Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 531/534

О ЕСТЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Л. И. Седов

(Москва)

Рассматриваются теоретические и экспериментальные подходы для описания механических и, вообще, физических явлений в сплошных средах в сопутствующей системе отсчета с использованием локальных неголономных базисных реперов собственных инерциальных систем отсчета. Такое естественное описание не зависит от свойств и состояний «посторонних» наблюдателей. При моделировании физического пространства и времени пространствами Минковского или Римана в общих случаях ускоренных движений континуумов, сопровождающихся деформацией для подвижной системы и для системы наблюдателя, указываются алгоритмы пересчета тензорных характеристик явлений, определенных в сопутствующей системе отсчета и в системах произвольно заданных наблюдателей.

Для научного описания механических и, вообще, физических объектов, сред, полей и явлений необходимо пользоваться теоретическими моделями. Математическое моделирование физического пространства и времени лежит в основе всякого теоретического осмысливания окружающего мира.

До сих пор главной особенностью обычных представлений о физическом пространстве и времени является представление о непрерывном четырехмерном континууме точек, которые можно задавать с помощью четырех вещественных чисел — координат, причем одна из этих координат имеет временную природу, что находит свое отражение в геометрических свойствах четырехмерного континуума.

Пусть x^1, x^2, x^3, x^4 — координаты точек и по определению x^4 — временная координата. При фиксированных x^1, x^2, x^3 и переменных x^4 получим мировую линию, которую можно рассматривать в четырехмерном пространстве как траекторию точки трехмерного пространства, индивидуализированной значениями координат x^1, x^2, x^3.

Рассмотрим функциональные соотношения

$$z^\alpha = \varphi^\alpha(x^\beta), \quad z^4 = f(x^\beta, x^4); \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \tag{1}$$

В координатной системе z^i ($i = 1, 2, 3, 4$) сохраняется определение индивидуальных точек трехмерного пространства и сохраняются мировые линии, меняются только численные значения координат — названия мировых линий и может меняться произвольно начало отсчета и масштаб временной координаты вдоль мировых линий.

Системы координат x^i и z^i можно рассматривать как координаты, отвечающие одному и тому же семейству мировых линий индивидуализированных точек, образующих идеальный объект-среду, представляющий собой трехмерную совокупность точек, занимающую в четырехмерном пространстве различные положения в зависимости от значения временной координаты x^4 или z^4.

Дальше латинские индексы изменяются от 1 до 4, греческие — от 1 до 3; в формулах везде производится суммирование — свертка по одинаковым ковариантным и контравариантным индексам.

Очевидно, что каждая выделенная система координат x^i вместе со всевозможными преобразованиями вида (1) определяет индивидуальные подвижные трехмерные пространства, которые в зависимости от определения координат x^α и их области изменения представляют собой подпространства всего четырехмерного пространства или некоторой его части.

Система индивидуализированных точек в различных координатных системах, подчиненных преобразованиям (1) по определению, называется системой отсчета.

Координаты x^α или z^α называются лагранжевыми координатами соответствующей системы отсчета. Системы координат $x^{i'}$ и z^i будем называть сопутствующими системами координат для системы отсчета с лагранжевыми координатами x^α или z^α. Таким образом, всякая система координат является сопутствующей для некоторой системы отсчета.

Очевидно, что для данной системы отсчета в сопутствующей системе координат с видоизменяющимися координатными линиями в зависимости от временной координаты индивидуальные точки покоятся, так как их трехмерные координаты x^α или z^α постоянны.

В данном четырехмерном пространстве можно рассматривать многочисленные различные системы отсчета.

Пусть имеются две различные системы отсчета N и M с соответствующими им сопутствующими координатными системами x^i и ξ^i и связанные между собой, вообще говоря, взаимооднозначными функциональными соотношениями общего вида

$$x^i = f^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \text{ или } \xi^i = \varphi^i(x^1, x^2, x^3, x^4) \tag{2}$$

В этом случае соотношения (2) определяют собой закон движения системы M относительно N или наоборот. По определению происходит движение системы индивидуальных точек в M с $\xi^\alpha = \text{const}$ относительно системы отсчета N (x^i) или, наоборот, системы индивидуальных точек в системе отсчета N с $x^\alpha = \text{const}$ относительно системы отсчета M (ξ^i).

Дальше для определенности условимся называть систему отсчета N с координатами x^i системой наблюдателя, а систему отсчета M с сопутствующими координатами ξ^i — подвижной системой. Системы мировых линий и координатные линии как в системе N, так и в системе M могут быть самого общего вида.

Для описания геометрических свойств пространства и характерных свойств движения (2) и других физических явлений вводятся различные характерные понятия скалярной, векторной и, вообще, тензорной природы, и, в частности, можно вводить известными путями ковариантные

$Э_i$ и контравариантные $Э^i$ векторы базисов $i = 1, 2, 3, 4$ для всякой системы координат.

