В отраженной волне имеются две быстро затухающие логарифмические особенности одного знака. По смыслу введенных величин ясно, что длина волны приходящего к каустике сигнала должна быть порядка единицы в безразмерных переменных x и y. Зависимость $u(x)$ при $y = 1$ для $\mu = 1$, $\lambda = 1$ показана на фиг. 2 (кривая 3). Пики увеличения амплитуды сигнала будут совсем узкими. Поэтому в отраженной волне амплитуда сигнала имеет тот же порядок, что и в падающей.

Автор благодарен О. С. Рыжову за постоянное внимание к работе.

Поступила 7 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buchal R. N., Keller J. B.* Boundary layer problems in diffraction theory. Communs Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, No. 1.
2. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
3. *Lighthill M. J.* Reflection at a laminar boundary layer of a weak steady disturbance to a supersonic stream, neglecting viscosity and heat conduction. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, vol. 3, No. 3.
4. *Guiraud J.-P.* Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques et focalisation. J. méc., 1965, t. 4, No. 2.
5. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1967.
6. *Hayes W. D.* Similarity rules for non-linear acoustic propagation through a caustic. Sonic boom research, 1968, NASA SP-180.
7. *Seebass R.* Non-linear acoustic behavior at a caustic. Sonic boom research, 1971, NASA SP-255.
8. *Seebass R., Murman E. M., Krupp J. A.* Finite difference calculation on the behavior of a discontinuous signal near a caustic. Sonic boom research, 1971, NASA SP-255.
9. *Yu N. S., Seebass R.* Computational procedures for mixed equations with shock waves. Proc. Internat. conf. on computational methods in non-linear mechanics. Austin, Texas, 1974.

УДК 534.222.2

О ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ В ПОЛИТРОПНОМ ГАЗЕ

М. Ю. Козманов

(Челябинск)

Рассматривается движение одномерного поршня в покоящемся политропном газе. Получено приближенное представление для ударной волны и течения газа за волной. Работа примыкает к [1].

1. Пусть покоящийся политропный газ с плотностью $\rho = \rho_+(x)$, энтропией $S = S_+(x)$ и уравнением состояния $P = \rho^\gamma S$ находится справа от плоского поршня; $\rho_+(x)$, $S_+(x)$ — аналитические функции.

В момент времени $t = 0$ поршень начинает двигаться по закону

$$x(t) = \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \ldots + \xi_n t^n, \quad \xi_1 > 0$$

В газе распространяется ударная волна.

Ищем приближенное представление для ударной волны в виде

$$x = c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n \tag{1.1}$$

Задача сводится к нахождению $c_1, \ldots, c_n$ по заданному закону движения поршня и поля течения между ударной волной и поршнем.

Покажем возможность последовательного и однозначного определения $c_1, \ldots, c_n$ для любого n, при этом для представления течения между поршнем и ударной волной при небольших значениях t используем ряды

$$(1.2)\qquad u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\,\varphi^k(x, t), \quad \rho = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(t)\,\varphi^k(x, t)$$

$$S = \sum_{k=0} S_k(t)\,\varphi^k(x, t) \quad (\varphi(x, t) = x - c_1 t - \ldots - c_n t^n)$$

Ряды (1.2) отличаются от рядов [1] тем, что $\varphi(x, t) = 0$ — не характеристика, а от рядов Ковалевской [2] тем, что функции $\varphi(x, t)$ заранее не известна.

Схема отыскания коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$ и поля течения такова: представляем сначала коэффициенты u_k, ρ_k, S_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ в рядах (1.2) как функции c_k $(k = 1, \ldots, n)$. После этого коэффициенты c_k $(k = 1, \ldots, n)$ определяются из заданного условия на поршне. Определив c_k $(k = 1, \ldots, n)$, найдем также u_k, ρ_k, S_k $(k = 0, \ldots, n-1)$.

На примере показана работоспособность метода.

Предложенные формулы могут быть использованы для расчета начальной стадии течения газа с последующим применением разностных методов.

Перейдем к подробному изложению.

