Отличие рядов (2.1) от рядов (1.2) заключается в том, что в (2.1) коэффициенты ρ_k, u_k, S_k $(k = 1, \ldots)$ зависят не только от t, но и от x. Величины $c_1, \ldots, c_n$, ρ_k, u_k, S_k $(k = 1, \ldots)$ отыскиваются точно так же, как и в плоском случае.

Пример. Пусть параметры газа, в котором движется поршень, таковы: $\rho_+ = S_+ = 1$, $P = \rho^2 S$ $(\gamma = 2)$. Предположим также, что создаваемая ударная волна — сильная. Тогда, проведя необходимые вычисления, получим следующие выражения для коэффициентов c_1 и c_2:

$$c_1 = 1.5\ \xi_1, \quad c_2 = 0.75\,(\xi_2 - 0.75\nu\xi_1^2) \tag{2.2}$$

Формула (2.2) показывает, что медленнее всего распространяется сферическая волна $(\nu = 2)$.

В заключение автор благодарит А. Ф. Сидорова за руководство и помощь.

Поступила 11 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козманов М. Ю.* Метод решения некоторых краевых задач для гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка с двумя переменными. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
3. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., «Наука», 1968.

УДК 533.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

О. А. Синкевич

(Москва)

Исследуется устойчивость неоднородных стационарных распределений температуры электронов (концентрация электронов) и электродинамических параметров (плотность тока и электрическое поле) в канале относительно одномерных возмущений. Получен критерий устойчивости слоевой волны.

Было показано [1], что в канале с неравновесной замагниченной плазмой могут существовать распределения концентрации электронов, представляющие собой однородные области, разделенные стационарными поверхностями разрыва (слоевые волны). При других значениях разности потенциалов на электродах для того же самого состава плазмы в канале могут возникать стационарные солитоны (уединенные волны). Существуют задачи, в которых могут быть использованы решения с бегущими слоевыми волнами или солитонами. Аналогичные распределения параметров среды возникают в задачах, относящихся к полупроводникам [2,3], газовому разряду в неравновесной плазме [4–6]. В данной работе исследуется устойчивость таких неоднородных стационарных состояний по отношению к одномерным возмущениям и показано, что выводы работы [7] нуждаются в уточнении.

Исследуем спектр линейной задачи об устойчивости неоднородного состояния, соответствующего симметрично расположенной относительно центра канала стоячей слоевой волне [1] толщиной $2l_1$ ($S_0(x)$ — безразмерная концентрация электронов; плоскость волны параллельна поверхностям электродов)

$$S_0(x) = \begin{cases} S_1 = \text{const}, & -1 \leqslant x \leqslant -l_1,\ l_1 \leqslant x \leqslant 1 \\ S_2 = \text{const}, & l_2 \leqslant x \leqslant l_1,\ S_1 \neq S_3 \end{cases}$$

(Разрывное решение будем рассматривать как предел непрерывного решения в канале.)

Безразмерная концентрация электронов удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}\Lambda(S_0)\frac{dS_0}{dx}+U(S_0)\frac{dS_0}{dx}+F(S_0)=0$$

с граничным условием

$$S_0(-1)=S_0(1)$$

и условием симметрии относительно центра канала. Начало координат совмещено с центром канала. Бесконечно протяженные поверхности электродов параллельны плоскости $y0z$. Ось y направлена вдоль канала, магнитное поле направлено по оси z. В качестве характерного размера выбрано расстояние между электродами $2l$. Остальные обозначения соответствуют работе [1]. Далее используются лишь безразмерные переменные.

Из анализа спектра можно сделать заключение об устойчивости стационарного солитона и состояний с движущимися слоевыми волнами или солитонами. Эти результаты также можно использовать при исследовании влияния внешней электротехнической цепи устройства на устойчивость неоднородных состояний.

Система уравнений для одномерных возмущений $S^+(x,t)$ может быть представлена в виде

(1) $$\partial S^+/\partial t = LS^+$$

$$E_y\equiv E_0=\text{const},\quad j_x\equiv j_0=\text{const},\quad F=F(E_0,\ j_0,\ S_0(x))$$

$$L\equiv\Lambda(S_0(x))\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(S_0(x))\frac{\partial}{\partial x}+F_s'(S_0(x))+$$

$$+U_s'(S_0(x))\frac{dS_0}{dx}+\Lambda_s'(S_0(x))\frac{d^2S_0}{dx^2}$$

В качестве граничных условий для возмущений S^+ полагаем

(2) $$S^+(-1,\ t)=S^+(1,\ t)=0$$

Проведя преобразование

$$\chi^+(x,t)=S^+(x,t)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x}U(S_0(\zeta))\Lambda^{-1}d\zeta\right\}$$

