

6. Атражев В. М., Якубов И. Т. Контракция сильно неравновесной плазмы с током. ПМТФ, 1975, № 1.
7. Knight B. W., Peterson G. A. Theory of Gunn effect. Phys. Rev., 1967, vol. 155, No. 2.
8. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
9. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1933.

УДК 532.529

## К РАСЧЕТУ БИНАРНОЙ КОРРЕЛЯТИВНОЙ ФУНКЦИИ В ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЕ

А. М. Головин, В. Е. Чижов

(Москва)

Из простых геометрических соображений получено уравнение для бинарной коррелятивной функции в системе твердых шаров одинакового радиуса. Введение самосогласованным образом эффективного объема, приходящегося на одну частицу, позволяет определить бинарную коррелятивную функцию для систем с малой и умеренной объемной концентрацией частиц. В предельном случае малых объемных концентраций уравнение для бинарной функции совпадает с известным линеаризованным уравнением суперпозиционного приближения Кирквуда [1,2]. Следуя [3], принимаем, что начальное распределение частиц создается так, что положения их центров выбираются последовательно, причем центр каждой новой частицы равновероятно может быть расположен в любой геометрически доступной части области, занятой суспензией.

Экспериментальные данные по относительному распределению шаров в жидкости той же плотности, образуемому в результате интенсивного встряхивания смеси, приведены в работе [4]. Бинарная коррелятивная функция, полученная в этой работе в результате статистической обработки большого числа измерений взаимных расстояний между центрами шаров, указывает на наличие ближнего порядка в распределении частиц. Основную роль здесь играет геометрический эффект, связанный с непроницаемостью шаров и приводящий к послойному их расположению в окрестности выбранной частицы независимо от характера гидродинамического взаимодействия.

Наблюдения пространственного распределения монодисперсной системы сферических частиц, осаждающихся в жидкости при объемной концентрации 0.025 и числе Рейнольдса для отдельной частицы, равном 0.6, показали [5], что вероятность расположения частиц внутри некоторого объема имела приблизительно биномиальную форму. Это указывает на равновероятность всех положений центра отдельной частицы в геометрически доступной области и свидетельствует о том, что силы гидродинамического взаимодействия между частицами не оказывают определяющего воздействия на вид бинарной коррелятивной функции. Для частиц в вязкой жидкости сравнимой плотности исключение составляет лишь малая область, соответствующая взаимным расстояниям, близким к диаметру частиц.

**1. Коррелятивные функции.** Рассмотрим систему очень большого числа  $N_\infty$  одинаковых частиц (шаров радиуса  $a$ ), помещенных в объем  $V_\infty$ . Характеристиками такой системы являются  $n = N_\infty / V_\infty$  — число центров шаров в единице объема и  $c = \frac{4}{3}\pi a^3 n$  — объемная концентрация частиц. В системе большого числа хаотически расположенных шаров положение их центров можно определить лишь с некоторой вероятностью. Пусть  $dW_1(x)$  и  $dW_2(x_1, x_2)$  означают соответственно вероятность обнаружить центр произвольной частицы в окрестности точки  $x$  и центры двух произвольно выбранных частиц в окрестности точек  $x_1$  и  $x_2$ . Далее, пусть  $dW_1(x_1; x_2)$  означает вероятность обнаружить центр выбранной частицы в окрестности точки  $x_1$ , когда центр дру-

гой частицы зафиксирован в точке  $x_2$ . Введем безразмерные коррелятивные функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$  и  $f_1(x_1; x_2)$  по формулам (последнее равенство вытекает из теоремы умножения вероятностей)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} dW_1(x) &= V_\infty^{-1} f_1(x) dx \\ dW_2(x_1, x_2) &= V_\infty^{-2} f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ dW_1(x_1; x_2) &= V_\infty^{-1} f_1(x_1; x_2) dx_1 \\ f_2(x_1, x_2) &= f_1(x_2) f_1(x_1; x_2) \end{aligned}$$