Для сравнения характерных векторных и тензорных величин в разных точках пространства — времени вводятся с помощью далеко идущей специализации свойств пространства коэффициенты связности $\Gamma_{ij.}{}^{k}\,(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$, входящие в формулы

(3) $$\partial Э_i/\partial x^j = \Gamma_{ij.}{}^{k} Э_k$$

Дальнейшие пути физическо-геометрической конкретизации математической модели пространства и времени могут быть различными. Как известно, в ньютоновской механике в качестве модели физического пространства вводится трехмерное евклидово пространство, а время рассматривается как скаляр. В специальной теории относительности (СТО) постулируется, что моделью четырехмерного физического пространства — времени служит псевдоевклидово пространство, а в общей теории относительности (ОТО) и в многочисленных ее обобщениях принимается, что четырехмерное пространство — время риманово и что локально это пространство псевдоевклидово, так же как и в СТО.

Известны и другие многочисленные предложения трактовок моделей физического пространства.

Ниже рассмотрим только кинематические задачи и примем, что пространство — время образует риманово или псевдоевклидово пространство, в котором имеют место следующие соотношения.

Метрика имеет вид

(4) $$ds^2 = g_{ij}\,(x^k)\,dx^i dx^j$$

причем

$$\Gamma^k_{ij.} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

где ds — элемент длины элементарного вектора $d\mathbf{s} = dx^i Э_i$, а g_{ij}— компоненты метрического тензора. С помощью преобразования вида (1) с функцией f, определенной с точностью до аддитивной постоянной, в любой точке пространства $N\,(z_0{}^l)$ выражение для ds^2 можно привести к виду

(5) $$ds^2 = (dz^4)^2 - (dz^1)^2 - (dz^2)^2 - (dz^3)^2$$

Такое преобразование вида (1) как в ОТО, так и в СТО возможно только локально в точке $N\,(z_0{}^l)$.

С помощью любого преобразования Лоренца вида (2), представляющего собой линейное преобразование от z^i к y^i и содержащего в общем случае десять произвольных постоянных, формула (5) приводится к виду

(6) $$ds^2 = (dy^4)^2 - (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2, \quad \Gamma_{ij.}{}^{k}\,(y_0{}^l) = 0$$

С помощью общего преобразования вида (2) преобразование к виду (6) в СТО возможно глобально сразу во всех точках пространства. Как известно [1], в ОТО в общем случае равенство (6) можно осуществить сразу во всех точках любой кривой C с помощью преобразования координат общего вида (2). Соответствующие координаты определяются с точностью до любых лоренцевых преобразований, они связаны с видом кривой C и называются координатами Ферми. В этом случае линия C во всех своих точках может быть сопутствующей мировой линией в системе координат y^i только в том случае, когда эта линия C — геодезическая.

Если в различных системах координат x^i и $x'^i(x^k)$ компоненты метрического тензора одинаковы, т. е.

$$g_{ij}'(x'^k) = g_{ij}(x'^k) \tag{7}$$

то с точки зрения метрических свойств пространства Римана имеется симметрия относительно таких различных преобразований систем координат, которые могут образовывать конечную или бесконечную группу преобразований координат.

В общем случае пространства Римана несимметричны. Для несимметричных пространств Римана значения компонент метрического тензора, взятых во всех точках пространства, определяют полностью систему координат, которая, очевидно, имеет инвариантный геометрический смысл [2].

Из сказанного следует, что для несимметричных пространств Римана преобразование (2) или закон движения сопутствующей системы отсчета M с координатами ξ^i относительно системы наблюдателя N с координатами x^i можно найти из уравнений

$$g_{pq}'(\xi^l) = g_{ij}(x^k)\frac{\partial x^i}{\partial \xi^p}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^q} \tag{8}$$

если $g_{ij}(x^k)$ и $g_{pq}'(\xi^l)$ известны (например, из эксперимента). Очевидно, что для разрешимости задачи об интегрировании системы (8), состоящей из десяти уравнений в частных производных с четырьмя неизвестными функциями $x^i(\xi^k)$, функции $g_{ij}(x^k)$ и $g_{pq}'(\xi^l)$ должны удовлетворять соответствующим условиям совместимости. Совместность уравнений (8), в принципе, может служить проверкой пригодности моделирования пространства и времени метрикой вида (4).

С другой стороны, закон движения сплошной среды (2) и компоненты метрического тензора $g_{pq}'(\xi^l)$ и $g_{ij}(x)$ можно определять теоретически с помощью динамических уравнений или с помощью измерений в системе x^k сигналов, приносящих информацию о событиях в подвижной системе ξ^k. Последний путь принципиально не всегда возможен и связан с рядом искажений, вносимых, во-первых, особенностями и процессами в промежуточной среде, в которой распространяются сигналы, и, во-вторых, за счет различия в механическом и, вообще, физическом состоянии наблюдателя и подвижной среды. Примерами могут служить, с одной стороны, явления рассеяния, поглощения и отклонения электромагнитных или акустических возмущений в промежуточной среде, всякого рода «шумы», а с другой стороны,— явления, подобные эффекту Допплера и особенно релятивистские эффекты, связанные с различиями электромагнитных характеристик, различием в течение времени и в изменении геометрических размеров с точки зрения наблюдателя в системах наблюдателя и в подвижной системе.

Очевидно, что примеры перечисленных эффектов связаны существенным образом с выбором системы наблюдателя и отражают не только свойства и состояния явлений в подвижной системе, но и явления и состояния самого наблюдателя, что по своему существу, вообще говоря, несущественно с точки зрения физических законов, регулирующих явления, происходящие в подвижной системе.

