

К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ГЛИССИРОВАНИИ ПО ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

М. Н. Николаев

(Москва)

Приводятся полученные на основе теории Л. И. Седова [1, 2] результаты численного решения задачи о глиссировании плоского контура по взволнованной поверхности идеальной несжимаемой тяжелой жидкости бесконечной глубины. Определены силы, возникающие на контуре, и форма свободной поверхности жидкости. Согласно теории Л. И. Седова большие скорости движения соответствуют волнам большой длины. Следовательно, при незначительном опережении контуром заданных впереди него волн решение, имеющее место при каждом положении контура на профиле волны, будет слабо отличаться от стационарного. Численное решение плоской задачи о глиссировании по спокойной поверхности жидкости на основе метода Л. И. Седова дано в [3]. Часть результатов [3], касающихся возникающих на контуре гидродинамических сил, совпадает с результатами работы [4]. В области передней кромки определением брызговой струйки произведено уточнение решения, получаемого по рассматриваемой теории.

1. Рассмотрим слабоизогнутый плоский контур, скользящий по поверхности тяжелой несжимаемой идеальной жидкости бесконечной глубины и плотности ρ . Скорость c его поступательного движения горизонтальна и неизменна. Введем систему координат, связанную с контуром и показанную на фиг. 1. Проекцию контура на равновесный уровень жидкости обозначим $2a$. Угол наклона контура к оси Ox в любой его точке полагаем малым. Движение жидкости относительно контура считаем установившимся и потенциальным. В качестве характерных параметров задачи выберем скорость c и линейный размер a и введем безразмерные переменные по формулам

$$x' = ax, y' = ay, v' = cv, \varphi' = ac\varphi, v' = |\text{grad } \varphi'|$$

где φ — потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, v — величина абсолютной скорости движения. Задача сводится к отысканию характеристической функции течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $z = x + iy$, удовлетворяющей следующим условиям.

1°. При $y < 0$ вне окрестности точек $z = \pm 1$ производные d^2w/dz^2 и dw/dz ограничены и стремятся к нулю при $y \rightarrow -\infty$; производная dw/dz в точке $z = -1$ и функция w в точке $z = 1$ непрерывны.

2°. Впереди контура при $x \rightarrow +\infty$ могут быть установившиеся волны вида

$$w(z) = (A_1 + iA_2)e^{-ivz} + \text{const}, \quad v = ga/c^2$$

где g — ускорение свободного падения, A_1 и A_2 — произвольные, но достаточно малые постоянные. Назовем такие волны независимыми, подчеркнув этим, что их существование не зависит от движения контура. Для движения по спокойной поверхности жидкости $A_1 = A_2 = 0$.

3°. При $y = 0$ и $|x| < 1$ имеем условие обтекания

$$\partial\varphi / \partial y = -\beta(x)$$

4°. На свободной границе при $y = 0$ и $|x| > 1$ имеем условие постоянства давления

$$\partial\varphi / \partial x - \nu y = 0$$

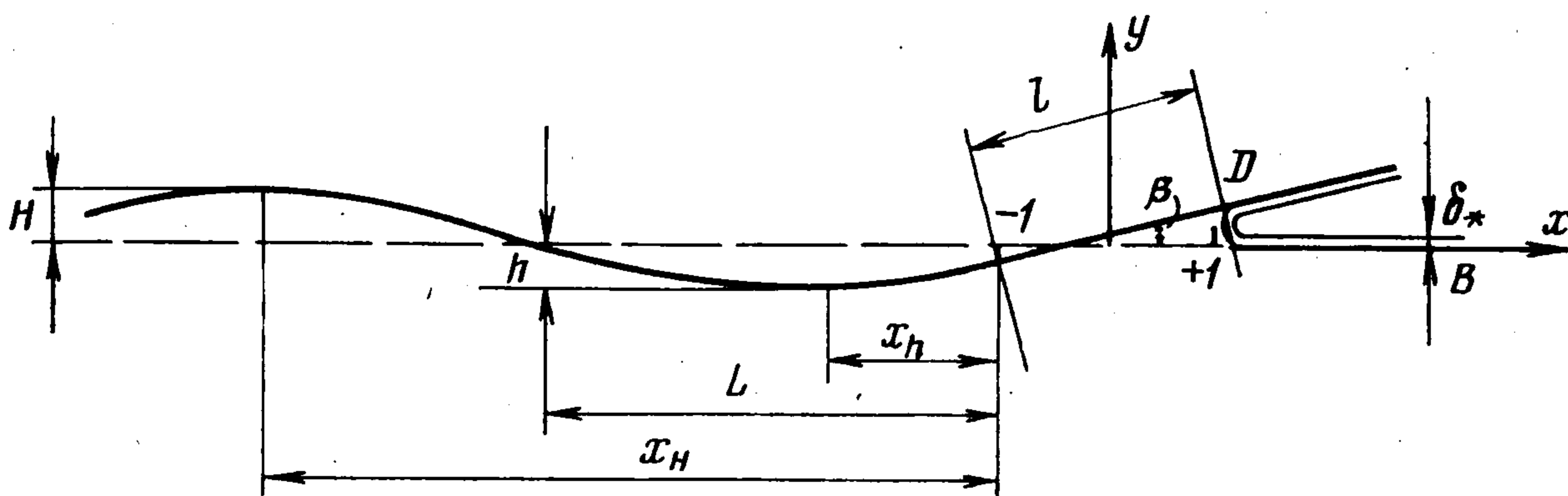
Метод, предложенный Л. И. Седовым, позволяет записать общее решение задачи в следующем виде:

$$(1.1) \quad w(z) = e^{-i\nu z} \left[A_1 + iA_2 + \int_{+\infty}^z \left(\frac{i\gamma_2}{\sqrt{z^2 - 1}} + \frac{df}{dz} \right) e^{i\nu z} dz \right]$$

$$\gamma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (-1)^n$$

$$(1.2) \quad f(z) = i \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - \sqrt{z^2 - 1})^n$$

Коэффициент γ_2 представляет циркуляцию вокруг эквивалентного крыла, которым заменяется глиссирующий контур, и выбирается из условия



Фиг. 1

Жуковского — Чаплыгина. В процессе решения должны быть определены вещественные коэффициенты a_n , которые удовлетворяют линейной системе алгебраических уравнений

$$(1.3) \quad (2k + 1) a_{2k+1} + \frac{2\nu}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{4(j+k+1)^2 - 1} - \frac{1}{4(j-k)^2 - 1} \right] a_{2j+1} + b_{2k+1}^* = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$2k a_{2k} + \frac{2\nu}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4(j+k)^2 - 1} - \frac{1}{4(j-k)^2 - 1} \right] a_{2j} + b_{2k}^* = 0$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Коэффициенты b_{2k+1}^* и b_{2k}^* этой системы линейно зависят от параметров ν , β , γ_2 , φ_1 и ψ_1 , где $\varphi_1 + i\psi_1 = w(+1)$.

2. Рассмотрим простейший вариант задачи, когда $\beta = \text{const}$, причем $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0$.

В работе [3] получена основная матрица системы (1.3), когда в численном расчете учитываются четыре коэффициента a_n .

Ввиду быстрого убывания коэффициентов a_n с ростом n отбрасывание всех последующих членов ряда (1.2) считаем обоснованным. Систему (1.3) можно записать в матричной форме $A\bar{a} = \bar{b}$. Здесь $A = \| a_{ik} \|$ — основная матрица четвертого порядка. Ее элементы определяются формулами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{8}{3} \frac{v}{\pi} + 1 - v^2(P_0 + P_1) - v(Q_0 + Q_1) + \frac{\pi}{2} v \\ a_{12} &= 2v^2(P_0 - P_2) + 2v(Q_0 - Q_1) - \pi v \\ a_{13} &= -3v^2(P_0 + P_3) - 3v(Q_0 + Q_3) + \frac{3}{2} \pi v - \frac{8}{15} \frac{v}{\pi} \\ a_{14} &= 4v^2(P_0 - P_4) + 4v(Q_0 - Q_4) - 2\pi v \\ a_{21} &= -\frac{16}{9} \frac{v}{\pi} + \frac{1}{2} v^2(P_0 + P_1), \quad a_{22} = \frac{256}{45} \frac{v}{\pi} - v^2(P_0 - P_2) + 2 \\ a_{23} &= -\frac{16}{3} \frac{v}{\pi} + \frac{3}{2} v^2(P_0 + P_3), \quad a_{24} = \frac{2048}{315} \frac{v}{\pi} - 2v^2(P_0 - P_4) \\ a_{31} &= -\frac{8}{15} \frac{v}{\pi}, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = \frac{72}{95} \frac{v}{\pi} + 3, \quad a_{34} = 0 \\ a_{41} &= -\frac{32}{225} \frac{v}{\pi}, \quad a_{42} = -\frac{512}{1575} \frac{v}{\pi}, \quad a_{43} = -\frac{96}{225} \frac{v}{\pi} \\ a_{44} &= \frac{4096}{1575} \frac{v}{\pi} + 4 \end{aligned}$$

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ — столбец из коэффициентов a_n , подлежащий определению; $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ — столбец, элементы которого определяются формулами

$$b_1 = \beta + \frac{5}{8} v^2 \beta, \quad b_2 = -\frac{1}{2} v^2 \beta, \quad b_3 = \frac{1}{8} v^2 \beta, \quad b_4 = 0$$