В дальнейшем будем интересоваться пространственно-однородной системой, что имеет место вдали от поверхностей, ограничивающих объем  $V_\infty$ . Тогда все положения одной частицы равновероятны, и в связи с (1.1) имеем

$$f_1(x) = 1, \quad f_1(x_1; x_2) = f_2(x_1, x_2)$$

Кроме того, в этом случае распределение шаров в окрестности выбранного шара будет в среднем сферически симметричным. Поэтому функция  $f_2(x_1, x_2)$  будет зависеть лишь от одного аргумента — взаимного расстояния между центрами рассматриваемых шаров, так что

$$f_2(x_1, x_2) = g(r), \quad r = |x_1 - x_2|$$

Таким образом, для пространственно-однородной системы функция  $g(r)$  имеет смысл не только бинарной коррелятивной функции, но и условной коррелятивной функции. Среднее число центров шаров, которые можно обнаружить в сферическом слое  $(r, r + dr)$ , равно

$$(1.2) \quad dN(r) = 4\pi r^2 n g(r) dr$$

Эта формула используется при обработке экспериментов по изучению распределения шаров в жидкости [4].

**2. Эффективный объем сферы в системе.** Обозначим через  $w_-(r_1, r_2; r_{12})$  объем области, образованной пересечением сферы радиуса  $r_1$  со сферой радиуса  $r_2 \leq r_1$ , когда расстояние между центрами сфер равно  $r_{12}$  ( $r_1 \leq r_{12} \leq r_1 + r_2$ ). Через  $w_+(r_1, r_2; r_{12})$  обозначим объем той части сферы радиуса  $r_2$ , которая лежит вне сферы радиуса  $r_1 \geq r_2$ ; расстояние между центрами сфер  $r_1 - r_2 \leq r_{12} \leq r_1$  (фигура). Укажем явный вид функций  $w_-$  и  $w_+$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} w_-(r_1, r_2; r_{12}) &= \pi [r_1^3 T_-(\theta) + r_2^3 T_-(\theta')] \\ w_+(r_1, r_2; r_{12}) &= \begin{cases} \pi [r_2^3 T_+(\theta') - r_1^3 T_-(\theta)], & \cos \theta' \leq 0 \\ \frac{4}{3}\pi r_2^3 - \pi [r_1^3 T_-(\theta) + r_2^3 T_-(\theta')], & \cos \theta' > 0 \end{cases} \\ 3T_\pm(\theta) &= 2 \pm 3 \cos \theta \mp \cos^3 \theta \\ \cos \theta &= \frac{r_1^2 + r_{12}^2 - r_2^2}{2r_1 r_{12}}, \quad \cos \theta' = \frac{r_{12}^2 + r_2^2 - r_1^2}{2r_2 r_{12}} \end{aligned}$$

Углы  $\theta$  и  $\theta'$  указаны на фигуре.

Функции  $w_+$  и  $w_-$  обладают следующими очевидными свойствами:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w_+(r_1, r_2; r_1) + w_-(r_1, r_2; r_1) &= \frac{4}{3}\pi r_2^3 \\ w_-(r_1, r_2; r_1 + r_2) &= w_+(r_1, r_2; r_1 - r_2) = 0 \end{aligned}$$

Кроме этого, несмотря на различные области определения функций  $w_+$  и  $w_-$ , имеет место формальное равенство

