), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Контур  $\Gamma$  в соотношении (2.2) совпадает с вещественной осью, отклоняясь от нее, лишь обходя все положительные особенности сверху, а отрицательные снизу.

Представим интеграл в уравнении (2.2) в виде

$$(2.3) \quad \int_{\Gamma} K(u) e^{-i|x|u} du = \int_{\Gamma} \left[ K(u) - \frac{A_0}{u^2 - c_0^2} \right] e^{-i|x|u} du + A_0 \int_{\Gamma} \frac{e^{-i|x|u} du}{u^2 - c_0^2}$$

Здесь  $A_0$  и  $c_0$  — постоянные, введенные в работе [5] формулой (1.3). Учитывая, что

$$\int_{\Gamma} \left[ K(u) - \frac{A_0}{u^2 - c_0^2} \right] e^{-i|x|u} du = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ K(u) - \frac{A_0}{u^2 - c_0^2} \right] e^{-i|x|u} du$$

и вычисляя второй интеграл в (2.3) с помощью теории вычетов, получим для ядра (2.2) следующее выражение:

$$(2.4) \quad k(x) = 2 \int_0^{\infty} \left[ K(u) - \frac{A_0}{u^2 - c_0^2} \right] \cos(xu) du - \frac{\pi i A_0}{c_0} e^{-i|x|c_0}$$

Здесь последнее слагаемое в правой части — половина вычета в полюсе Релея.

Представляя (2.4) в форме (1.3) работы [5] и применяя метод этой работы, получим асимптотические формулы (1.15) работы [5], в которых

$$(2.5) \quad \begin{aligned} A_1 &= D - \left( B + \frac{3}{2} E - E \ln \frac{2}{\kappa} \right) \kappa^2 + \left( -\frac{7}{2} C + \frac{103}{24} F + \right. \\ &+ \left. \frac{7}{2} F \ln \frac{2}{\kappa} - \frac{5BE}{12D} - \frac{5E^2}{8D} + \frac{5E^2}{12D} \ln \frac{2}{\kappa} \right) \kappa^4, \quad B_1 = \left( 2B + 3E - \right. \\ &- \left. 2E \ln \frac{2}{\kappa} \right) \kappa^2 + \left( 4C + \frac{7}{3} F - 4F \ln \frac{2}{\kappa} + \right. \\ &+ \left. \frac{4BE}{3D} + \frac{2E^2}{D} - \frac{4E^2}{3D} \ln \frac{2}{\kappa} \right) \kappa^4 \\ C_1 &= \left( 4C + \frac{25}{3} F - 4F \ln \frac{2}{\kappa} - \frac{2BE}{3D} - \frac{E^2}{D} + \frac{2E^2}{3D} \ln \frac{2}{\kappa} \right) \kappa^4 \\ A_2 &= -M\kappa^2 - \left( \frac{7}{2} N + \frac{5ME}{12D} \right) \kappa^4, \quad B_2 = 2M\kappa^2 + 4 \left( N + \frac{ME}{3D} \right) \kappa^4 \end{aligned}$$

Выражения для  $P_1, P_2, a_1, a_2, a_3$  остаются прежними.

Здесь для задач 1,3

$$(2.6) \quad \begin{aligned} A &= -0.08081, \quad D = 0.6999, \quad L = 1.09954 \\ B &= -0.2442, \quad E = -0.2575, \quad M = -0.4045 \\ C &= 0.03228, \quad F = 0.02190, \quad N = 0.03435 \end{aligned}$$

для задачи 2

$$(2.7) \quad \begin{aligned} A &= 0.2819, \quad D = 0.6999, \quad L = 1.09956 \\ B &= -0.1490, \quad E = -0.1325, \quad M = -0.2081 \\ C &= 0.01416, \quad F = 0.009403, \quad N = 0.01477 \end{aligned}$$