Учет независимой волны не изменяет основной матрицы A , а в правой части системы (1.3) добавки получают лишь первые два ее элемента

$$\begin{aligned} b_{1*} &= b_1 + [v(A_1 \cos v + A_2 \sin v) - v^2(A_2 \cos v - A_1 \sin v)] \\ b_{2*} &= b_2 + \frac{v^2}{2}(A_2 \cos v - A_1 \sin v) \end{aligned}$$

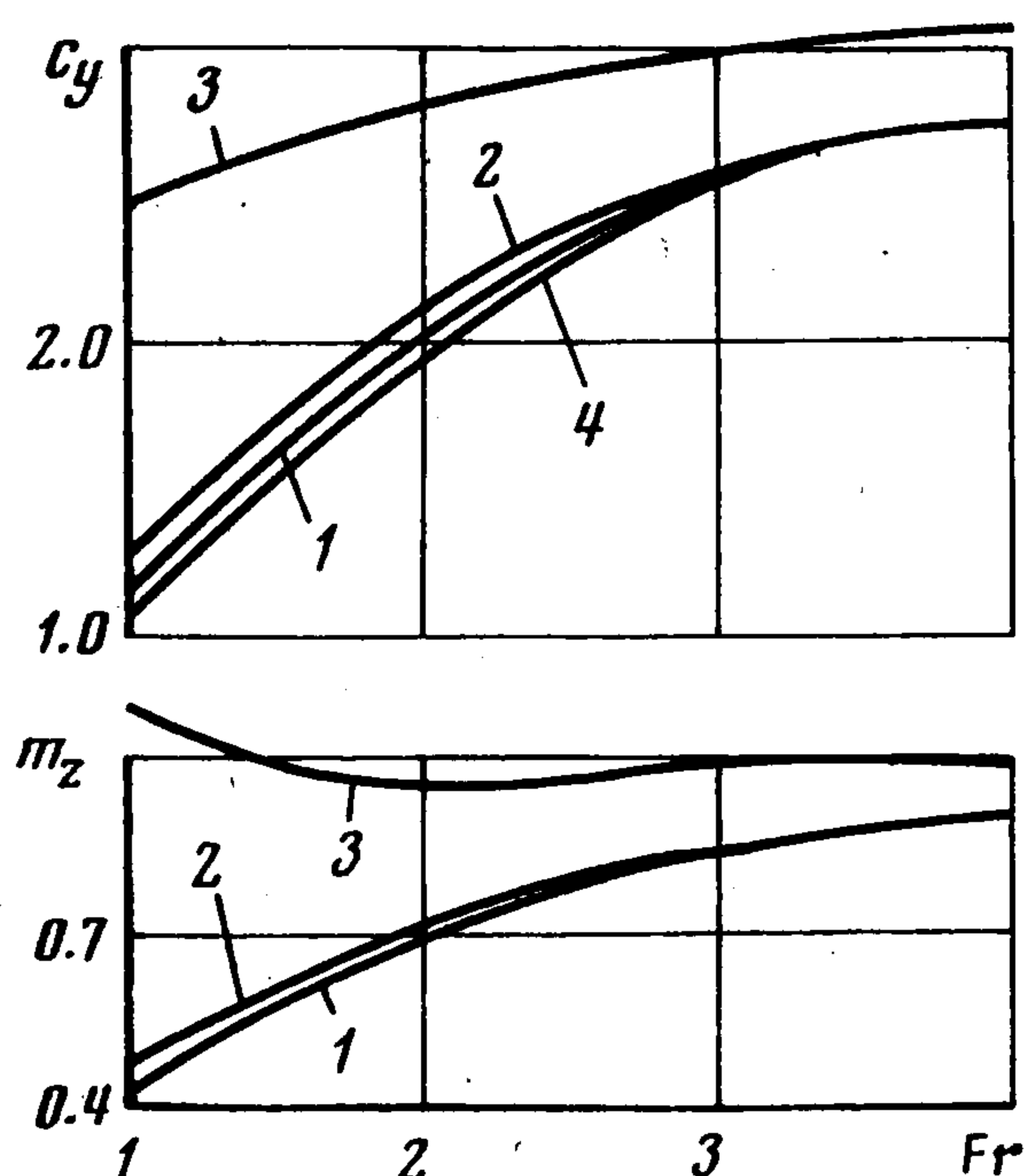
Здесь b_1 и b_2 — коэффициенты решения, в котором волна не учтена. Функции P_n, Q_n ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) для малых v определены в [3, 4] в виде рядов по v . Задаваемая точность позволяет в этих рядах учитывать ограниченное число членов. Выбор параметров A_1 и A_2 определяет как амплитуду $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ независимой волны, так и положение контура на ее профиле. На фиг. 2 даны примеры расчета по числу Фруда коэффициента подъемной силы и коэффициента момента для случая $A_1 = A_2$, когда контур находится на гребне волны

$$c_y = \frac{2Y}{\rho c^2 l \beta} = -\frac{\pi \gamma_2}{\beta}, \quad m_z = \frac{8M_z}{\rho c^2 l^2 \beta \pi} = \frac{a_1}{\beta}$$

Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям A/β , равным 0.5, 0.714 и 5.0. Кривая 4 соответствует расчету Ю. С. Чаплыгина ($A = 0$). Отличие приведенных на фиг. 2 характеристик от аналогичных им при $A = 0$ существенно лишь при умеренных и малых числах Фруда.