сведем уравнение (1) и граничные уравнения (2) к виду (H — самосопряженный оператор, $\delta(x)$ — дельта-функция)

(3) $$\partial\chi^+/\partial t=H\chi^+,\quad \chi^+(-1,\ t)=\chi^+(1,\ t)=0$$

$$H\equiv\Lambda(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-f(x)+F_2'[\delta(x+l_1)+\delta(x-l_1)]$$

(4) $$f(x)=\begin{cases}F_1'=\text{const}>0, & -1\leqslant x<-l_1,\ l_1<x\leqslant 1\\ F_3'=\text{const}>0, & -l_1<x<l_1\end{cases}$$

$$\Lambda(x)=\begin{cases}\Lambda_1=\text{const}>0, & -1\leqslant x<-l_1,\ l_1<x\leqslant 1\\ \Lambda_2=\text{const}>0, & -l_1<x<l_1\end{cases}$$

$$F_2'=\text{const}>0$$

Полагая $\chi^+(x,\ t)=e^{-pt}\chi(x)$, сведем задачу об устойчивости исходного состояния $S_0(x)$ к нахождению собственных значений оператора H

(5) $$(H+p)\chi=0,\quad \chi(-1)=\chi(1)=0$$

Рассмотрим раздельно спектр симметричных $\chi^{(s)}(x)=\chi^{(s)}(-x)$ и антисимметричных $\chi_{(a)}(x)=-\chi_{(a)}(-x)$ относительно центра канала возмущений

$$\chi^{(s)}(x)=\begin{cases}\chi^{(1)}(x), & -1\leqslant x\leqslant -l_1\\ \chi^{(2)}(x), & -l_1\leqslant x\leqslant l_1,\\ \chi^{(3)}(x), & l_1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\qquad \chi_{(a)}(x)=\begin{cases}\chi_{(1)}(x), & -1\leqslant x\leqslant -l_1\\ \chi_{(2)}(x), & -l_1\leqslant x\leqslant l_1\\ \chi_{(3)}(x), & l_1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

Используя результаты теорем, приведенных в [8,9], имеем $p_0 < p_1 < \ldots < p_k < < \ldots$. При этом собственная функция χ_k, соответствующая собственному значению p_k, имеет k нулей на интервале $(-1, +1)$. Используя (4), получим следующие уравнения для определения собственных значений симметричных и антисимметричных возмущений соответственно:

$$\varkappa_1 \operatorname{ch} \varkappa_3 l_1 \operatorname{ch} \varkappa_1 (1 - l_1) + \varkappa_3 \operatorname{sh} \varkappa_3 l_1$$

$$\operatorname{sh} \varkappa_1 (1 - l_1) = F_2' \operatorname{sh} \varkappa_1 (1 - l_1) \operatorname{ch} \varkappa_3 l_1$$

$$F_2' \operatorname{sh} \varkappa_1 (1 - l_1) \operatorname{sh} \varkappa_3 l_1 = \varkappa_1 \operatorname{ch} \varkappa_1 (1 - l_1) \operatorname{sh} \varkappa_3 l_1 + \\ + \varkappa_3 \operatorname{sh} \varkappa_1 (1 - l_1) \operatorname{ch} \varkappa_3 l_1$$

$$\varkappa_1 = \frac{F_1' - p}{\Lambda_1}, \quad \varkappa_3 = \frac{F_3' - p}{\Lambda_3}, \quad F_k' \equiv F_s'(S_k)$$

$$\Lambda_k = \Lambda(S_k), \quad k = 1, 3$$

Более простой случай, выводы для которого сохраняют силу и в общем случае, получим, полагая

$$\varkappa_1 = \varkappa_3 = \varkappa, \quad \varkappa = \min(\varkappa_1, \varkappa_3)$$

Уравнения для собственных значений симметричных и антисимметричных возмущений имеют вид (6) и (7) соответственно

$$\frac{\varkappa}{F_2'} = \frac{\operatorname{sh} \varkappa (1 - l_1) \operatorname{ch} \varkappa l_1}{\operatorname{ch} \varkappa} \tag{6}$$

$$\frac{\varkappa}{F_2'} = -\frac{\operatorname{sh} \varkappa (1 - l_1) \operatorname{sh} \varkappa l_1}{\operatorname{sh} \varkappa} \tag{7}$$