Течение газа между поршнем и ударной волной удовлетворяет системе уравнений газовой динамики

$$(1.3)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma S\rho^{\gamma-2}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho^{\gamma-1}\frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

Решение системы (1.3) будем искать в виде рядов (1.2), где u_0, ρ_0, S_0 определяются из условий Гюгонио [3]

$$u_0 = (1-h)\,C_0\left(M_0 - \frac{1}{M_0}\right), \quad h = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad M_0 = \frac{D}{C_0}$$

$$\rho_0 = \rho_+ M_0^2\,[(1-h) + hM_0^2]^{-1}$$

$$S_0 = M_0^{-2\gamma} S_+\,[(1+h)M_0^2 - h]\,[(1-h) + hM_0^2]^{\gamma}$$

C_0 — скорость звука в покоящемся газе, D — скорость ударной волны.

Подставляем ряды (1.2) в систему (1.3), приравниваем нулю коэффициенты при степенях φ. Коэффициенты u_k, ρ_k, S_k $(k = 1, \ldots)$ — функции $c_1, \ldots, c_n$ и находятся последовательно как решения системы линейных алгебраических уравнений с определителем

$$\Delta = \det\begin{Vmatrix} \varphi_t' + u_0 & \rho_0 & 0 \\ \gamma\rho_0^{\gamma-2}S_0 & \varphi_t' + u_0 & \rho_0^{\gamma-1} \\ 0 & 0 & \varphi_t' + u_0 \end{Vmatrix}$$

Прямым вычислением можно установить, что в окрестности точки $\{t = 0,\ x = 0\}$ при условии $c_k \neq \infty$ $(k = 2, \ldots, n)$ определитель Δ положителен, так как величина c_1, определенная из условия $u_0(0) = \xi_1$, имеет вид

$$c_1 = \frac{\xi_1}{2(1-h)} + \left[\frac{\xi_1^2}{4(1-h)^2} + C_0^2(0)\right]^{1/2}$$

На поршне выполняется условие ($x(t)$ — закон движения поршня) $u(x(t), t) = \partial x / \partial t$.

Дифференцируя это соотношение по t, получаем систему уравнений, из которой последовательно можно определить все c_j

$$\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} u(x(t), t)\Big|_{t=0} = j!\,\xi_j$$

Подставляя в j-е уравнение вместо u ряд (1.2), получим ($\Psi(c_1, \ldots, c_{j-1})$ — известная функция)

$$\frac{d^{j-1}u_0}{dt^{j-1}} + \frac{d^{j-2}u_1}{dt^{j-2}}(\varphi(x(t), t))_t' + \ldots + (j-1)\,u_{j-1}[(\varphi(x(t), t))_t']^{j-1} +$$
$$+ \Psi(c_1, \ldots, c_{j-1})\,|_{t=0} = j!\,\xi_j$$

Можно показать, что коэффициент при c_j в выражении $u_k(t)\,(\varphi_t'(0, 0))^k$ имеет вид $d_k t^{j-(k+1)}$, d_k — некоторая положительная постоянная. Следовательно, коэффициент при c_j в рассматриваемом уравнении положителен.

Все c_j определяются однозначно.

Теперь рассмотрим случай $n = 2$, когда $\varphi = x - c_1 t - c_2 t^2$. Получим

$$u_1(0) = \left[-\frac{\partial u_0(0)}{\partial t}(u_0(0) - c_1) + \gamma S_0(0)\,\rho_0^{\gamma-1}(0)\frac{\partial \rho_0(0)}{\partial t} + \right. \tag{1.4}$$
$$\left. + \frac{\partial S_0(0)}{\partial t}\rho_0^{\gamma-1}(0)\right][(u_0(0) - c_1)^2 - \gamma S_0(0)\,\rho_0^{\gamma-1}(0)]^{-1}$$

Производные, входящие в выражение для $u_1(0)$, можно представить в виде

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}(0) = a_1 + b_1 c_2, \qquad \frac{\partial \rho_0}{\partial t}(0) = a_2 + b_2 c_2$$
$$\frac{\partial S_0}{\partial t}(0) = a_3 + b_3 c_2$$

Выражения для постоянных a_i, b_i $(i = 1, 2, 3)$ громоздкие, поэтому не приводятся. Заметим, что в случае постоянной плотности ρ_+ величины a_1, a_2, a_3 равны нулю.