В связи с этим можно высказать общее положение о том, что целесообразно осуществлять исследования и устанавливать основные физические соотношения путем измерений и построения теоретических моделей непосредственно в сопутствующей системе отсчета теоретическим или экспериментальным путем, а после этого пересчитывать и переформулировать полученные результаты на точку зрения заинтересованного наблюдателя. По существу, в простейших частных случаях, иногда не совсем в явной форме, так и поступают в физических теориях.

Дальше покажем, что по своему существу результаты, добытые в сопутствующей системе отсчета, независимые от состояния и движения случайных наблюдателей, имеют более простой вид, чем результаты, полученные после указанной выше переформулировки, которая может быть произведена с помощью дополнительных довольно сложных математических операций, составляющих содержание навигационных расчетов. Грубо говоря, суть дела можно иллюстрировать на примерах сравнения точки зрения Птоломея в системе земного наблюдателя с точкой зрения Коперника в системе, сопутствующей центру тяжести солнечной системы, или на примере рассмотрения движения спутников Юпитера относительно его центра, или на рассмотрении физических явлений в атомах, принадлежащих подвижным телам при использовании систем отсчета, связанных с ядром атома и т. д.

Ниже остановимся на методах экспериментального определения компонент метрического тензора в сопутствующей системе координат и на математических задачах навигации о пересчете данных опытов в сопутствующей системе отсчета на результаты измерений компонент метрических тензоров, которые получаются в опытах или в теории у заданного наблюдателя.

В каждой точке M на некоторой мировой линии C в соответствующей системе координат z^i, в которой выполняются соотношения (5), определяются координатные реперы $Э_i'$ единичных векторов. Если принять, что пространственные реперы $Э_1'$, $Э_2'$, $Э_3'$, перпендикулярные к четырехмерной скорости $\bar{u} = Э_4'$, не поворачиваются в трехмерном пространстве с координатами z^α при переходе из одной точки в соседнюю вдоль C, то такие реперы образуют подвижный векторный репер вдоль C, который называется репером Ферми — Уокера.

Из рассмотрения бесконечно малого преобразования Лоренца векторов репера Ферми — Уокера при переходе из точки M в бесконечно близкую точку легко вывести, что вдоль мировой линии в ее каждой точке M

имеют место векторные равенства

$$(9) \qquad dЭ_i' / ds = (a_l u_i - a_i u_l)\, Э'^l$$
$$(\mathbf{a} = d\mathbf{u}/ds = a^\alpha Э_\alpha')$$

где a — четырехмерное ускорение точки M.

Наряду с репером $Э_i'$ рассмотрим репер $Э_i^*$, для которого в каждой точке M верны равенства: $Э_i^* = Э_i'$, но $dЭ_i^* / ds = 0$ или

$$\mathbf{a}_1 = dЭ_4^* / ds = d\mathbf{u}^* / ds = 0$$

Репер $Э_i^*$ можно рассматривать как репер Ферми — Уокера для геодезической линии, проходящей через точку M данной мировой линии и касающейся ее в этой точке.

Векторному базису $Э_i^*$ в точке M соответствует локальная инерциальная система отсчета. В этой системе точка M^*, совпадающая с данной точкой M на рассматриваемой мировой линии, движется по геодезической без ускорения $\mathbf{a}_1^* = 0$, но ее четырехмерная скорость в рассматриваемый момент времени точно равна скорости точки M ($\mathbf{u}^* = u$). (Очевидно, что трехмерные скорости точек M и M^* относительно любых систем отсчета также одинаковы.)

Локальный базис $Э_i^*$ можно рассматривать в каждой точке сопутствующей системы отсчета как атрибут этой системы отсчета и как локальный инерциальный базис, определяющий свободно падающий поступательно векторный репер $Э_i^*$ в гравитационном поле. Локально определенная инерциальная система отсчета $Э_i^*$ называется собственной системой для рассматриваемой точки M (ξ^α, s) на мировой линии в сопутствующей системе.

Легко понять, что вектор трехмерного ускорения точек материальной среды $\mathbf{a}^*$, измеряемого весьма малым трехкомпонентным акселерометром, скрепленным неизменно с базисом $Э_1'$, $Э_2'$, $Э_3'$, равняется ускорению чувствительного элемента (например, ускорению маленького шарика с массой m) акселерометра относительно инерциального базиса $Э_i^*$. Это ускорение равно нулю при движении точки M по геодезической (свободное падение в гравитационном поле, отвечающее состоянию невесомости).

Здесь принято, что

$$\frac{d^2\mathbf{r}^*}{ds^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathbf{r}^*}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2}\mathbf{a}^*$$

где $d\mathbf{r}^*$ — элементарное перемещение точки M относительно базиса $Э_i^*$, c — «скорость света», а $d\tau$ — приращение собственного времени, одинаковое в базисах $Э_i'$ и $Э_i^*$ и совпадающее с приращением собственного времени вдоль рассматриваемой мировой линии, проходящей через рассматриваемую точку M ($d\mathbf{r}^* / d\tau = 0$, но $d^2\mathbf{r}^* / d\tau^2$, вообще говоря, отлично от нуля).