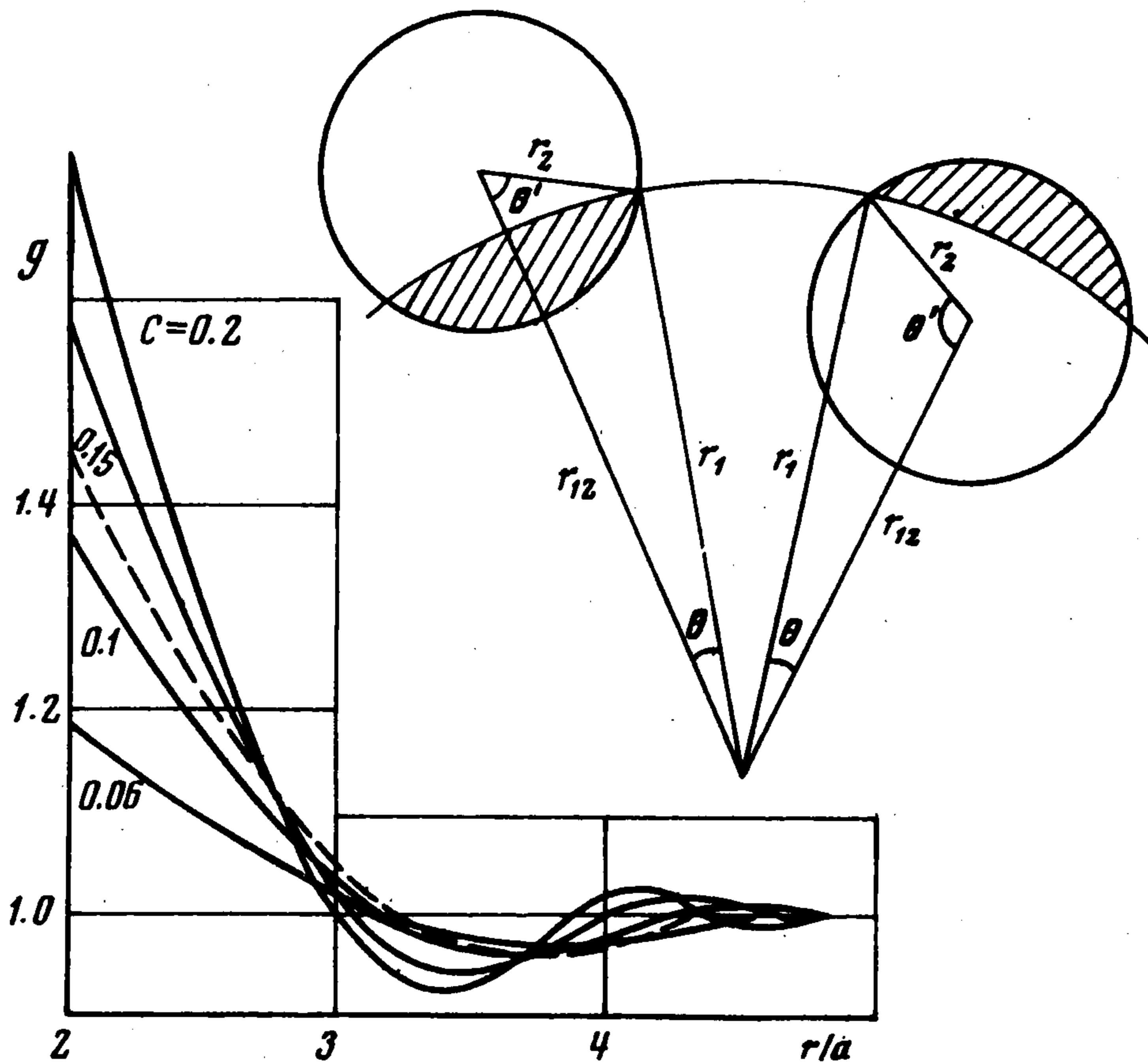
$$(2.3) \quad \frac{\partial w_-}{\partial r_1} = -\frac{\partial w_+}{\partial r_1} = 2\pi r_1^2 (1 - \cos \theta)$$

Введем понятие эффективного объема и эффективного радиуса в системе хаотически движущихся шаров. Пусть  $v_c = \frac{4}{3}\pi a^3$  — собственный объем частицы. Под эффективным объемом частицы в системе будем подразумевать увеличение объема облас-

ти, недоступной для центров других частиц того же размера при увеличении на единицу числа частиц в системе.

Вначале рассмотрим случай очень малых объемных концентраций. Выделим среди частиц ансамбля пробную и окружим ее сферой  $S_d$  радиуса  $2a$ , concentрической с пробной частицей. Часть пространства, ограниченная сферой  $S_d$ , «недоступна» для центров остальных частиц. По отношению к таким центрам пробная частица имеет эффективный радиус  $2a$  и эффективный объем  $8v_c$ .]