Из уравнения (6), которое удобно исследовать графически, следует, что может существовать не более одного отрицательного собственного значения p_0, соответствующего возмущению χ_0, нигде на интервале $(-1, +1)$ не образующемуся в нуль. Все остальные собственные значения для симметричных возмущений положительны. Можно показать, используя (7), что собственные значения антисимметричных возмущений не отрицательны и $p_1 \geqslant 0$ соответствует возмущению χ_1, имеющему на интервале $(-1, +1)$ один нуль. Условие отрицательности p_0 может быть представлено в виде

$$F_2' > \sqrt{\frac{4F'}{\Lambda}}, \quad \frac{F'}{\Lambda} = \min\left(\frac{F_1'}{\Lambda_1}, \frac{F_3'}{\Lambda_3}\right) \tag{8}$$

Появление отрицательного собственного значения связано со следующим физическим фактом. Слоевая волна возникает при параметрах Холла, превышающих критический, когда уравнение баланса между джоулевым нагревом и передачей энергии от электронов к тяжелым частицам имеет неоднозначное решение (функция F имеет три корня). Слоевая волна соответствует разрывному переходу из одного устойчивого состояния $(S_1, F_s'(S_1) < 0)$ в другое $(S_3, F_s'(S_3) < 0)$. Структура волны, хотя и вырождается в бесконечно тонкую поверхность при $x = \pm l_1$, соответствует непрерывному переходу из точки S_1 в точку S_3 и поэтому содержит температуры, при которых $F_s' > 0$ и возмущения неустойчивы. Для того, чтобы вся система, состоящая из устойчивых фаз S_1 $(-1 \leqslant x < -l_1, \ l_1 < x \leqslant 1)$, $S_3(-l_1 < x < l_1)$ и неустойчивой фазы S_3 (при $x = -l_1$ и $x = l_1$), была неустойчива, необходимо выполнение условия (8).

Полученные из уравнений (6), (7) выводы о положении точек спектра совпадают со следующим качественным рассмотрением [7]. Можно показать, что функция dS_0/dx удовлетворяет уравнению $L(dS_0/dx) = 0$ и соответствует собственному значению $p = 0$. Строго говоря, dS_0/dx не удовлетворяет граничным условиям (2), но

$$dS_0/dx|_{x=\pm 1} \to 0$$

по мере увеличения размеров канала. Поэтому можно предположить, что одна из собственных функций χ_p пропорциональна dS_0/dx : $\chi_p = \gamma(x) dS_0/dx$. Зная поведение функций $S_0(x)$ и dS_0/dx на интервале $(-1, +1)$ (число экстремумов функции S_0), можно сделать некоторые заключения о том, будет ли $p = 0$ наименьшим собственным значением или нет. Если $p = 0$ не является наименьшим собственным значением, то существует, по крайней мере, одно отрицательное собственное значение $p_0 < 0$. Поскольку S_0, соответствующее слоевой волне, представляет собой разрывное решение (dS_0/dx равняется нулю для целого интервала значений переменной x), то для оценки наименьшего собственного значения необходимо пользоваться строгими результатами, вытекающими из уравнений (6), (7). Действительно, если не выполнено неравенство (8), то в спектре возмущений отсутствуют отрицательные собственные значения, несмотря на то, что исходное состояние со слоевой волной S_0 можно отнести (как это делалось в некоторых задачах [3]) к решению, имеющему один экстремум в канале.

Если стационарное состояние S_0 — солитон, симметричный относительно центра канала (начала координат), то функция S_0 имеет один экстремум ($dS_0/dx = 0$ при $x = 0$). Следовательно, $p_1 = 0$ — собственное значение антисимметричного возмущения $\chi_1 = \gamma(x)\, dS_0/dx$, имеющего один нуль на интервале $(-1, +1)$. В этом случае существует симметричная собственная функция χ_0, не имеющая ни одного нуля на указанном интервале.

Функции χ_0 соответствует отрицательное собственное значение $p_0 < 0$. Если стационарное состояние представляет собой несколько солитонов, то будет существовать несколько отрицательных собственных значений. Очевидно, что наличие отрицательного собственного значения у исходного состояния, соответствующего солитону, связано с появлением интервала значений x, в котором $F_s' > 0$. Более детальные рассуждения, основанные на теоремах работ [8,9], позволяют сделать заключение о зависимости модуля отрицательного собственного значения от ширины солитона (при наличии одного солитона).

Для движущихся одномерных слоевой волны и солитона функция F имеет тот же вид, что и для стационарных волн, поэтому для периодических по переменной $\xi = x + Wt$ решений (с периодом, равным размеру канала) заключения о положении точек спектра одномерных возмущений остаются в силе. Поскольку в случае одной слоевой волны или одного солитона может существовать не более одного отрицательного собственного значения, достаточно просто можно исследовать влияние внешней электротехнической цепи устройства на устойчивость.