Сформулированный выше вывод вытекает непосредственно из равенства (см. [3])

$$(10) \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{1}{c^2}\mathbf{a}^*$$

В сопутствующей системе отсчета платформу, несущую акселерометры и отвечающую базисам $Э_\alpha{}^* = Э_\alpha{}'$ ($\alpha = 1, 2, 3$), сохраняющим неизменной свою пространственную ориентацию, можно осуществить с помощью трех свободно подвешенных в кардановом подвесе с некомпланарными осями гироскопов.

Обратимся теперь к описанию возможного способа определения компонент метрического тензора $g_{\hat{p}\hat{q}}(\xi^k)$ ($p, q = 1, 2, 3, 4$) в сопутствующей системе отсчета для материальной среды.

Очевидно, что, не ограничивая общности, с помощью преобразования вида (1) для любой системы отсчета можно ввести новые сопутствующие координаты, в которых выполняется равенство: $g_{\hat{4}\hat{4}} = c^2$, где c — постоянная, которую, согласно основному постулату СТО и ОТО, можно принять равной скорости света, поэтому в случае произвольной сопутствующей системы отсчета формуле для ds^2 можно придать вид

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2g_{\hat{\alpha}\hat{4}} d\xi^\alpha d\tau + g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{11}$$

Видно, что на каждой мировой линии при $\xi^\alpha = \text{const}$, так как $c d\tau = ds$, координату τ можно рассматривать как инвариантно определенное время, измеряемое на малых часах, скрепленных неизменно с фиксированными точками в сопутствующей системе отсчета. Начало отсчета собственного времени на различных мировых линиях можно устанавливать независимо и, вообще говоря, произвольным способом.

Очевидно, что система мировых линий в общем случае не допускает семейства ортогональных трехмерных поверхностей. Такие поверхности можно было бы ввести как поверхности

$$\tau(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \text{const}$$

Поэтому в общем случае с помощью голономного преобразования вида (1) невозможно сразу обратить в нуль все $g_{\hat{\alpha}4}(\xi^\beta, \tau)$, так как в противном случае при $g_{\hat{\alpha}\hat{4}} = 0$ координатные поверхности $\tau = \text{const}$ были бы ортогональны к мировым линиям, вследствие этого в общем случае при $g_{\alpha 4}(\xi^\beta, \tau) \neq 0$ с помощью выбора начала отсчета собственного времени на мировых линиях нельзя указать на всех мировых линиях точки, отвечающие $\tau = \text{const}$, т. е. точки, отвечающие одним и тем же моментам собственного времени τ. Отсюда следует, что для подвижной среды нельзя в общем случае указать конечное или бесконечное тело, образующее всю среду или ее часть и занимающее бесконечные или конечные трехмерные объемы, для которых можно было бы указать собственное время, одно и то же для всех точек такого тела.

Выражение для ds^2 в (11) в каждой точке среды можно переписать в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau_1{}^2 + h_{\hat{\alpha}\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{12}$$

$$d\tau_1 = d\tau + \frac{g_{\hat{\alpha}4}}{c^2} d\xi^\alpha, \quad h_{\hat{\alpha}\beta} = g_{\hat{\alpha}\beta} - \frac{g_{\hat{\alpha}4} g_{\hat{\beta}4}}{c^2} = (\overline{Э}_\alpha \overline{Э}_\beta) \tag{13}$$

$$\overline{Э}_\alpha = Э_{\hat{\alpha}} - \frac{g_{\hat{\alpha}4}}{c^2} Э_{\hat{4}}, \quad Э_{\hat{i}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i}$$

где $\partial \mathbf{r}$ — элемент координатной линии с номером i. Векторы $\mathcal{Э}_{\hat{i}}$ образуют базис в сопутствующей системе координат, отвечающей формуле (11). Векторы $\mathcal{Э}_{\bar{\alpha}}$ образуют сопутствующий базис для малого элемента трехмерного объема dv_3 пространства, ортогонального к рассматриваемой мировой линии в точке M.

В бесконечно малом объеме dv_3 в качестве сопутствующих координат индивидуальных точек можно принять $d\xi^\alpha$, причем $\mathcal{Э}_{\bar{\alpha}} = \partial_1 \mathbf{r} \,/\, \partial \xi^\alpha$ ($\partial_1 \mathbf{r}$ — элемент соответствующей координатной линии в объеме dv_3). Вдоль каждой мировой линии имеем $\xi^\alpha = \mathrm{const}$ и поэтому $d\tau_1 = d\tau$ на C. Величина τ_1, определяемая из (13), в противоположность переменной τ определена неголономным образом в четырехмерном объеме, так как правая часть в выражении для $d\tau_1$ не является полным дифференциалом, потому что в общем случае не удовлетворяются условия интегрируемости

$$\frac{\partial g_{\widehat{\alpha 4}}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial g_{\widehat{\alpha 4}}}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial g_{\widehat{\beta 4}}}{\partial \xi^\alpha} = 0 \tag{14}$$

Только при удовлетворении условий интегрируемости (14) можно с помощью голономного преобразования (1) привести глобально ds^2 к виду (12) и, таким образом, обратить в нуль все $g_{\widehat{\alpha 4}}$, провести ортогональные поверхности к данному семейству мировых линий и положить $\tau_1 = \tau$ в конечных объемах. Соответствующая система отсчета, определенная рассматриваемым семейством мировых линий, и система координат называются синхронными. В синхронной системе отсчета собственное время τ можно ввести как глобальную характеристику для соответствующих трехмерных сред.