Расчетная формула для ординаты ζ свободной поверхности жидкости позади контура с учетом независимых волн записывается так (здесь $x = -\xi$):

$$\begin{aligned} \zeta = & A_1 \sin v\xi + A_2 \cos \xi v + \gamma_2 [P_0 \cos v(\xi + 1) - Q_0 \sin v(\xi + 1)] - \\ & - \sum_{n=1}^4 na_n [P_n \cos v(\xi + 1) - Q_n \sin v(\xi + 1)] + \\ & + \gamma_2 \left[\frac{\pi}{2} \sin v(\xi + 1) - \frac{\pi}{2} \sin v(1 - \xi) - \right. \\ & - v \int_{-1}^1 \arcsin t \cos v(\xi + t) dt \left. \right] - \sum_{n=1}^4 a_n \left[\cos v(1 + \xi) - \right. \\ & - \cos(\pi n - v + v\xi) + v \int_{-1}^1 \sin(vt + v\xi + n \arcsin \sqrt{1 - t^2}) dt \left. \right] + \\ & + \gamma_2 \left[\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} - \int_1^{\xi} \sqrt{t^2 - 1} \frac{vt \sin v(\xi - t) - \cos v(\xi - t)}{t^2} dt \right] - \\ & - \sum_{n=1}^4 a_n \left[(-1)^{n-1} (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^n + (-1)^n \cos v(\xi - 1) + \right. \\ & \left. + (-1)^n v \int_1^{\xi} (t - \sqrt{t^2 - 1})^n \sin v(\xi - t) dt \right] \end{aligned}$$

