УДК 539.374

ОБ АДДИТИВНОСТИ ТЕНЗОРОВ ДЕФОРМАЦИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ КОНЕЧНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. В. Скаченко, А. Н. Спорыхин

(Воронеж)

В работе [1] предложена связь между компонентами тензоров пластических, упругих и полных деформаций. В [2] утверждается: «при конечной деформации несправедливо обычное допущение, что полная деформация представляет собой сумму упругой и пластической компоненты». Последнее утверждение основано на том, что «компоненты конечной деформации нелинейным образом выражаются через перемещения и, следовательно, вообще говоря, не будут аддитивными».

Ниже показано, что для простого процесса из свойства аддитивности тензоров деформаций (последнее верно, как отмечено в [1], для ковариантных компонент тензоров пластических, упругих и полных деформаций) вытекает для конечной однородной деформации аддитивность перемещений, соответствующих пластическому, упругому и полному перемещениям.

Следуя [1], рассмотрим деформируемый континуум и выделим три его состояния: начальное, деформированное и «разгрузочное» состояния. Векторы базисов $Э_i$ лагранжевой системы координат ξ_i, компоненты метрических тензоров g_{ij} и другие характеристики, относящиеся к отмеченным трем состояниям, будем снабжать индексами $^\circ$, $\hat{}$ и * соответственно. При анализе используется модель двухэтапного деформирования: из состояния g_{ij}° — в состояние g_{ij}^* и далее в состояние $\hat{g_{ij}}$. Соответствующие переходы определяются пластической ε_i^{pj}, упругой ε_i^{ej} и полной деформацией $\varepsilon_i^{\,j}$

$$(1)\qquad 2\varepsilon_{ij}{}^{p} = g_{ij}{}^{*} - g_{ij}{}^{\circ},\quad 2\varepsilon_{ij}{}^{e} - g_{ij}{}^{\wedge} - g_{ij}{}^{*},\quad 2\varepsilon_{ij} = g_{ij}{}^{\wedge} - g_{ij}{}^{\circ}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}{}^{e} + \varepsilon_{ij}{}^{p}$$

Связь между метрическими пространствами трех состояний определяется соотношениями

$$(2)\qquad Э_i{}^{\wedge} = (\delta_i{}^k + \nabla_i{}^{\circ}u^k)\,Э_k{}^{\circ} = c_i^{\circ k}Э_k{}^{\circ},\quad Э_i{}^{*} = (\delta_i{}^k + \nabla_i{}^{\circ}u^{pk})\,Э_k{}^{\circ} = c_i^{opk}Э_k{}^{\circ}$$

$$Э_i{}^{\wedge} = (\delta_i{}^k + \nabla_i{}^{*}u^{ek})\,Э_k{}^{*} = c_i^{*ek}Э_k{}^{*},\quad Э_i{}^{\circ} = (\delta_i{}^k + \nabla_i{}^{\wedge}u^k)\,Э_k{}^{\wedge} = c_i{}^{\wedge k}Э_k{}^{\wedge}$$

$$Э_i{}^{\circ} = (\delta_i{}^k - \nabla_i{}^{*}u^{pk})\,Э_k{}^{*} = c_i^{*pk}Э_k{}^{*},\quad Э_i{}^{*} = (\delta_i{}^k - \nabla_i{}^{\wedge}u^{ek})\,Э_k{}^{\wedge} = c_i{}^{\wedge ek}Э_k{}^{\wedge}$$

$$(3)\qquad g_{ij}{}^{\wedge} = c_i^{\circ k}c_j^{\circ n}g_{kn}^{\circ},\quad g_{ij}{}^{*} = c_i^{\circ pk}c_j^{\circ pn}g_{kn}^{\circ},\quad g_{ij}{}^{\wedge} = c_i^{*ek}c_j^{*en}g_{kn}^{*}$$

$$g_{ij}{}^{\circ} = c_i{}^{\wedge k}c_j{}^{\wedge n}g_{\hat{kn}},\quad g_{ij}{}^{*} = c_i{}^{\wedge ek}c_j{}^{\wedge en}g_{\hat{kn}},\quad g_{ij}{}^{\circ} = c_i^{*pk}c_j^{*pn}g_{kn}^{*}$$

$$c_i^{\circ k}c_k{}^{\wedge j} = \delta_i{}^j,\quad c_i^{\circ pk}c_k^{*pj} = \delta_i{}^j,\quad c_i^{*ek}c_k{}^{\wedge ej} = \delta_i{}^j$$

где $u_i{}^p$, $u_i{}^e$, u_i — компоненты векторов пластических, упругих и полных перемещений. Используя (1) и (2), компоненты тензоров деформаций можно представить в одной из форм

$$(4)\qquad 2\varepsilon_{ij}{}^{p} = c_i^{\circ pk}c_j^{\circ pn}g_{kn}^{\circ} - g_{ij}{}^{\circ},\quad 2\varepsilon_{ij}{}^{e} = c_i^{*ek}c_j^{*en}g_{kn}^{*} - g_{ij}{}^{*}$$

$$2\varepsilon_{ij} = c_i^{\circ k}c_j^{\circ n}g_{kn}^{\circ} - g_{ij}{}^{\circ}$$

Согласно (3) компоненты конечной деформации нелинейным образом выражаются через перемещения. Поэтому подвергается сомнению определение компоненты деформаций (1), так как утверждается [2], что из аддитивности деформаций не следует аддитивность перемещений. Суть подобной ошибки в следующем: последнее соотношение (1) связывает компоненты тензоров в разных базисах, хотя и в одной и той же лагранжевой системе координат и действительно, аддитивность компонент векторов перемещений в разных базисах не наблюдается. Однако, если перемещения привести к одному базису, то свойство аддитивности выполняется. Действительно, последнее соотношение (1) путем привлечения (4) и (3) приводится к эквивалентному выражению

$$c_i^{\circ m} c_j^{\circ s} \overset{\circ}{g}_{ms} = c_i^{*ek} c_j^{*en} c_k^{\circ pm} c_n^{\circ ps} \overset{\circ}{g}_{ms} \tag{5}$$

Отсюда

$$c_i^{\circ m} = c_i^{*ek} c_k^{\circ pm} \tag{6}$$

Приведение тензора $\nabla_i{}^* u^{ek}$ к базису $\vartheta_i{}^\circ$ дает

$$\nabla_i{}^* u^{ek} = \nabla_i u^{\circ es} c_s^{*pk}, \quad c_i^{*ek} = \delta_i{}^k + \nabla_i u^{*ek} \tag{7}$$

Из (6), используя (7) и (3), имеем

$$c_i^{\circ m} = (\delta_i{}^k + \nabla_i u^{\circ es} c_k^{*pk}) c_k^{\circ pm} = c_i^{\circ pm} + \nabla_i u^{\circ em}$$

откуда в силу принятых обозначений получаем

$$\nabla_i{}^\circ u^m = \nabla_i{}^\circ u^{pm} + \nabla_i{}^\circ u^{em}$$

что и доказывает аддитивность перемещений.

Необходимо отметить, что утверждение [2] о том, что связь $F = F^e F^p$ (где F — матрица градиентов перемещений) является более тесной, чем связь (1), не совсем обоснованно, ибо эта связь аналогична (6).

За проявленное внимание к работе авторы благодарят Л. И. Седова и Д. Д. Ивлева.

Поступила 2 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. *Lee E. N.* Elastic-plastic deformation at finite strains. Trans. ASME Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, No. 1. (Рус. перев.: Упругопластическое деформирование при конечных деформациях. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1969, № 1.)