В синхронных системах на трехмерных поверхностях $\tau = \tau_1 = \mathrm{const}$, ортогональных к мировым линиям, будет иметь место трехмерная метрика

$$dl^2 = -\,h_{\widehat{\alpha\beta}} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Легко усмотреть непосредственно из уравнений геодезических, что при голономно определенной переменной τ_1 и, следовательно, при наличии равенств (14) мировые линии $\xi^\alpha = \mathrm{const}$ совпадают с координатными линиями τ_1 и являются геодезическими. На геодезических мировых линиях движение точек среды инерциально, так как вдоль геодезических верно равенство $\mathbf{a} = c^{-2}\mathbf{a}^* = 0$.

Во всяком пространстве Римана можно вводить синхронные системы отсчета и соответственно координаты, сопутствующие семейству мировых линий, образованному геодезическими, однако в общем случае система отсчета и система координат, связанная с семейством геодезических в качестве мировых линий, не является синхронной. Синхронные системы отсчета в римановых пространствах аналогичны инерциальным системам в СТО и в ньютоновской механике.

В общем случае несимметричного пространства Римана можно построить синхронную систему координат единственным образом с помощью следующей конструкции.

В рассматриваемой области четырехмерного пространства можно выделить геометрически единственным образом некоторую точку P и некоторое направление в этой точке (например, точку, отвечающую особым значениям инвариантов тензора кривизны).

Проведем через точку P геодезическую линию L° в выделенном времениподобном направлении и проведем через точку P всевозможные геодезические, ортогональные в точке P к L°. Полученное семейство геодезических образует определенное трехмерное пространство Σ, погруженное в данное четырехмерное риманово пространство. Через каждую точку Σ проведем геодезические L, ортогональные к Σ. Семейство геодезических L, содержащих также и L°, рассмотрим как мировые линии соответствующей системы отсчета.

В этой системе отсчета введем сопутствующие координаты x^1, x^2, x^3, τ, где τ — собственное время вдоль геодезических L, а x^α — координаты точек Σ. Из построения мировых линий следует, что в точках трехмерного пространства Σ в силу ортогональности линий L к Σ формула (11) для ds^2 имеет вид

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{15}$$

т. е. $g_{\alpha 4} = 0$ на Σ, а уравнению трехмерной поверхности Σ можно придать форму

$$\tau\,(x^1 x^2 x^3) = \tau_0$$

причем вдоль геодезических, отвечающих $x^\alpha = \text{const}$, $\alpha = 1, 2, 3$, имеем $ds = c d\tau$.

Нетрудно усмотреть, что при $\tau = \tau' \gtrless \tau_0$ метрическая форма (15) сохраняет свой вид, т. е. при $\tau \gtrless \tau_0$ также верны равенства $g_{\alpha 4}\,(x^\beta, \tau) = 0$. В самом деле, так как координатные линии τ при $x^\alpha = \text{const}$ геодезические, то из уравнений геодезических

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\Gamma^i_{jk} = 0$$

следует, что

$$\Gamma^i_{44} = \frac{1}{2} g^{ik}\left(2\frac{\partial g_{k4}}{\partial \tau} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^k}\right) = g^{i\alpha}\frac{\partial g_{\alpha 4}}{\partial \tau} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial g_{\alpha 4}}{\partial \tau} = 0$$

поэтому $g_{\alpha 4}\,(x^1, x^2, x^3, \tau) = 0$, так как $g_{\alpha 4}\,(x^1, x^2, x^3, \tau_0) = 0$ по построению.

С помощью аналогичной конструкции трехмерную форму для dl^2 при $\tau = \tau_0$ на несимметричной трехмерной поверхности Σ можно привести единственным образом к виду

$$dl^2 = (dx^1)^2 + \check{g}_{22}\,(dx^2)^2 + \check{g}_{33}\,(dx^3)^2 + 2\check{g}_{23}\, dx^2 dx^3$$

и принять, что $x^\alpha = 0$ в точке P, а касательным к ортогональным координатным геодезическим линиям x^1 и x^2 на Σ в точке P можно придать на Σ заданные инвариантно направления и кроме этого удовлетворить следующим равенствам:

$$\check{g}_{23}\,(0, x^2, x^3, \tau_0) = 0, \qquad \check{g}_{22}\,(0, x^2, x^3, \tau_0) = \check{g}_{33}\,(0, 0, 0, \tau_0) = 1$$

В случае римановых симметричных пространств преобразование ds^2 к указанному виду или к еще более простому виду тоже возможно, но соответствующее преобразование не единственно.