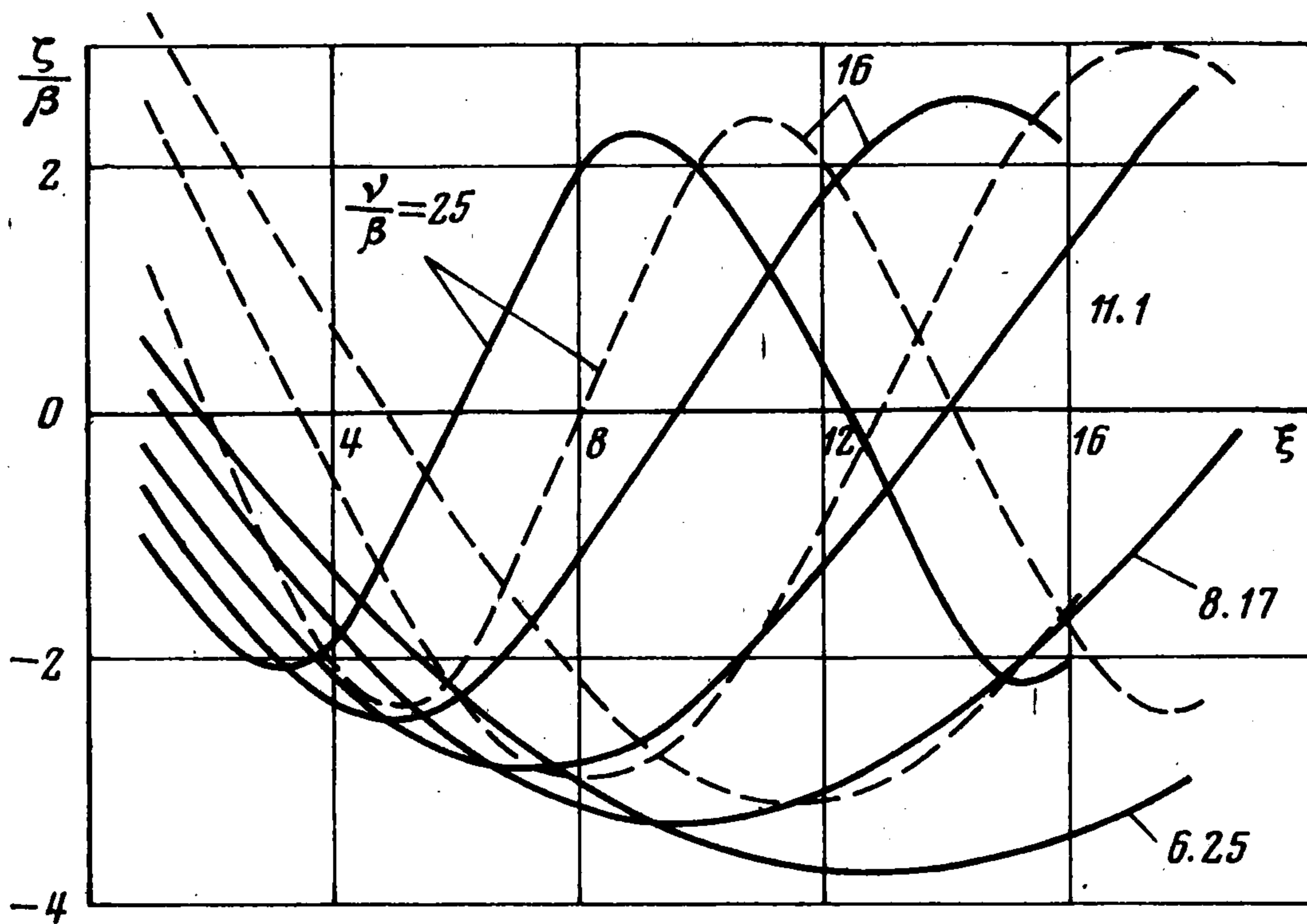


Фиг. 2

На фиг. 3 даны примеры расчета профилей волновой впадины позади контура. Сплошные линии соответствуют расчету при $A/\beta = 0.5$, штриховые — при $A/\beta = 5.0$; $\beta = 0.02$. Профили даны для разных чисел Фруда. Как и при $A = 0$, задняя кромка пластинки находится всегда выше наиболее глубокого места во впадине и ниже наиболее высокого места при последующем подъеме жидкости из впадины. Практически уже на расстоянии одной длины волны профиль поверхности жидкости позади контура представляет собой синусоидальную волну длины $2\pi/v$. Высота этой волны определяется непосредственным расчетом. Для количественной характеристики формы свободной поверхности жидкости позади контура удобно ввести ее размеры — продольные x_h , L , x_H и вертикальные h и H (см. фиг. 1). В рассматриваемом примере при увеличении A место

количественной характеристики формы свободной поверхности жидкости позади контура удобно ввести ее размеры — продольные x_h , L , x_H и вертикальные h и H (см. фиг. 1). В рассматриваемом примере при увеличении A место

наибольшего опускания жидкости во впадине отодвигается от контура. Первоначально это приводит к уменьшению глубины впадины. При дальнейшем увеличении параметра A обнаруживается, что чем ближе подошва



Фиг. 3

независимой волны оказывается к наиболее глубокому месту во впадине, тем глубже получается сама впадина. Такой резонанс независимой волны и впадины отчетливо заметен при $A / \beta = 5.0$, где впадина оказывается даже более глубокой, чем при $A = 0$. Однако следует отметить, что при слишком высокой волне результаты, получаемые на основе используемой теории, становятся менее точными. Изменение результатов расчета в зависимости от положения контура относительно профиля волны периодическое. Ниже рассматриваются все другие возможные положения контура относительно независимой волны, но в несколько иной интерпретации. Предполагая волну достаточно длинной по сравнению со смоченной длиной контура, можно рассматривать некоторое опережение контуром этой волны и проследить все возможные положения контура на ней.

3. Длинной волне соответствуют малые ν . Например, для $\nu < 0.5$, что соответствует числу Фруда (отнесенному к величине $l = 2a$) $Fr = (2\nu)^{-1/2}$, относительная длина волны будет $\lambda > 12.5$. Так как используется линейная теория, то можно представить движение контура по длинной волне с незначительным ее опережением в виде последовательности множества его положений относительно волны в стационарной задаче. Рассмотрим это квазистационарное движение на примере волны заданной амплитуды.

Общее решение с учетом независимых волн дает профиль свободной поверхности жидкости далеко перед контуром в виде