3. Метод средних частот. Запишем уравнения (1.1), (1.2) в форме

$$(3.1) \quad \int_{-1}^1 q_\varepsilon(\xi) k_\varepsilon[\kappa(\xi - x)] d\xi = \pi \Delta \delta_\varepsilon(x) \quad (|x| \leq 1, \quad \Delta = \frac{G}{a})$$

$$(3.2) \quad k_\varepsilon(x) = \int_0^\infty [K_{1\varepsilon}(u) + K_{2\varepsilon}(u)] \cos(xu) du$$

$$K_{1\varepsilon}(u) = 4u^2 (u^2 - \lambda^2)^{1/2} (u^2 - \lambda^2 b^2) / s_\varepsilon(u)$$

$$K_{2\varepsilon}(u) = 4 (u^2 - \lambda^2 b^2)^{1/2} (u^2 - \lambda^2 / 2)^2 / s_\varepsilon(u) \quad (\text{для задач 1, 3})$$

$$K_{1\varepsilon}(u) = 4 (u^2 - \lambda^2 b^2)^{1/2} (u^2 - \lambda^2) / s_\varepsilon(u)$$

$$K_{2\varepsilon}(u) = 4 (u^2 - \lambda^2)^{1/2} (u^2 - \lambda^2 / 2)^2 / s_\varepsilon(u) \quad (\text{для задачи 2})$$

$$s_\varepsilon(u) = 16 (1 - b^2) u^6 + 8\lambda^2 (3b^2 - 3) u^4 + 8\lambda^4 u^2 - \lambda^6, \quad \lambda^2 = 1 - i\varepsilon$$

Применив к уравнению (3.1) схему, использованную для уравнения (1.1) работы [9], получим следующее функциональное уравнение:

$$(3.3) \quad \Phi_n^+(\alpha) [K_{1\varepsilon}(\alpha) + K_{2\varepsilon}(\alpha)] = \frac{a_0 \Delta n! i^{n+1}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{n+1}} + E^-(\alpha), \quad a_0 = 4(1 - b^2)$$

В этом уравнении величины  $\Phi_n^+(\alpha)$  и  $E^-(\alpha)$  имеют тот же смысл, что и  $\Phi_n^+(\alpha)$ ,  $E^-(\alpha)$  в (2.9) работы [9].

Рассмотрим систему функциональных уравнений

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \Phi_{np}^{1+}(\alpha) K_{1\epsilon}(\alpha) &= \frac{a_0 \Delta n! i^{n+1}}{2 \sqrt{2\pi} \alpha^{n+1}} + \frac{1}{2} E_p^{1-}(\alpha) - \\ &- \Phi_{n,p-1}^{1+}(\alpha) K_{2\epsilon}(\alpha) + \frac{1}{2} E_{p-1}^{2-}(\alpha) \\ \Phi_{np}^{2+}(\alpha) K_{2\epsilon}(\alpha) &= \frac{a_0 \Delta n! i^{n+1}}{2 \sqrt{2\pi} \alpha^{n+1}} + \frac{1}{2} E_p^{2-}(\alpha) - \\ &- \Phi_{n,p-1}^{2+}(\alpha) K_{1\epsilon}(\alpha) + \frac{1}{2} E_{p-1}^{1-}(\alpha) \end{aligned}$$

Система (3.4), эквивалентная уравнению (3.3), решается методом последовательных приближений. Для нулевого приближения получаем

$$\Phi_{n0}^{j+}(\alpha) K_{j\epsilon}(\alpha) = \frac{a_0 \Delta n! i^{n+1}}{2 \sqrt{2\pi} \alpha^{n+1}} + \frac{1}{2} E_0^{j-}(\alpha), \quad j = 1, 2$$

$$K_{1\epsilon}(u) = \frac{\sqrt{u^2 - B_\epsilon^2} (u^2 - z_{1\epsilon}^2) (u^2 - z_{2\epsilon}^2)}{(u^2 - z_{3\epsilon}^2) (u^2 - z_{1\epsilon}'^2) (u^2 - z_{2\epsilon}'^2)}, \quad z_{2\epsilon} = i\gamma$$

$$K_{2\epsilon}(u) = \frac{\sqrt{u^2 - D_\epsilon^2} (u^2 - E_\epsilon^2)^2}{(u^2 - z_{3\epsilon}'^2) (u^2 - z_{1\epsilon}'^2) (u^2 - z_{2\epsilon}'^2)}, \quad E_\epsilon = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

( $B_\epsilon = \lambda$ ,  $z_{1\epsilon} = D_\epsilon = \lambda b$  для задач 1 и 3,  $B_\epsilon = \lambda b$ ,  $z_{1\epsilon} = D_\epsilon = \lambda$  для задачи 2;  $z_{1\epsilon}'$ ,  $z_{2\epsilon}'$ ,  $z_{3\epsilon}'$  — корни функции  $s_\epsilon(u)$ , лежащие в верхней полуплоскости).