Для определения компонент трехмерного метрического тензора $h_{\hat{\alpha\beta}}$ (ξ^α, τ) в точке М достаточно установить в трехмерном бесконечно малом элементе пространства dv_3, перпендикулярном вектору $\mathbf{u}$, направленному по касательной к данной мировой линии, линейное преобразование между векторами базисов $\bar{\mathcal{E}}_\beta$ и $\mathcal{E}_\gamma^*$ $(\beta, \gamma = 1, 2, 3)$

$$
\bar{\mathcal{E}}_\beta = l_{\beta\cdot}{}^{\cdot\gamma}(\tau)\mathcal{E}_\gamma^* \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_\gamma^* = c_{\gamma\cdot}{}^{\cdot\beta}(\tau)\,\bar{\mathcal{E}}_\beta \; (l_{\alpha\cdot}{}^{\cdot\gamma} c_{\gamma\cdot}{}^{\cdot\beta} = \delta_\alpha{}^\beta) \tag{16}
$$

Для теоретического определения матрицы $l_\beta{}^\gamma$ необходимо строить динамическую теорию.

Для экспериментального определения матрицы $l_{\beta\cdot}{}^{\cdot\gamma}$ достаточно произвести измерения с помощью масштабных приборов в собственной системе отсчета шести независимых углов из девяти между векторами $\bar{\mathcal{E}}_\beta$ и тремя единичными векторами $\mathcal{E}_\alpha^*$, известным образом образующими неизменно направленный репер, связанный с гироскопами, и, кроме того, достаточно еще измерить три длины векторов $\bar{\mathcal{E}}_\alpha$. Если сопутствующий репер абсолютно твердый, то достаточно измерить только три угла, определяющих ориентацию неизменяемого триедра $\bar{\mathcal{E}}_\beta$ по отношению к неизменно ориентированному триедру $\mathcal{E}_\alpha^*$.

После определения матрицы $l_{\beta\cdot}{}^{\cdot\alpha}$ на основании (13) найдем

$$
h_{\hat{\alpha\beta}} = g_{\hat{\alpha\beta}} - \frac{g_{\hat{\alpha 4}} g_{\hat{\beta 4}}}{c^2} = l_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma} l_{\beta\cdot}^{\cdot\mu} g_{\gamma\mu}^*, \quad g_{\gamma\mu}^* = (\mathcal{E}_\gamma^*, \mathcal{E}_\mu^*) \tag{17}
$$

Не ограничивая общности, можно принять, что

$$
g_{\gamma\gamma}^* = 1, \quad g_{\gamma\mu}^* = 0 \quad \text{при } \gamma \neq \mu
$$

иначе говоря, считать базис единичных векторов $\mathcal{E}_\alpha^*$ ортогональным.

Дадим теперь формулы для определения $g_{\hat{\alpha 4}}$ через компоненты $a^{*\alpha}$ трехмерного ускорения, измеряемого акселерометром и равного кинематически инвариантно определяемому четырехмерному ускорению, умноженному на c^2 для точки M на мировой линии C.

Равенство (10) в различных базисах можно переписать еще в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\Gamma_{jk}^{\circ i}\right)\mathcal{E}_i^\circ = \frac{d^2y^i}{ds^2}\,\mathcal{E}_i = \frac{d^2z^\alpha}{ds^2}\,\mathcal{E}_\alpha^* = \\
= \frac{1}{c^2}\,a^{*\alpha}\mathcal{E}_\alpha^* = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 \Gamma_{\hat{44}}^{\hat{i}}\mathcal{E}_{\hat{i}}
\end{gathered} \tag{18}
$$

В сопутствующей системе (11) $d^2\xi^i / ds^2 = 0$ и $d\tau / ds = 1 / c$; здесь $\mathcal{E}_i^\circ$ — векторы базиса в системе x^i; $\mathcal{E}_i$ — векторы базиса в системе y^i, которую можно рассматривать как глобальную декартову систему координат в СТО или как голономную систему координат Ферми в ОТО для данной мировой линии C. Так как

$$
\Gamma_{\hat{44}}^{\hat{i}} = g^{\hat{i}s}\,\frac{\partial g_{\hat{s4}}}{\partial \tau}
$$

то последнее из равенств (18) дает

$$\frac{1}{c^2} g^{\hat{}is} \frac{\partial g_{\hat{s4}}}{\partial \tau} Э_i{}^{\hat{}} = \frac{a^{*\alpha}}{c^2} Э_\alpha{}^*$$

а после скалярного умножения правой и левой частей на $Э_j^{\hat{}}$ получим

$$\frac{\partial g_{\hat{i4}}}{\partial \tau} = a^{*\alpha} (Э_\alpha{}^* Э_j{}^{\hat{}})$$

Так как $Э_\alpha{}^*$ перпендикулярно к $Э_4^{\hat{}}$ и $g_{\hat{4}\hat{4}} = c^2$, то при $j = 4$ верно: $\partial g_{\hat{44}} / \partial \tau = 0$ и $(Э_\alpha{}^*\ Э_4^{\hat{}}) = 0$. На основании формул (16) и равенства

$$\bar{Э}_\alpha = Э_\alpha^{\hat{}} - \frac{g_{\hat{\alpha 4}}}{c^2} Э_4^{\hat{}}$$

получим

$$\frac{\partial g_{\hat{\beta 4}}}{\partial \tau} = a^{*\alpha} (Э_\alpha{}^* Э_\beta{}^{\hat{}}) = a^{*\alpha} l_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma} g^*_{\alpha\gamma} \tag{19}$$

если репер $Э_\alpha{}^*$ ортогональный, то придем к следующим уравнениям для определения $g_{\hat{\beta 4}}$:

$$\frac{\partial g_{\hat{\beta 4}}}{\partial \tau} = \sum_{\alpha=1}^{3} a^{*\alpha} l_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}$$

Соотношения (17) и (19) вместе с начальными данными для $g_{\hat{\beta 4}}$ на рассматриваемой мировой линии полностью определяют компоненты метрического тензора $g_{\hat{\beta 4}}$ и $g_{\alpha\hat{\beta}}$ в сопутствующей системе отсчета.