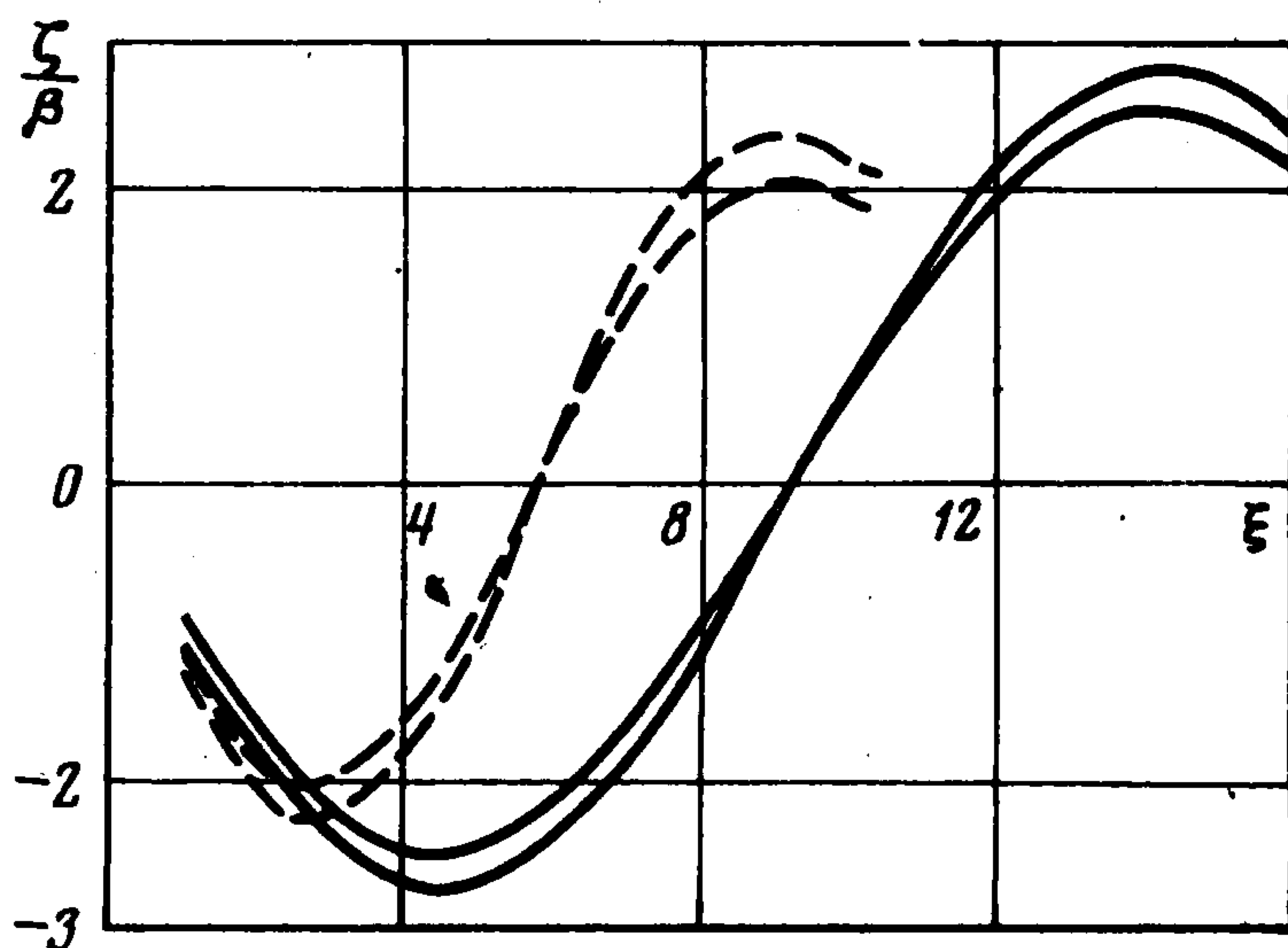
$$(3.1) \quad \psi(x, 0) = -A_1 \sin \nu x + A_2 \cos \nu x$$

Опережение контуром независимых волн можно описать при помощи некоторого дополнительного параметра μ и представить (3.1) следующим