Увеличение объемных концентраций ведет к перекрыванию сфер  $S_d$  соседних частиц. При умеренных объемных концентрациях перекрытия преимущественно будут



парными, т. е. в среднем будет мала относительная доля таких перекрытий сфер, в которых участвуют три и более частицы. Оценки, проведенные для модели кубической решетки шаров, показывают, что предположение о парном характере перекрытий верно до концентраций  $c \approx 0.2$ .

Перекрывание сфер  $S_d$  приводит к тому, что объем недоступной области в расчете на одну частицу уменьшается по сравнению с  $8v_c$ , хотя радиус недоступной области вокруг отдельных частиц по-прежнему остается равным  $2a$ . За счет наличия общей части у сфер  $S_d$ , построенных для пробной частицы и соседней к ней, объем  $8v_c$  уменьшается на величину, равную половине объема этой общей части, т. е. на величину  $1/2 w_-(2a, 2a; r_{12})$ . В среднем число центров частиц, находящихся на расстоянии  $(r_{12}, r_{12} + dr_{12})$  от центра пробной частицы, по (1.2) равно  $4\pi r_{12}^2 n g(r_{12}) dr_{12}$ . Поэтому эффективный объем частицы в системе равен

$$(2.4) \quad v_0 = 8v_c - 2\pi n \int_{2a}^{4a} r_{12}^2 g(r_{12}) w_-(2a, 2a; r_{12}) dr_{12}$$

Формула (2.4) определяет эффективный объем в случае умеренных объемных концентраций.

При высоких концентрациях частиц эффективный объем сферы, находящейся на расстоянии  $r$  от выделенной, должен зависеть от трехчастичной коррелятивной функции, которая может быть выражена через бинарную коррелятивную функцию лишь при малых объемных концентрациях.

В силу принятой ранее однородности и сферической симметрии (в среднем) системы можно ввести эффективный радиус частицы по формуле

$$(2.5) \quad r_0 = (3/4 v_0 / \pi)^{1/3}$$

Величины  $v_0$  и  $r_0$  — средние статистические характеристики системы шаров и зависят лишь от объемной концентрации  $c$ .

3. Уравнение для бинарной коррелятивной функции. Выберем и зафиксируем центр произвольного (пробного) шара из рассматриваемой системы. Проведем сферу радиуса  $r$ , концентрическую с пробным шаром. Согласно формуле (1.2) для определения функции  $g(r)$  необходимо знать среднее число  $N(r)$  центров шаров, лежащих внутри сферы радиуса  $r$ . Пусть  $v = V_\infty / N_\infty$  — средний объем на одну частицу в системе. Эта величина, очевидно, равна среднему свободному объему, приходящемуся на центр произвольной частицы в системе.

Введем  $V(r) = v N(r)$  — средний свободный объем, приходящийся на  $N(r)$  центров частиц. Тогда соотношение (1.2) принимает вид

$$(3.1) \quad g(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dV(r)}{dr}$$

При  $r/a \rightarrow \infty$ , очевидно,  $V(r) \rightarrow 4/3\pi r^3$ . Однако если  $r \sim a$ , то влияние соседних сфер, центры которых расположены в слое от  $r$  до  $r + dr$ , проявляется в уменьшении свободного объема в сфере радиуса  $r$  на величину

$$V_-(r) = 4\pi n \int_r^{r+r_0} r_{12}^2 g(r_{12}) w_-(r, r_0; r_{12}) dr_{12}$$

Шары с центрами в слое  $(r - r_0, r)$  приводят к уменьшению свободного объема вне сферы радиуса  $r$  на величину

$$V_+(r) = 4\pi n \int_{r-r_0}^r r_{12}^2 g(r_{12}) w_+(r, r_0; r_{12}) dr_{12}$$

При  $r - r_0 < 2a$  нижний предел интегрирования здесь следует заменить на  $2a$ , так как в силу непроницаемости центры двух шаров не могут сблизиться на расстояния меньше  $2a$ . Однако, положив  $g(r) \equiv 0$  при  $r < 2a$ , эту формулу можно оставить без изменений.