Из предыдущих результатов следует, что метрика в сопутствующей системе отсчета зависит от геометрических особенностей мировых линий, так как вектор четырехмерного ускорения **а** и соответственно трехмерного ускорения **а***, измеряемого акселерометром, определяются четырехмерной кривизной мировой линии C.

Задача об определении закона движения подвижной среды с точки зрения заданного наблюдателя представляет собой задачу навигации, которую можно решить, если принять, что компоненты метрических тензоров и матрица $l_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$ известны. Пользуясь этими данными, можно также рассчитать вводимые первоначально в систему наблюдателя или в сопутствующую подвижную систему все компоненты тензорных характеристик физических явлений в каждой из этих систем отсчета.

После ряда теоретических и экспериментальных попыток решения отдельных частных задач впервые постановку и решение общей задачи о навигации «без методических ошибок» [1] в рамках ньютоновской механики для произвольных движений твердого тела дал Л. И. Ткачев [4] в 1943 г. [2].

---

[1] «Без методических ошибок» означает правильный пересчет для наблюдателя данных измерений, полученных в опытах в сопутствующей системе отсчета с помощью идеальных приборов, т. е. приборов, действующих без инструментальных ошибок. Алгоритмы решений отдельных навигационных задач, предложенные до работы Л. И. Ткачева в приложении к общему случаю, содержали методические ошибки.

[2] *Ткачев Л. И.* К теории пространственной ориентировки в слепом полете при помощи маятниково-гироскопических систем. Канд. диссертация. МВТУ им. Баумана, 1944.

Для решения общей навигационной задачи в рамках СТО и ОТО будем опираться на уравнение (18) (см. [3]). Навигационную задачу в частном случае прямолинейного движения материальной точки в рамках СТО рассматривали D. G. Hoag и W. Wrigley [5].

В каждой точке рассматриваемой мировой линии единичные ортогональные базисы $Э_i$ в системе координат Ферми и локальные инерциальные ортогональные единичные векторы базисов $Э_i^*$ связаны между собой преобразованием Лоренца.

Так как пространственные векторы базисов $Э_\alpha^*$ и $Э_\alpha^*$ при переходе от одной точки мировой линии к другой сохраняют свою ориентацию в трехмерном пространстве, то можно считать, что для обоих векторных трехмерных реперов в трехмерном пространстве их ориентация одинакова во всех точках мировой линии. (В четырехмерном пространстве их ориентация переменна.)

Различие базисов $Э_i$ и $Э_i^*$ может происходить только за счет поступательного движения трехмерного репера $Э_\alpha^*$ относительно репера $Э_i$. Обозначим через $\mathbf{v} = v^\alpha Э_\alpha$ вектор этого поступательного движения. Соответствующее преобразование векторов базиса и матрица этого преобразования Лоренца при конечных v^α имеет вид [6]

$$Э_i^* = d_i^{\cdot j} Э_j, \quad \| d_i^{\cdot j} \| = \left\| \begin{matrix} 1 + kv^1v^1 & kv^1v^2 & kv^1v^3 & \dfrac{v^1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ kv^2v^1 & 1 + kv^2v^2 & kv^2v^3 & \dfrac{v^2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ kv^3v^1 & kv^3v^2 & 1 + kv^3v^3 & \dfrac{v^3}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ \dfrac{v^1}{\sqrt{c^2 - v^2}} & \dfrac{v^2}{\sqrt{c^2 - v^2}} & \dfrac{v^3}{\sqrt{c^2 - v^2}} & \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{matrix} \right\| \tag{20}$$

$$v^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2, \quad k = \frac{1}{v^2}\left[\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} - 1\right]$$

На основании (18) и (20) получим уравнения для компонент v^α в разных точках мировой линии C

$$v^\alpha = \frac{dy^\alpha}{dt}, \quad dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$\frac{d^2y^\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \frac{v^\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = d_{\beta}^{\cdot\alpha} a^{*\beta} \tag{21}$$

Здесь $d\tau$ — приращение собственного времени на мировой линии в точке M, dt — приращение собственного времени в системе отсчета y^i с базисом $Э_i$.

Легко проверить, что дополнительное уравнение к (21), отвечающее $i = 4$, удовлетворяется тождественно в силу уравнений (21) и связи $d\tau = \sqrt{1 - v^2 / c^2}\, dt$.