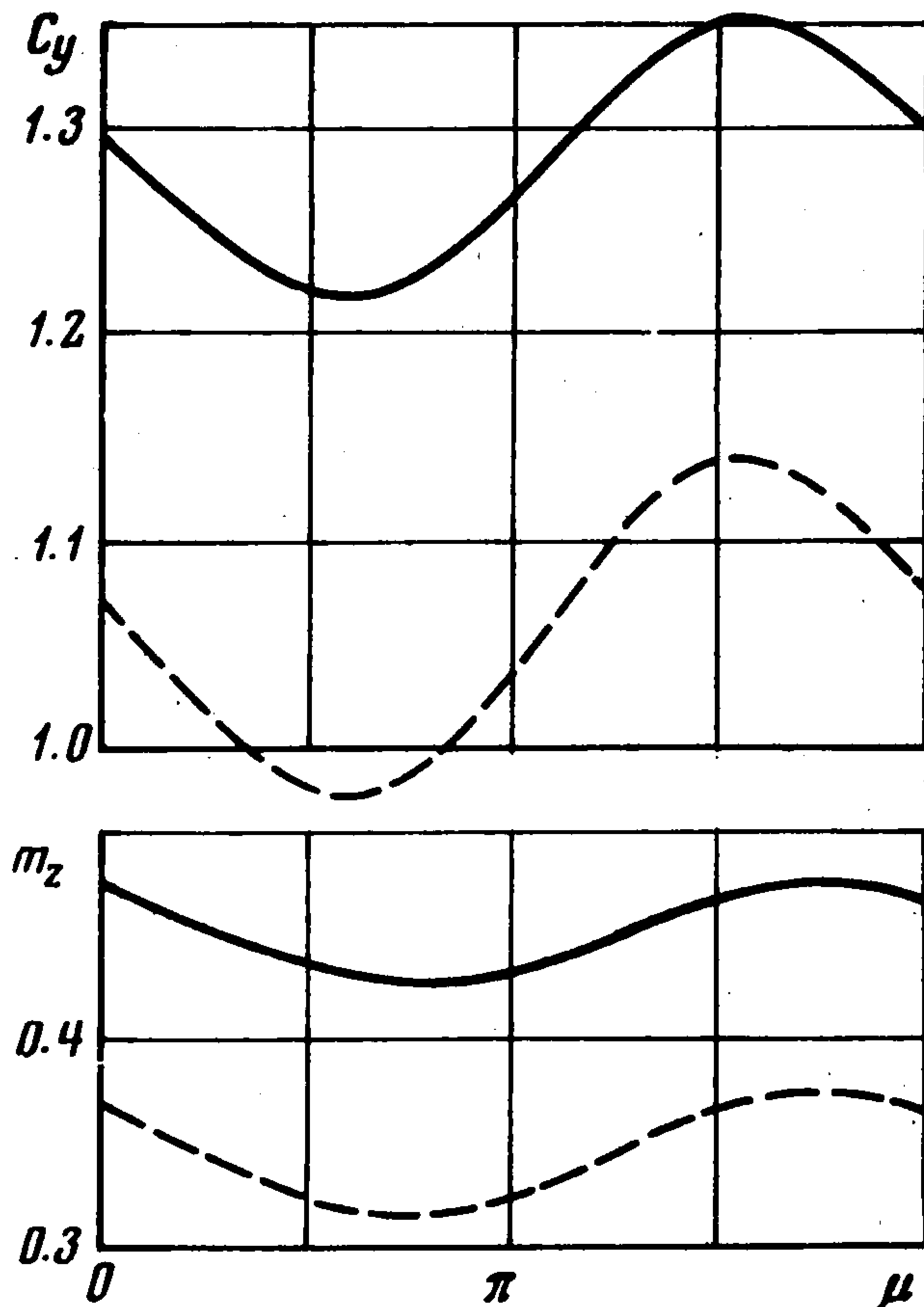
образом:

$$\begin{aligned} \psi_*(x, 0) &= -A_1^* \sin vx + A_2^* \cos vx \\ A_1^* &= A_1 \cos \mu - A_2 \sin \mu, \quad A_2^* = A_1 \sin \mu + A_2 \cos \mu \end{aligned}$$

Можно принять, что $\mu = Vt/a$, где V — скорость опережения, t — время. Тогда решение, соответствующее произвольному положению контура на волне заданной амплитуды, находится из стационарной задачи при разных A_1^* и A_2^* . Для этого достаточно значения μ брать из интервала $(0, 2\pi)$. На фиг. 4 даны примеры расчета профилей свободной поверхности, при которых волновая впадина за контуром получается наиболее и наименее глубокой. Глубина впадины может изменяться на величину $2A/\beta$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Наименьшая глубина впадины получается при $\mu = 0.715$, а наибольшая — при $\mu = 1.715$.

Этот результат имеет достаточно хорошее физическое обоснование. Так, при $\mu = 0.715$ в точке $x = -1$, определяющей заднюю кромку контура, функция, описывающая профиль волны, равна нулю, а ее производная положительна. Таким образом, в этом случае подъем жидкости в независимой волне в области задней кромки способствует уменьшению глубины впадины. Продольные характеристики свободной поверхности жидкости при этом не меняются.

По результатам, представленным на фиг. 5, можно заключить, что силы и момент, возникающие на контуре, меняются периодически. Расчет на фиг. 4 и 5 приведен для $A/\beta = 0.143$ (сплошными линиями при $v/\beta = 4.57$, штриховыми — при $v/\beta = 7.15$, $\beta = 0.07$).