Таким образом, при  $r \geq 2a$

$$V(r) = 4/3\pi r^3 - v_0 + V_+(r) - V_-(r)$$

Из соотношения (3.1) с учетом свойств (2.2), (2.3) функций  $w_+$  и  $w_-$  следует уравнение для определения бинарной коррелятивной функции

$$(3.2) \quad (1 - nv_0) g(r) = 1 - 2\pi n \int_{r-r_0}^{r+r_0} r_{12}^2 (1 - \cos \theta) g(r_{12}) dr_{12}, \quad r \geq 2a$$

где  $\cos \theta$  определяется формулой (2.1). Введем обозначения

$$\tau_0 = \left(\frac{r_0}{a}\right)^3, \quad \xi = \frac{2a}{r_0}, \quad x = \frac{r}{r_0}$$

$$y = \frac{r_{12}}{r_0}, \quad \lambda = \frac{3c\tau_0}{1 - c\tau_0}$$

Рассмотрим вместо  $g(x)$  новую неизвестную функцию  $\varphi(x) = x [g(x) - 1]$ . Из (3.2) следует уравнение

$$(3.3) \quad \varphi(x) = \frac{\lambda}{4} \int_{x-1}^{x+1} \varphi(y) [(x-y)^2 - 1] dy, \quad x \geq \xi$$

$$\varphi(x) = -x, \quad 0 < x < \xi$$

Для малых концентраций, очевидно,  $\xi = 1$ , и уравнение (3.3) переходит в известное в теории жидкости линейризованное уравнение суперпозиционного приближения, полученное ранее [1, 2] методами статистической механики. С точностью до членов порядка  $c$  включительно решение уравнения (3.3) имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} cx(8 - 6x + \frac{1}{2}x^3), & 1 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Однако в области умеренных концентраций уравнение (3.3) отличается от линейризованного уравнения в работах [1, 2] тем, что в данной работе область  $0 < r < 2a$ , где  $g(r) \equiv 0$ , в безразмерной переменной  $x$  не соответствует области  $0 < x < 1$ . Это различие связано, по существу, с введением эффективного радиуса взаимодействия частиц, зависящего от бинарной коррелятивной функции.

4. Вычисление бинарной коррелятивной функции. Следуя [1], распространим уравнение (3.3) на всю действительную ось, положив  $\varphi(-x) = \varphi(x)$  для  $x < 0$  и введя пока неизвестную функцию неоднородности  $\psi(x) = \psi(-x)$ , исчезающую при  $|x| \geq \xi$

$$(4.1) \quad \varphi(x) = \psi(x) + \frac{\lambda}{4} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \varphi(y) dy, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\psi(x) = 0, \quad |x| \geq \xi$$

$$K(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Функция  $\psi(x)$  определяется из условия  $\varphi(x) = -|x|$  при  $|x| < \xi$ .

Так как  $K(x)$  и  $\psi(x)$  финитны, а  $\varphi(x)$  можно из физических соображений считать принадлежащей классу  $L_2(-\infty, \infty)$ , то единственное в  $L_2(-\infty, \infty)$  решение уравнения (4.1) строится по следующим формулам [6]:

$$(4.2) \quad \varphi(x) = \psi(x) + \int_{-\xi}^{\xi} l(x-y) \psi(y) dy$$

$$l(x) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(i\omega) e^{-i\omega x}}{1 + \lambda L(i\omega)} d\omega$$

$$L(z) = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{zx} dx = \frac{1}{z^3} (z \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)$$

Рассматривая уравнение (4.2) сначала на интервале  $|x| \leq \xi$  (там  $\varphi(x) = -|x|$ ), можем определить функцию  $\psi(x)$ , решив уравнение

$$(4.3) \quad \psi(x) = -|x| - \int_{-\xi}^{\xi} l(x-y) \psi(y) dy, \quad |x| < \xi$$

Далее с помощью (4.2) построим  $\varphi(x)$  для  $x \geq \xi$

$$(4.4) \quad \varphi(x) = \int_{-\xi}^{\xi} l(x-y) \psi(y) dy$$

Нахождение функций  $\psi(x)$  и  $\varphi(x)$  из (4.3) и (4.4) требует знания  $l(x)$  при  $|x| \leq \xi$ . Зная нули функции  $M(z) = 1 + \lambda L(z)$ , можно с помощью теории вычетов преобразовать интеграл, определяющий  $l(x)$  в (4.2), к виду, удобному для численных расчетов.