Проделав все выкладки для уравнений (3.4), аналогичные тем, которые были сделаны для уравнения (2.9) работы [9], с учетом точной факторизации для  $K_{1\epsilon}(u)$  и  $K_{2\epsilon}(u)$  получим решение в виде

$$(3.5) \quad \Phi_{n0}^j(y) = \Delta \left[ c_{1,n}^j \Phi_{* \epsilon}^j(y) + \sum_{k=2}^j \frac{c_{k,n}^j}{(k-2)!} \int_0^y (y-u)^{k-2} \Phi_{* \epsilon}^j(u) du \right]$$

$$c_{n+1,n}^1 = \frac{n!}{\sqrt{A_{1\epsilon}}}, \quad c_{n+1,n}^2 = \frac{n!}{\sqrt{A_{2\epsilon}}}, \quad \Phi_{* \epsilon}^1(y) = -i A_{1\epsilon}^{-1/2} \times$$

$$\times \operatorname{erf} \sqrt{-i B_\epsilon y} + (\pi y)^{-1/2} e^{i B_\epsilon y} + r_{1\epsilon} e^{i z_{1\epsilon} y} \operatorname{erf} \sqrt{i (z_{1\epsilon} - B_\epsilon) y} -$$

$$- r_{2\epsilon} e^{i z_{2\epsilon} y} \operatorname{erf} \sqrt{i (z_{2\epsilon} - B_\epsilon) y}$$

$$\Phi_{* \epsilon}^2(y) = -i A_{2\epsilon}^{-1/2} \operatorname{erf} \sqrt{-i D_\epsilon y} + r_{3\epsilon} e^{i D_\epsilon y} +$$

$$+ r_{4\epsilon} e^{i E_\epsilon y} \operatorname{erf} \sqrt{i (E_\epsilon - D_\epsilon) y}$$

$$r_{j\epsilon} = i \frac{(z_{j\epsilon} - z_{1\epsilon}') (z_{j\epsilon} - z_{2\epsilon}') (z_{j\epsilon} - z_{3\epsilon}')}{z_{j\epsilon} (z_{1\epsilon} - z_{2\epsilon}) \sqrt{B_\epsilon + i z_{j\epsilon}}}, \quad j = 1, 2$$

$$r_{3\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \left[ 1 - i \frac{A_{4\epsilon}}{(E_\epsilon - D_\epsilon) y} \left( 1 - \frac{z_{3\epsilon}'}{E_\epsilon} \right) \right]$$

$$r_{4\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{i (E_\epsilon - D_\epsilon)}} \left\{ A_{3\epsilon} \left( 1 - \frac{z_{3\epsilon}'}{E_\epsilon} \right) + \right.$$

$$\left. + A_{4\epsilon} \left[ y \left( 1 - \frac{z_{3\epsilon}'}{E_\epsilon} \right) + \frac{z_{3\epsilon}' (3E_\epsilon - 2D_\epsilon) - E_\epsilon^2}{2i E_\epsilon^2 (E_\epsilon - D_\epsilon)} \right] \right\}$$

$$A_{1\varepsilon} = -\frac{iB_\varepsilon z_{1\varepsilon}^2 z_{2\varepsilon}^2}{z_{1\varepsilon} z_{2\varepsilon} z_{3\varepsilon}}, \quad A_{2\varepsilon} = -\frac{iD_\varepsilon E_\varepsilon^4}{z_{1\varepsilon} z_{2\varepsilon} z_{3\varepsilon}}$$

$$A_{3\varepsilon} = i(2E_\varepsilon - z'_{1\varepsilon} - z'_{2\varepsilon}), \quad A_{4\varepsilon} = -(E_\varepsilon - z'_{1\varepsilon})(E_\varepsilon - z'_{2\varepsilon})$$

Здесь  $\operatorname{erf} x$  — интеграл вероятности.