4. Теория, положенная в основу расчета, не позволяет получить правильное решение в окрестности передней кромки. Как известно, это результат допущения о том, что скорость жидкости в окрестности передней кромки мала. Для указанной окрестности характерно наличие брызговой струйки аналогично бесконечной скорости у передней кромки тонкого крыла. Используемый ниже прием позволяет определить толщину брызго-

вой струйки, построить точную границу свободной поверхности на бесконечно далеком расстоянии перед контуром и уточнить ее в области основания струйки. Теория, аналогичная теории крыла, и теория струй для невесомой жидкости дают одинаковые результаты всюду, за исключением небольшой окрестности $\sim \beta^2$ передней кромки. Для невесомой жидкости струйка определена в [5]. Согласно [5] решение струйной задачи в области критической точки записывается так: $w_c = 4ci\sqrt{\delta z} / \pi$. С другой стороны, рассматриваемая теория для области передней кромки дает решение в таком виде: $w_a = id\sqrt{z}$, $d = \text{const}$. Условие плавного перехода главного потока в область брызговой струйки на расстоянии $\sim \beta^2$ от критической точки позволяет определить толщину струйки

$$(4.1) \quad \delta = \pi d^2 / 16c^2$$

Струйка определяется просто, если ввести так называемую эффективную смоченную длину l (см. фиг. 1), на которой сосредоточено практически все давление. Для малых углов хода справедлива формула $l = 4\delta / (\pi\beta^2)$. Из сказанного вытекает известный результат для невесомой жидкости: $\delta_* = \pi\beta^2/2$, где $\delta_* = \delta/2a$. Для весомой жидкости, как показал Л. И. Седов, аналогия между глиссированием и движением крыла также сохраняется всюду, кроме окрестности передней кромки. Полагая, что и для тяжелой жидкости справедлива формула вида (4.1), запишем $\delta_* = \pi d_0^2 / 4$ и определим постоянную d_0

$$\frac{dw}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{i\gamma_2}{\sqrt{z^2-1}} - i\gamma w \sim [2(z-1)]^{-1/2} i \sum_{n=1}^4 a_n n [(-1)^n - 1]$$

Отсюда $d_0 = -\sqrt{2}(a_1 + 3a_3)$, и толщина струйки в принятом приближении $\delta_* = 1/2 \pi (a_1 + 3a_3)^2$. При $\nu \rightarrow 0$ имеем $a_1 \rightarrow \beta$, $a_n (n = 2, 3, 4) \rightarrow 0$. Полученный результат позволяет уточнить течение в области передней кромки. По точной теории линии тока, которыми определяются ординаты свободной поверхности жидкости позади контура и перед ним, различаются на толщину струйки. Свободная граница жидкости позади контура определяется линией тока, идущей как у эквивалентного крыла, так и у глиссирующей пластинки, в критическую точку. Поскольку хорда крыла равна $l = 2a$, то при $\delta_* = 0$ граница свободной поверхности жидкости перед контуром описывается кривой BD (см. фиг. 1). При подходе к передней кромке эта кривая, как отмечено в [3], приближается к вертикали. Последнее вытекает из предположения, что в переднюю кромку можно попасть, двигаясь по свободной границе перед контуром непрерывным образом, что в действительности не так.

В заключение отметим, что изложенные результаты завершают численное исследование плоской задачи, начатое в работах [4] и [3] и полученное на основе аэродинамической аналогии. Приведенные результаты справедливы для прямолинейного контура. Установлено, что для сил, возникающих на контуре, влияние регулярного возмущения жидкости далеко перед контуром существенно только при умеренных и малых числах Фруда. При больших числах Фруда в принятой постановке имеет место длинная

волна, для которой получаемые результаты с известной точностью остаются верными и в случае незначительного опережения контуром заданных впереди него волн. Силы и момент, возникающие при этом на контуре, меняются периодически с периодом $2\pi c / (\nu V)$. Ординаты свободной поверхности жидкости определяются по принципу простой суперпозиции. Максимум изменения глубины волновой впадины за контуром и высоты первоначального подъема жидкости из впадины равен высоте набегающей волны. Продольные характеристики границы свободной поверхности жидкости при опережении контуром передних волн не изменяются. Для уточнения результатов, полученных по использованной теории, принято, что решение в области передней кромки контура имеет аналитический вид, аналогичный полученному в теории невесомой жидкости. Сращивание двух решений у основания струйки позволяет учесть весомость струйки и повысить точность результата, получаемого по использованной теории. Предельный переход к большим числам Фруда для толщины струйки дает известный результат для невесомой жидкости.

Поступила 21 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоская задача о глиссировании по поверхности тяжелой жидкости. Тр. конференции по теории волнового сопротивления. М., Изд. ЦАГИ, 1937.
2. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Гостехиздат, 1950.
3. *Николаев М. Н.* Форма свободной поверхности тяжелой жидкости при глиссировании пластинки бесконечного размаха. Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1548.
4. *Чаплыгин Ю. С.* Глиссирование плоской пластинки бесконечного размаха по поверхности тяжелой жидкости. Тр. ЦАГИ, 1940, вып. 508.
5. *Wagner H.* Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. ZAMM, 1932, Bd 12, H. 4.