Функция  $M(z)$  является целой аналитической функцией. Нули ее совпадают, очевидно, с корнями уравнения

$$(4.5) \quad z^3 = \lambda (\operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} z)$$

Следует отметить, что если  $z_n$  — корень (4.5), то  $\bar{z}_n$ ,  $-z_n$  и  $-\bar{z}_n$  — также корни этого уравнения (черта сверху означает комплексное сопряжение). Справа в (4.5) стоит трансцендентная целая функция, слева — полином. Согласно обобщению малой теоремы Пикара, такое уравнение для всех  $\lambda$  кроме, быть может, одного имеет бесконечно много корней, таких, что  $|z_n| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  [7]. В работе [1] вычислены для некоторых  $\lambda$  корни (4.5)  $z_1$  и  $z_2$  с наименьшими модулями. Асимптотическое поведение корней  $z_n$  при  $n \rightarrow \infty$  для любых  $\lambda$  можно установить, рассмотрев уравнение (4.5), в котором оставлены лишь максимальные по модулю члены

$$z_n = \pm \ln \frac{8\pi^2 n^2}{\lambda} \pm 2\pi i n + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

Для вычисления  $l(x)$  можно воспользоваться леммой Жордана

$$(4.6) \quad l(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-z_n x)}{M'(z_n)}, \quad x > 0$$

$(M'(z) = dM(z)/dz)$

Ряд в (4.6) распространен на те  $z_n$ , у которых  $\operatorname{Re} z_n > 0$ . Другое выражение для  $l(x)$  можно получить, если представить функцию  $L(z)$  в виде

$$L(z) = \frac{z-1}{z^3} e^z + \frac{z+1}{z^3} e^{-z}$$

и соответственно разбить интеграл, дающий  $l(x)$ , на два интеграла. Применение леммы Жордана и теории вычетов к каждому из этих интегралов приводит к следующему результату:

$$(4.7) \quad l(x) = \frac{3\lambda}{4(\lambda+3)} \left( x^2 - \frac{15+6\lambda}{15+5\lambda} \right) -$$

$$- \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+z_n}{z_n^3} \frac{\exp(-z_n)}{M'(z_n)} \operatorname{ch}(z_n x), \quad |x| < 1$$

Как и в (4.6), сумма в формуле (4.7) распространена на те  $z_n$ , у которых  $\operatorname{Re} z_n > 0$ . Выражение (4.7) приведено в работе [1] в несколько искаженном виде.

Анализ, проведенный в работе [1], показывает, что формула (4.6), где вместо ряда оставлены лишь два первых члена, отвечающих  $z_1$  и  $\bar{z}_1$ , хорошо приближает функцию  $l(x)$  при  $x \geq 1$ , а двучленная формула (4.7), где также вместо ряда взяты два первых члена, хорошо аппроксимирует  $l(x)$  при  $|x| < 1$ . В данной работе для численных расчетов в функции  $l(x)$  на интервалах  $x < 1$  и  $x \geq 1$  выбиралась в виде соответствующих двучленных формул. По известной функции  $l(x)$  функция  $\psi(x)$  определялась для  $|x| < \xi$  из уравнения (4.3), которое заменой интегрального члена по формуле Симпсона было преобразовано к системе линейных алгебраических уравнений. Далее с помощью (4.4) вычислялась искомая функция  $g(x) = 1 + \varphi(x)/x$ .

