

что аналитическое представление решения задачи о структуре фронта возмущений возможно для граничных точек этого диапазона, а именно

$$(7) \quad z_* = \begin{cases} \sqrt{N_*} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{N_*} - 1}{\sqrt{N_*} + 1}, & n = \frac{1}{2} \\ N_* + \ln(N_* - 1), & n = 1 \end{cases}$$

Для любых промежуточных значений n зависимость $N_*(z_*)$ определяется с помощью численной квадратуры.

График зависимости $N_*(z_*)$, соответствующей первой из формул (7) при $n = 1/2$, показан на фигуре. Штриховой линией выделена асимптотическая кривая внешнего решения, построенного при нулевом противодавлении.

Полученные результаты дают представление о структуре фронта возмущений, проявляющейся при наличии противодавления, малого в сравнении с величиной $\rho_1 U^2$. У одной из границ этой структурной области, имеющей толщину порядка ε^n , значения гидродинамических величин асимптотически приближаются к заданным значениям параметров невозмущенного потока.

Поступила 20 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Шидловский В. П. Сингулярные возмущения при одномерном неустановившемся движении реального газа. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
2. Shidlovsky V. P. Self-similar problems of the one-dimensional, unsteady motion of viscous, heat-conducting gas. Arch. mech. stosowanej, 1974, vol. 26, No. 5, p. 861—869.