Учет неодномерных возмущений $\sim \chi(x, t) \exp i(K_y y + K_z z)$ стационарной слоевой волны приводит к тому, что нейтральная кривая, отделяющая область устойчивости от области неустойчивости, будет функцией параметров Ω, F', Λ, $K = \sqrt{K_y^2 + K_z^2}$, K_z / K_y. Существует критическое значение параметра Холла Ω^+, при превышении которого слоевая волна с поверхностью, параллельной электродной стенке, неустойчива.

Автор благодарит А. А. Бармина и А. Г. Куликовского за полезные обсуждения работы.

Поступила 21 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артемов В. И., Синкевич О. А.* К построению плоских стационарных решений уравнений неравновесной замагниченной плазмы. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
2. *Волков А. Ф., Коган Ш. М.* Физические явления в полупроводниках с отрицательной дифференциальной проводимостью. Успехи физ. наук, 1966, т. 96, № 4.
3. *Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Миронов А. Г.* Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках. М., «Наука», 1972.
4. *Дыхне А. М.* Теория одномерной контракции дуг. В сб.: Некоторые вопросы исследования газоразрядной плазмы и создание сильных магнитных полей. Л., «Наука», 1970.
5. *Витшас А. Ф., Дыхне А. М., Наумов В. Г., Панченко В. П.* Исследование квазиодномерной модели контракции газового разряда. Теплофизика высоких температур, 1971, т. 9, № 2.

6. *Атражев В. М.*, *Якубов И. Т.* Контракция сильно неравновесной плазмы с током. ПМТФ, 1975, № 1.
7. *Knight B. W.*, *Peterson G. A.* Theory of Gunn effect. Phys. Rev., 1967, vol. 155, No. 2.
8. *Коддингтон Э. А.*, *Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
9. *Курант Р.*, *Гильберт Д.* Методы математической физики, т. 1. М.— Л., Гостехиздат, 1933.

УДК 532.529

К РАСЧЕТУ БИНАРНОЙ КОРРЕЛЯТИВНОЙ ФУНКЦИИ В ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЕ

А. М. Головин, В. Е. Чижов

(Москва)

Из простых геометрических соображений получено уравнение для бинарной коррелятивной функции в системе твердых шаров одинакового радиуса. Введение самосогласованным образом эффективного объема, приходящегося на одну частицу, позволяет определить бинарную коррелятивную функцию для систем с малой и умеренной объемной концентрацией частиц. В предельном случае малых объемных концентраций уравнение для бинарной функции совпадает с известным линеаризованным уравнением суперпозиционного приближения Кирквуда [1,2]. Следуя [3], принимаем, что начальное распределение частиц создается так, что положения их центров выбираются последовательно, причем центр каждой новой частицы равновероятно может быть расположен в любой геометрически доступной части области, занятой суспензией.

Экспериментальные данные по относительному распределению шаров в жидкости той же плотности, образующемуся в результате интенсивного встряхивания смеси, приведены в работе [4]. Бинарная коррелятивная функция, полученная в этой работе в результате статистической обработки большого числа измерений взаимных расстояний между центрами шаров, указывает на наличие ближнего порядка в распределении частиц. Основную роль здесь играет геометрический эффект, связанный с непроницаемостью шаров и приводящий к послойному их расположению в окрестности выбранной частицы независимо от характера гидродинамического взаимодействия.

Наблюдения пространственного распределения монодисперсной системы сферических частиц, осаждающихся в жидкости при объемной концентрации 0.025 и числе Рейнольдса для отдельной частицы, равном 0.6, показали [5], что вероятность расположения частиц внутри некоторого объема имела приблизительно биномиальную форму. Это указывает на равновероятность всех положений центра отдельной частицы в геометрически доступной области и свидетельствует о том, что силы гидродинамического взаимодействия между частицами не оказывают определяющего воздействия на вид бинарной коррелятивной функции. Для частиц в вязкой жидкости сравнимой плотности исключение составляет лишь малая область, соответствующая взаимным расстояниям, близким к диаметру частиц.

1. Коррелятивные функции. Рассмотрим систему очень большого числа N_∞ одинаковых частиц (шаров радиуса a), помещенных в объем V_∞. Характеристиками такой системы являются $n = N_\infty / V_\infty$ — число центров шаров в единице объема и $c = {}^4/_3\pi a^3 n$ — объемная концентрация частиц. В системе большого числа хаотически расположенных шаров положение их центров можно определить лишь с некоторой вероятностью. Пусть dW_1 ($\mathbf{x}$) и dW_2 ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$) означают соответственно вероятность обнаружить центр произвольной частицы в окрестности точки $\mathbf{x}$ и центры двух произвольно выбранных частиц в окрестности точек $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$. Далее, пусть dW_1 ($\mathbf{x}_1$; $\mathbf{x}_2$) означает вероятность обнаружить центр выбранной частицы в окрестности точки $\mathbf{x}_1$, когда центр дру-