Общее решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{j\varepsilon}(\xi) k_{j\varepsilon}[\kappa(\xi - x)] d\xi = \pi \Delta \delta_\varepsilon(x), \quad |x| < \infty$$

$$k_{j\varepsilon}(x) = \int_0^{\infty} K_{j\varepsilon}(u) \cos(xu) du, \quad j = 1, 2$$

может быть получено по формулам (2.31) — (2.34) работы [9] и имеет вид

$$v_{j\varepsilon}(x) = \kappa \Delta a_0 \left[ \frac{\delta_\varepsilon(x)}{A_{j\varepsilon}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\kappa^{2m}} B_{jm} \delta^{(2m)}(x) \right]$$

Приближенное решение уравнения (1.1) будем по опыту работ [9-12] строить в форме

$$(3.6) \quad q(x) = \lim_{\varepsilon, \gamma \rightarrow 0} \sum_{j=1}^2 \Phi_{n_0}^j[\kappa(1+x)] \Phi_{n_0}^j[\kappa(1-x)] / v_{j\varepsilon}(x), \quad j = 1, 2$$

Заметим, что с учетом факторизации

$$K_{j\varepsilon}(\alpha) = K_{j\varepsilon}^+(\alpha) K_{j\varepsilon}^-(\alpha) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow -1$$

Построение следующих приближений системы (3.4) сопряжено с трудностями вычисления интегралов вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \left\{ \frac{a_0 \Delta n! i^{n+1}}{2 \sqrt{2\pi} \zeta^{n+1}} [K_{1\varepsilon}^-(\zeta)]^{-1} - \Phi_{n,p-1}^{1+}(\zeta) K_{2\varepsilon}(\zeta) [K_{1\varepsilon}^-(\zeta)]^{-1} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha}$$

Однако, как будет показано ниже, с хорошей для практики степенью точности оказывается достаточным нахождение только  $\Phi_{n_0}^{j+}$ .

Построив теперь указанным выше образом приближенные решения  $q_0(x)$  и  $q_1(x)$  уравнения (1.1) для средних  $\kappa$  в форме (3.6) соответственно для случаев  $\delta(x) = \delta$  (плоский штамп)  $\delta(x) = \theta x$  (наклонный штамп), можем далее получить силу и момент для любого неплоского штампа по формулам работы [13]

$$(3.7) \quad P = \int_{-1}^1 \delta(x) q_0(x) dx = P_1 + iP_2, \quad M = \int_{-1}^1 \delta(x) q_1(x) dx = M_1 + iM_2$$

4. Метод больших частот. Запишем ядро (2.2) интегрального уравнения (2.1) в другой форме

$$(4.1) \quad k(x) = \int_{\Gamma} K(u) e^{-i\kappa|x|u} du$$

Можно показать, что для  $\kappa \gg 1$  ядро  $k(x)$  представимо в форме

$$(4.2) \quad k(x) \approx -2\pi i [b_1 \delta^\circ(x) / \kappa + b_2 e^{-i\kappa \theta |x|}]$$

$$b_1 = i \lim_{u \rightarrow 0} K(u), \quad b_2 = \lim_{u \rightarrow c_0} (u - c_0) K(u)$$

Здесь  $\delta^\circ(x)$  — дельта-функция,  $c_0$  — положительный полюс функции  $K(u)$ , лежащий на вещественной оси;  $b_1 = b$  для задач 1, 3 и  $b_1 = 1$  для задачи 2.

Подставив (4.2) в уравнение (2.1), получим

$$(4.3) \quad q(x) + \frac{b_2 \kappa}{b_1} \int_{-1}^1 e^{-i c_0 \kappa |\xi - x|} q(\xi) d\xi = b_3 \delta(x), \quad b_3 = \frac{i \kappa \Delta}{b_1}$$

Применяя для решения уравнения (4.3) символический метод, предложенный в работе [14], получим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$(4.4) \quad q''(x) - \lambda_1^2 q(x) = b_3 [\delta''(x) + c_0 \kappa^2 \delta(x)], \quad \lambda_1 = \kappa [c_0 (2ib_2 / b_1 - c_0)]^{1/2} *$$

Аппроксимируя функцию  $\delta(x)$  полиномом, найдем решение уравнения (4.4) в виде

$$(4.5) \quad q(x) = q_0^*(x) + q_1^*(x), \quad q_0^*(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{-\lambda_1 x}$$

где  $q_1^*(x)$  — частное решение неоднородного уравнения (4.4). Произвольные постоянные в решении (4.5) определим, подставив его в уравнение (4.3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $e^{\lambda_1 x}$  и  $e^{-\lambda_1 x}$ .