Найдем c_2. Из условия на поршне получаем

$$2\xi_2 = \Phi_1(0) + \Phi_2(0)\,c_2$$
$$\Phi_1(0) = f(a_1, a_2, a_3), \qquad \Phi_2(0) = f(b_1, b_2, b_3)$$
$$f(x, y, z) = x + [(c_1 - u_0(0))\,x + \gamma S_0(0)\rho_0^{\gamma-2}(0)y +$$
$$+ \rho_0^{\gamma-1}(0)\,z]\,(u_0(0) - c_1)[(u_0(0) - c_1)^2 - \gamma\rho_0^{\gamma-1}(0)\,S_0(0)]^{-1}$$

Поскольку $\Phi_2(0) > 0$, то c_2 можно определить по формуле

$$c_2 = \frac{2\xi_2 - \Phi_1(0)}{\Phi_2(0)} \tag{1.5}$$

Формула (1.5) позволяет сделать некоторые выводы о характере течения газа за ударной волной.

Если плотность газа ρ_+ постоянна, то ударная волна будет ускоренной в начальный момент $t = 0$ только в случае, когда $\xi_2 \neq 0$; при этом направление ускорения определяется знаком ξ_2. В случае распределенной плотности ударная волна будет ускоренной, если $\xi_2 = 0$. Зависимость ускорения от начальных данных носит сложный характер. Так как величина $\Phi_1(0)$ не зависит от ξ_2, то, полагая $\xi_2 = {}^1/_2\Phi_1(0)$, получим $c_2 = 0$. Несмотря на то, что ускорение поршня при $t = 0$ ненулевое, ускорение ударной волны равно нулю.

Пусть $\xi_1 \to 0$. Посмотрим, что произойдет при этом с ударной волной.

Из условий Гюгонио следует, что $c_1(\xi_1) \to C_0(0)$, $\xi_1 \to 0$. Найдем $\lim c_2(\xi_1)$, $\xi_1 \to 0$. Воспользуемся формулой (1.5). Вычисления показывают, что при $\xi_1 \to 0$

$$a_1 \to 2C_0(0)\frac{\partial C_0}{\partial x}(0)(1 - h), \qquad b_1 \to 2(1 - h)$$

$$C_0^2 \to \gamma\rho_+^{\gamma-1}S_+ = \gamma\rho_+^{-1}, \quad \gamma S_0\rho_0^{\gamma-2}a_2 + a_3\rho_0^{\gamma-1} \to 0$$
$$S_0\rho_0^{\gamma-2}b_2 + b_3\rho_0^{\gamma-1} \to 0, \quad (u_0 - c_1)^2 - \gamma\rho_0^{\gamma-1}S_0 \to 0$$

Отсюда

$$\lim_{\xi_1\to 0} c_2(\xi_1) = \lim_{\xi_1\to 0} \frac{-a_1}{b_1} = C_0(0)\frac{\partial C_0}{\partial x}(0)$$

Заметим, что $C_0(0)$ — скорость, а $C_0(0)\,\partial C_0(0)\,/\,dx$ — ускорение слабого разрыва в начальный момент. Таким образом, ударная волна в рассматриваемом приближении вырождается в слабый разрыв.

Покажем, что в этом случае и течение газа за ударной волной стремится к решению задачи со слабым разрывом [1], т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) \to \frac{-2\xi_2}{C_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,0) \to 2\xi_2, \quad \xi_1 \to 0$$

Из условий на поршне следует

$$2\xi_2 = \frac{\partial u_0(0)}{\partial t} + u_1(0)\,(u_0(0) - c_1)$$

Используя соотношение (1.4), имеем

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = u_1(0) = \frac{2\xi_2 - \partial u_0(0)\,/\,\partial t}{u_0(0) - c_1} \to \frac{2\xi_2}{-C_0}, \quad \xi_1 \to 0$$
$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial t} = \frac{\partial u_0(0)}{\partial t} - u_1(0)\,c_1 \to 2\xi_2, \quad \xi_1 \to 0$$

Пример. Пусть $\rho_+ = S_+ = 1$, $u_+ = 0$, $P = \rho^2 S$, поршень движется по закону $x = 10t + 5t^2$. Ударную волну ищем в виде $x = c_1t + c_2t^2$. Выполнив все необходимые вычисления, получим следующий закон движения для ударной волны:

(1.6) $\qquad x = 15.132t + 4.241t^2.$

Было проведено сравнение решения (1.6) с решением для того же примера по разностному методу до времени $t = 0.5$. Различие результатов при $t < 0.3$ не превосходит 0.1%, при $0.3 < t < 0.5$ меньше 1%.