Задача однозначного определения  $g(x)$  для разных значений  $c$  оказывается самосогласованной, так как эффективный радиус  $r_0$  и параметр  $\xi$ , входящий в (4.4) и (4.5), зависят от функции  $g(x)$ . Определение зависимости  $v_0 = v_0(c)$  и  $r_0 = r_0(c)$  и построение бинарной коррелятивной функции было произведено методом итераций с использованием формул (2.4) и (2.5). Полученная этим методом зависимость  $v_0(c)$  приведена ниже

$c$	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
$\tau_0$	7.28	6.89	6.47	6.03	5.56	5.07	4.59	3.72	3.15

Видно, что с увеличением объемной концентрации безразмерный эффективный объем  $\tau_0$ , как и следовало ожидать, монотонно уменьшается. Заметим, что использовать формулу (2.4) для концентраций, близких к максимальным, нельзя, так как в этом

случае доля неучтенных в формуле (2.4) тройных и более высоких перекрытий сфер  $S_d$  становится значительной.

На фигуре приведены графики функции  $g(r)$  для разных значений  $c$ . С увеличением объемной концентрации увеличивается размах и уменьшается затухание осцилляций. Отсюда видно, что при умеренных объемных концентрациях частиц корреляция между положением их центров практически исчезает на расстоянии в несколько радиусов частиц. Все положения центра данной частицы на достаточно больших расстояниях от центра пробной частицы равновероятны. На фигуре штриховой линией представлены результаты расчета коррелятивной функции, полученные в работе [2] для  $c = 0.144$ . Можно считать, что результаты данной работы при малых и умеренных концентрациях удовлетворительно согласуются с полученными ранее.

В статистической механике функция  $g(r)$  используется для построения уравнения состояния газа твердых шаров. Уравнение состояния имеет вид

$$(4.8) \quad p / (nkT) = 1 + 4cg \quad (2a)$$

где  $p$  — давление,  $T$  — температура и  $k$  — постоянная Больцмана. Известно вириальное разложение уравнения состояния по степеням объемной концентрации [8]

$$(4.9) \quad p / (nkT) = 1 + 4c + 10c^2 + \\ + 18.36c^3 + (29.44 \pm 1.28)c^4 + \dots$$

Ниже приведены результаты расчета величины  $p / (nkT)$  по формулам (4.8) и (4.9)

$c$	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
(4.8)	1.18	1.28	1.40	1.54	1.71	1.89	2.06	2.23	2.41
(4.9)	1.18	1.27	1.38	1.52	1.66	1.82	1.99	2.18	2.39

Видно хорошее (в пределах 2—3%) согласование результатов данной работы с вириальным разложением (4.9).

В заключение рассмотрим вопрос об асимптотике функции  $\phi(x)$  при  $x \gg 1$ . Согласно формуле (4.4) для этого следует выяснить поведение функции  $l(x)$  при  $x \gg 1$ . Модуль общего члена ряда (4.6) при больших  $n$  с использованием приведенной выше асимптотики корней  $z_n$  имеет вид

$$\left| \frac{\exp(-z_n x)}{M'(z_n)} \right| \sim \left( \frac{\lambda}{8\pi^2} \right)^x \frac{1}{n^{2x}}$$

Отсюда видно, что  $l(x)$ , а следовательно и  $\phi(x)$ , экспоненциально убывают при  $x \rightarrow \infty$ , если  $\lambda < 8\pi^2$ .

Поступила 28 VI 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kirkwood J. G., Boggs E. M. The radial distribution function in liquids. J. Chem. Phys., 1942, vol. 10, No. 2.
2. Kirkwood J. G., Maun E. K., Alder B. J. Radial distribution function and the equation of state of a fluid composed of rigid spherical molecules. J. Chem. Phys., 1950, vol. 18, No. 8.
3. Batchelor G. K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres. J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt 2.
4. Morrell W. E., Hildebrand J. H. The distribution of molecules in model liquid. J. Chem. Phys., 1936, vol. 4, No. 1.
5. Smith T. N. The spatial distribution of spheres falling in a viscous liquid. J. Fluid Mech., 1968, vol. 32, pt 1.
6. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
7. Маркушевич А. И. Целые функции. М., «Наука», 1975.
8. Фишер И. З. Статистическая теория жидкостей. М., Физматгиз, 1961.