5. Численное исследование задачи 1. Пусть  $\delta(x) = \delta = \text{const}$  ( $\delta = \delta_1 + i\delta_2$ ). Тогда по формуле (3.6) и первой формуле (3.7) найдем

$$(5.1) \quad q_0(x) = b_0 [iQ(x)Q(-x) + S(x)S(-x)]$$

$$Q(x) = [l_1 + l_2(1+x)] \operatorname{erf} \sqrt{i\kappa(1+x)} + d_1 [l_3 + l_4(1+x)] \times \\ \times [\kappa(1+x)]^{-1/2} e^{-i\kappa(1+x)} + l_5 e^{-i\kappa b(1+x)} \operatorname{erf} \sqrt{i\kappa(1-b)(1+x)}$$

$$S(x) = [l_3 + d_2(1+x)] [\kappa(1+x)]^{-1/2} e^{-i\kappa b(1+x)} + d_3 \operatorname{erf} \sqrt{i\kappa b(1+x)} + \\ + [d_4 + d_5(1+x)] e^{-i\kappa h_1(1+x)} \operatorname{erf} \sqrt{i\kappa(b-h_1)(1+x)}$$

$$(5.2) \quad P = P_1 + iP_2 = -\Delta \delta (1 - b^2)(J_1 + J_2)$$

Здесь

$$J_1 = (1 - c_0)^2 (1 + in_1)^2 e^{-2\kappa i} - im_1 n_2 [1 + im_2 b^{-1} + \\ + m_1 (\kappa - in_3)] e^{-2\kappa b i} + 4/3 ic_0^2 m_2^2 \kappa^3 + 4c_0 m_2 n_4 \kappa^2 + \{4m_2 c_0 [2 - \\ - c_0 + i(m_1 n_5 - m_2 n_6)] + 2ic_0^2 (1 - im_1 b^{-1})^2\} \kappa + \\ + m_2 (1 - c_0^2)(m_2 - 2i) + c_0 (2 - c_0) + 2m_1 (m_2 n_7 + in_8 + \\ + m_1 n_9)$$

$$J_2 = (b - c_0)^2 s_1^2 e^{-2\kappa b i} + 2i (h_1 - b)^{-1} \{4/3 s_2 m_4^2 \kappa^3 + 4m_4 (m_3 s_2 + \\ + m_4 h_1 h_2) \kappa^2 + 2 [s_2 s_3 + m_4 (2m_3 h_2 h_1^{-1} + m_4 h_3)] \kappa + 2m_3 s_2 + \\ + s_3 h_2 h_1^{-1} + m_4 (2m_3 h_3 + im_4 s_4)\} e^{-i\kappa/h_1} + 2ic_0^2 h_4 b^{-1} \kappa - \\ - ic_0 [is_5 h_4 - 4bc_0 (m_3 - is_3 h_1^{-1} - 6m_3 m_4 + 4im_4^2 h_1^{-1})] b^{-2}$$

$$b_0 = -0.7143\kappa, \quad l_1 = 0.7976 - 0.2133i, \quad l_2 = -0.5527i\kappa$$

$$l_3 = 0.5642, \quad l_4 = 0.3118i\kappa, \quad l_5 = 0.03252 + 0.1576i, \quad d_1 = \\ = 0.7071(1 - i)$$

$$d_2 = (-0.1282 + 0.3874i)\kappa, \quad d_3 = -0.5714(1 + i), \quad d_4 = \\ = 0.5243 + 0.2223i$$