2. До сих пор рассматривалось только плоское одномерное движение поршня. Будем теперь помимо плоского рассматривать также цилиндрическое и сферическое движения поршня. При этом первое уравнение в системе (1.3) заменится на следующее:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\nu\rho u}{x} = 0$$

($\nu = 0$ — плоское движение, $\nu = 1$ — цилиндрическое, $\nu = 2$ — сферическое).

Пусть поршень движется по закону

$$x = x_0 + \xi_1 t + \ldots + \xi_n t^n$$

x_0, ξ_i ($i = 1, \ldots, n$) — постоянные, $x_0 > 0$, $\xi_1 > 0$ (в п.1 $x_0 = 0$).

Ударную волну, создаваемую поршнем, будем искать в виде $x = x_0 + c_1t + \ldots + c_nt^n$.

Течение газа между поршнем и ударной волной ищем в виде рядов (ρ_0, u_0, S_0 — значения ρ, u, S на ударной волне)

(2.1)
$$\rho = \rho_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(x,t)\,\varphi^k(x,t)$$
$$u = u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)\,\varphi^k(x,t)$$
$$S = S_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} S_k(x,t)\,\varphi^k(x,t)$$
$$(\varphi = x - x_0 - c_1t - \ldots - c_nt^n)$$

Отличие рядов (2.1) от рядов (1.2) заключается в том, что в (2.1) коэффициенты ρ_k, u_k, S_k ($k = 1, \ldots$) зависят не только от t, но и от x. Величины $c_1, \ldots, c_n$, ρ_k, u_k, S_k ($k = 1, \ldots$) отыскиваются точно так же, как и в плоском случае.

Пример. Пусть параметры газа, в котором движется поршень, таковы: $\rho_+ = S_+ = 1$, $P = \rho^2 S$ ($\gamma = 2$). Предположим также, что создаваемая ударная волна – сильная. Тогда, проведя необходимые вычисления, получим следующие выражения для коэффициентов c_1 и c_2:

$$c_1 \doteq 1.5\ \xi_1, \quad c_2 = 0.75\ (\xi_2 - 0.75\nu\xi_1^2) \tag{2.2}$$

Формула (2.2) показывает, что медленнее всего распространяется сферическая волна ($\nu = 2$).

В заключение автор благодарит А. Ф. Сидорова за руководство и помощь.

Поступила 11 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козманов М. Ю.* Метод решения некоторых краевых задач для гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка с двумя переменными. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
3. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., «Наука», 1968.

УДК 533.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

О. А. Синкевич

(Москва)

Исследуется устойчивость неоднородных стационарных распределений температуры электронов (концентрация электронов) и электродинамических параметров (плотность тока и электрическое поле) в канале относительно одномерных возмущений. Получен критерий устойчивости слоевой волны.

Было показано [1], что в канале с неравновесной замагниченной плазмой могут существовать распределения концентрации электронов, представляющие собой однородные области, разделенные стационарными поверхностями разрыва (слоевые волны). При других значениях разности потенциалов на электродах для того же самого состава плазмы в канале могут возникать стационарные солитоны (уединенные волны). Существуют задачи, в которых могут быть использованы решения с бегущими слоевыми волнами или солитонами. Аналогичные распределения параметров среды возникают в задачах, относящихся к полупроводникам [2,3], газовому разряду в неравновесной плазме [4–6]. В данной работе исследуется устойчивость таких неоднородных стационарных состояний по отношению к одномерным возмущениям и показано, что выводы работы [7] нуждаются в уточнении.

Исследуем спектр линейной задачи об устойчивости неоднородного состояния, соответствующего симметрично расположенной относительно центра канала стоячей слоевой волне [1] толщиной $2l_1$ ($S_0(x)$ – безразмерная концентрация электронов; плоскость волны параллельна поверхностям электродов)

$$S_0(x) = \begin{cases} S_1 = \text{const}, & -1 \leqslant x \leqslant -l_1,\ l_1 \leqslant x \leqslant 1 \\ S_2 = \text{const}, & l_2 \leqslant x \leqslant l_1,\ S_1 \neq S_3 \end{cases}$$

(Разрывное решение будем рассматривать как предел непрерывного решения в канале.)