Не ограничивая общности, при интегрировании системы уравнений (21) можно принять, что при некотором характерном моменте τ_0 имеем $v_0^\alpha = 0$. Этого можно всегда достигнуть выбором постоянной ориентации базиса $Э_i$ и соответственно вектора $Э_4$ в системе координат Ферми, если положить $Э_4 = \mathbf{u}(\tau_0)$.

После интегрирования уравнений (21) для данной мировой линии $\xi^\alpha =$ $=$ const найдем

$$y^i = f^i(t) \tag{22}$$

Закон движения (22) дает решение навигационной задачи в рамках СТО, если принять, что система координат y_i — глобальная декартова система отсчета.

Для получения решения навигационной задачи в ОТО необходимо определить еще преобразование координат $x^i(y^j)$. Поскольку

$$Э_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = Э_i^\circ b_{j\cdot}^{\cdot i} \tag{23}$$

то из равенств (18) следует

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\Gamma^i_{jk}(x^l) = b_{j\cdot}^{\cdot i}\frac{d^2y^j}{ds^2} = \frac{1}{c^2}b_{j\cdot}^{\cdot i}d^{j}_{\alpha\cdot}a^{*\alpha} \tag{24}$$

Уравнения для определения $b_{j\cdot}^{\cdot i}$ получим из (23) с учетом постоянства векторов $Э_j$ вдоль C.

Пусть $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ — компоненты некоторого произвольного постоянного вектора $\boldsymbol{\omega}$ в постоянном базисе $Э_i$. Из (23) можно написать: $\boldsymbol{\omega} =$ $= Э_i^\circ b_j^{\cdot i}\ \omega^j$. Так как вдоль C

$$0 = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{ds} = \frac{db_{j\cdot}^{\cdot i}\omega^j}{ds}Э_i^\circ + b_{j\cdot}^{\cdot k}\omega^j\Gamma^i_{kl}\frac{dx^l}{ds}Э_i^\circ$$

то отсюда получим

$$\frac{db_{j\cdot}^{\cdot i}}{ds} + b_{j\cdot}^{\cdot k}\Gamma^i_{kl}\frac{dx^l}{ds} = 0 \tag{25}$$

Таким образом, для $v^\alpha(s)$, $x^i(s)$ и $b_j^{\cdot i}(s)$ в ОТО получится система обыкновенных дифференциальных уравнений (21), (24) и (25) $3 + 8 + 16 =$ $= 27$ порядка. Соответствующие начальные условия для $b_{j\cdot 0}^{\cdot i}$ и x_0^i, $\dot{x}_0^i$ и v_0^i легко находятся.

Изложенный выше алгорифм можно заменять другим в зависимости от различного состава данных измерений, получаемых с помощью инерциальных приборов в опытах или с помощью теории, развитой в сопутствующей системе отсчета.

Из предыдущей теории также ясно, что с помощью компонент метрических тензоров $g_{ij}(x^k)$, $g_{\hat{i}\hat{j}}(\xi^\alpha, \tau)$, вектора ускорения $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}\cdot c^2$ и введенных выше матриц $l_\alpha^{\cdot\beta}$, $d_i^{\cdot j}$ и $b_j^{\cdot i}$ можно вычислять компоненты любых тензоров, заданных в одном из базисов $Э_{\hat{i}}$, $\bar{Э}_i$, $Э_i^*$, $Э_i$ и $Э_i^\circ$ на любой другой базис.

В координатах Ферми в римановом пространстве вдоль основной мировой линии можно переносить векторы и тензоры в базисах $Э_i$ с сохранением неизменными их компонент, так же как в евклидовом пространстве при использовании декартовых систем координат.

Для перехода от сопутствующей системы отсчета к локальной собственной системе отсчета (или наоборот) требуется знать только **а*** и матрицу $l_{\alpha}{}^{\cdot\beta}$. Определение этих данных или им эквивалентных величин возможно механическим путем с помощью инерциальных или других приборов или теоретически на основании решения соответствующих задач с помощью динамических уравнений в рамках физических моделей в естественной постановке задач, подразумевающей исключение несущественного участия в исходных законах свойств и состояний постороннего наблюдателя.

Сопутствующие системы отсчета, их трехмерная метрика и собственное время связаны с физическими соотношениями и непосредственными ощущениями непосредственных участников событий по физическому существу процессов и явлений в материальных телах. Эти соотношения и ощущения должны противопоставляться случайным трактовкам, зависящим от произвола в выборе подвижных наблюдателей, их переживаний, от их трехмерной метрики и от течения их собственного времени.

Основные результаты этой работы доложены на XIV Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике в Делфте в августе 1976 г.

Поступила 23 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fermi E.* Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. Fys., mat. o natur., 1922, T. 31.
2. *Седов Л. И.* Об условиях на сильных разрывах в теории гравитации. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
3. *Седов Л. И.* Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 6. (См. также Sedov L. I. Inertial navigation equations based on relativistic effects. Acta Astron., 1977, vol. 4, No. 3/4.)
4. *Ткачев Л. И.* Системы инерциальной ориентировки. М., Моск. энерг. ин-т, 1973.
5. *Hoag D. G.*, *Wrigley W.* Navigation and guidance in interstellar space. Acta Astronaut., 1975, vol. 2, No. 5/6.
6. *Тоннèла М.-А.* Основы электромагнетизма и теории относительности. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 143.