$$d_5 = (0.1350 + 0.2685i)\kappa, \quad b = 0.5345, \quad c_0 = z_3' = 1.0783$$

$$h_1 = 0.7071$$

$$\begin{aligned}
z_1' &= 0.5211 + 0.05321i, z_2' = -0.5211 + 0.05321i, m_2 = ib^{-1}z_1'z_2' \\
m_1 &= -ib^{-1}(z_1' + b)(z_2' + b), m_3 = -i(z_1' + z_2' + h_1^{-1}), \\
m_4 &= -(z_1' + h_1)(z_2' + h_1) \\
h_2 &= -0.1315i, h_3 = -15.115, h_4 = (1 - im_3h_1^{-1} - 2m_4)^2 \\
n_1 &= m_1(1 - b)^{-1} + m_2, n_2 = 4.4466, n_3 = -2.6352 \\
n_4 &= c_0(i + m_1b^{-1}) + m_2(1 - 1/2c_0), n_5 = -1.9849, n_6 = \\
&= 0.002842 \\
n_7 &= -4.1474, n_8 = 2.2104, n_9 = 5.8752, s_2 = 0.1378 \\
s_1 &= b^{-1}[1 - im_3(h_1 - b)^{-1} - m_4(h_1 - b)^{-2}], s_3 = m_3^2 + \\
&+ 2m_4, s_4 = 96.4547, s_5 = -0.009224
\end{aligned}$$

При счете было принято  $\nu = 0.3$

Используя формулы (4.4), (4.5) и (3.7), для случая  $\delta(x) = \delta = \text{const}$  получим

$$(5.3) \quad q_0(x) = H[R^{-1} \text{ch}(\lambda_1 x) + T], P = 2H[(R\lambda_1)^{-1} \text{sh} \lambda_1 + T]$$

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{4c_0\kappa^2 b_2 \Delta \delta}{b(2b_2 + ic_0 b)}, R = (ic_0\kappa + \lambda_1)e^{\lambda_1} + \\
&+ (ic_0\kappa - \lambda_1)e^{-\lambda_1}, T = \frac{b}{4\kappa b_2}
\end{aligned}$$

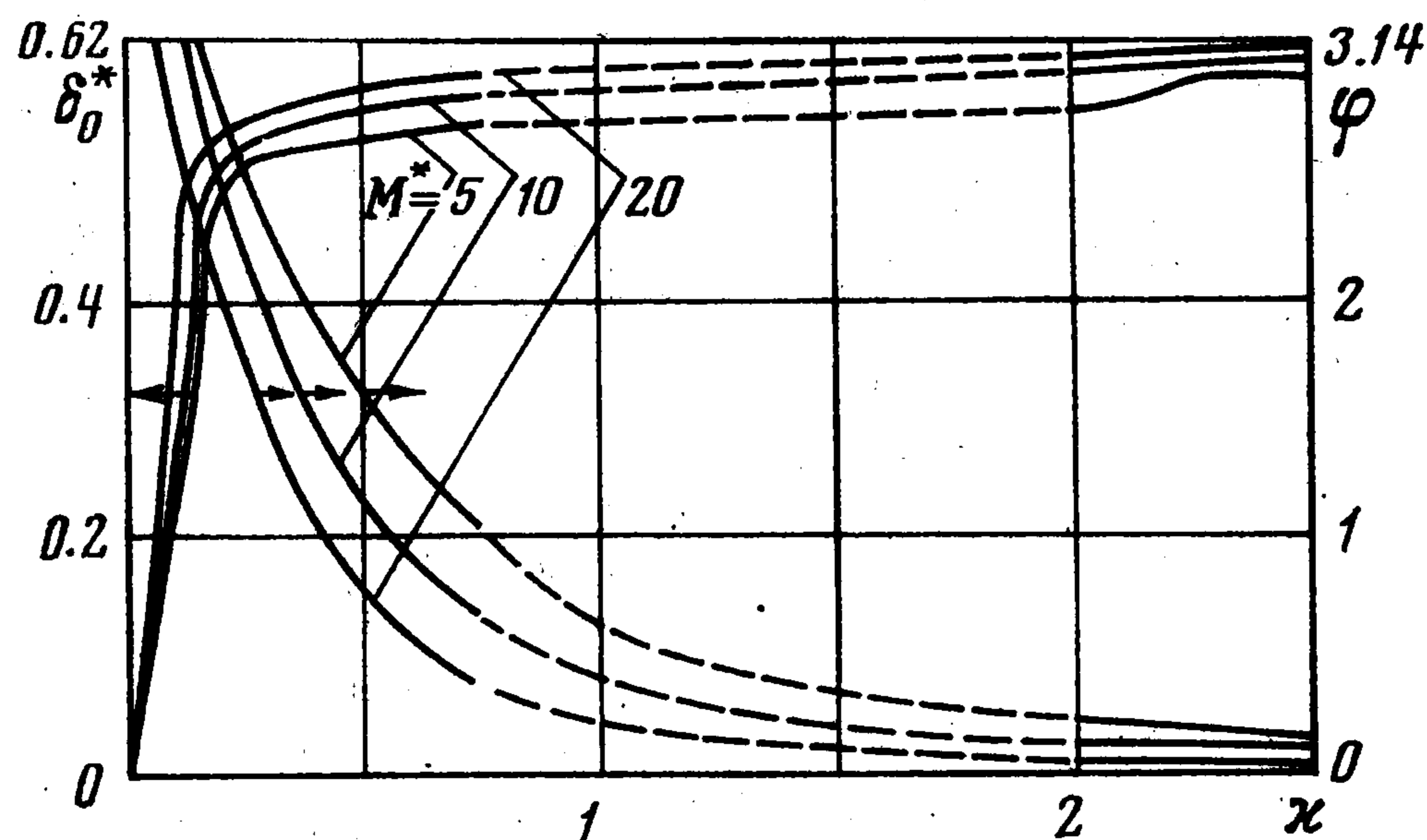
Здесь  $\lambda_1$  находится по второй формуле (4.4),  $b_2 = 0.1661$ .

Результаты вычисления величин  $P_1^* = P_1 / \Delta$ ,  $P_2^* = P_2 / \Delta$  по найденным асимптотическим формулам (2.5), (5.2) и второй формуле (5.3) при малых, средних и больших  $\kappa$  приведены в таблице ( $P_1^* = -\alpha\delta_1 - \beta\delta_2$ ,  $P_2^* = \beta\delta_1 - \alpha\delta_2$ ).

$\eta$	По (2.5)		По (5.2)		По (5.3)	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0.25	1.37	0.962	1.65	0.436	0.0194	0.812
0.50	1.55	1.44	1.98	1.01	0.120	1.45
0.75	1.66	1.74	2.37	1.78	0.324	1.99
1.00	1.52	1.77	2.72	2.80	0.636	2.49
1.25	0.964	1.48	2.91	4.05	1.06	2.99
1.50	0.329	1.17	2.82	5.43	1.56	3.54
1.75	-0.0863	0.972	2.40	6.79	2.12	4.18
2.00	-0.317	0.864	1.66	7.95	2.67	4.91
2.25	-0.444	0.800	0.707	8.67	3.17	5.72

На фигуре изображены зависимости  $\delta_0^*$  и  $\varphi$  от безразмерной частоты  $\kappa$  при разных значениях безразмерной массы  $M^*$ , найденные по формулам (2.4), работы [5]. Видно, что модуль комплексной амплитуды  $\delta_0^*$  уменьшается, а угол сдвига фаз  $\varphi$  увеличивается с ростом  $\kappa$  и  $M^*$ , что вполне соответствует физическому смыслу задачи.

Таким образом, вычисления показали, что с достаточной для практики степенью точности происходит смыкание приближенных решений для малых и средних частот в диапазоне  $0.5 \leq \kappa \leq 1$ , для средних и больших частот



в диапазоне  $1.5 \leq \kappa \leq 2.25$ . Это позволяет исследовать все основные характеристики задачи при любых значениях параметра  $\kappa$ .

Авторы благодарят В. А. Бабешко за полезные советы.

Поступила 8 X 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бородачев Н. М. Об определении напряжений под колеблющимся фундаментом. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1962, № 3.
2. Бородачев Н. М. Колебания штампа, лежащего на упругом полупространстве, под действием горизонтальной гармонической силы. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1963, № 9.
3. Сеймов В. М. Антисимметричные установившиеся колебания жесткой полосы на упругой полуплоскости. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 8.
4. Karasudhi P., Keer L. M., Lee S. L. Vibratory motion of a body on an elastic half plane. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 4. (Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1968, № 4.)
5. Буряк В. Г. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.
6. Буряк В. Г. Динамическая смешанная задача о сдвиге упругой полуплоскости. В сб.: Динамика и прочность сельскохозяйственных машин, вып. 4. Ростов-на-Дону, 1974.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
8. Бабешко В. А. Об условиях излучения для упругого слоя. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 3.
9. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР. Сер. механ., 1965, № 2.
10. Александров В. М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
11. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
12. Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
13. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
14. Забрейко П. П., Кошелев А. И. и др. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.