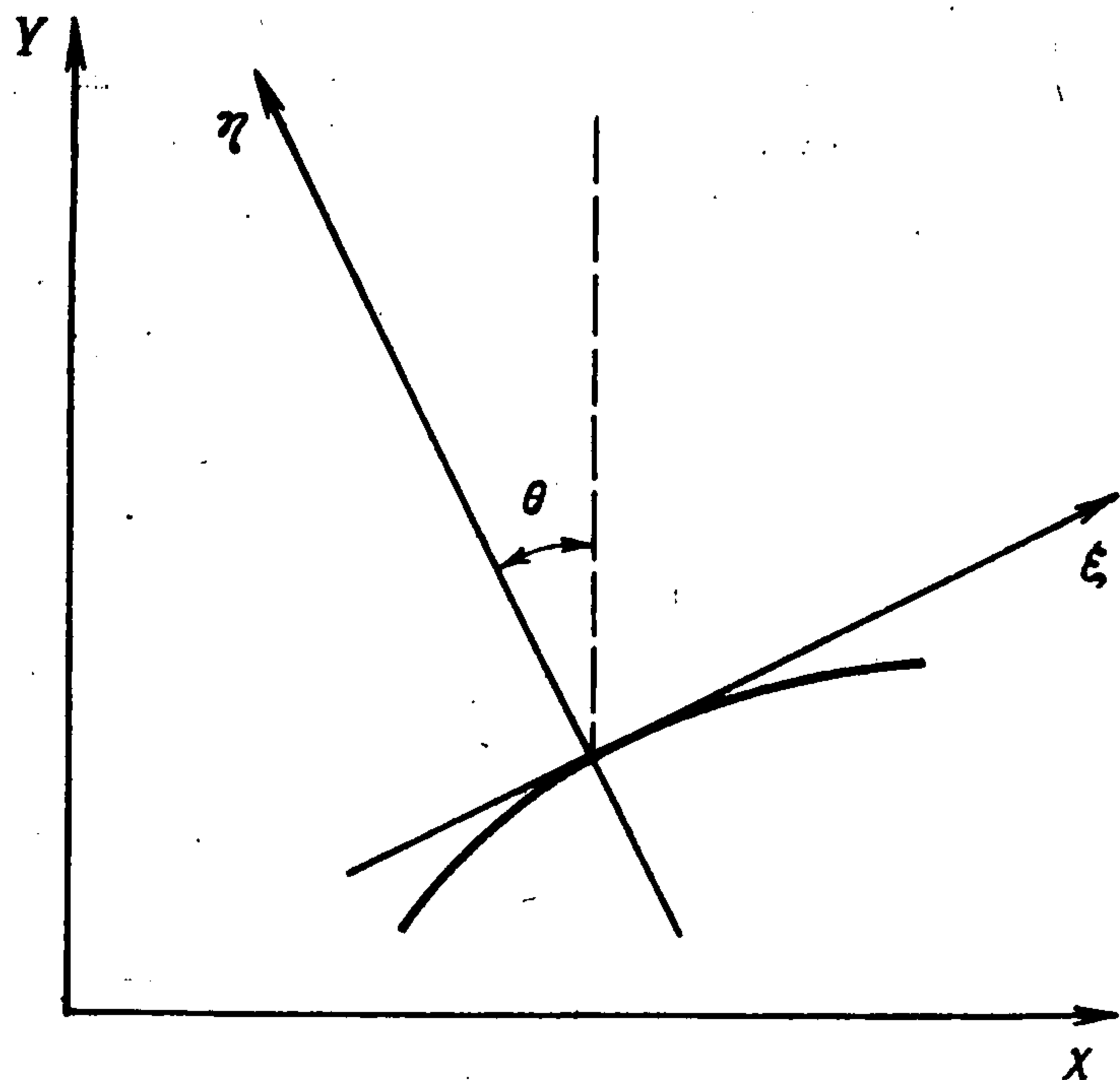
УДК 534.2 : 532

О СТРУКТУРЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ

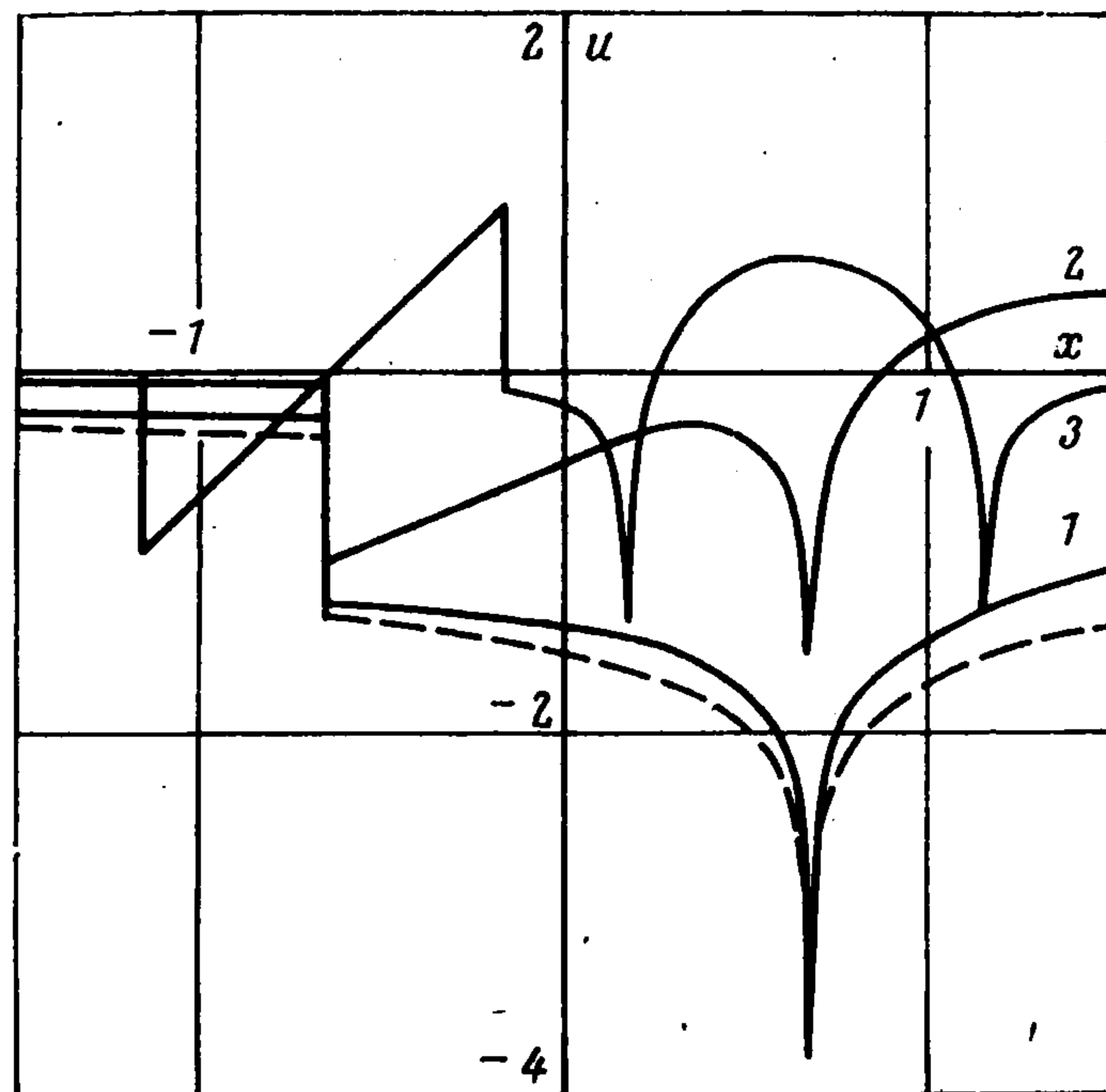
В. А. Еременко

(Москва)

Рассматривается задача об отражении короткой волны от каустики. Выводятся приближенные уравнения, в которых сохранен главный нелинейный член. Для произвольной падающей волны в линейном приближении получено решение, позволяющее описать отраженную волну. Сделан качественный вывод о влиянии длины проходящей волны, содержащей сильный разрыв, на амплитуду отраженного сигнала.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим плоскую задачу о распространении короткой звуковой волны в неоднородной среде. Будем считать, что длина волны λ значительно меньше характерного размера неоднородности среды L . При таких условиях справедливо приближение геометрической акустики. Пусть лучи, вдоль которых распространяется сигнал, имеют огибающую, называемую каустикой. В ее окрестности приближение геометрической акустики несправедливо. Используя метод сращивания внешнего и внутреннего асимптотических разложений, можно построить решение волнового уравнения вблизи каустики [1,2]. При этом толщина пограничного слоя l будет порядка $\lambda (L/\lambda)^{1/3}$. Если в приходящей к каустике волне имеется сильный разрыв, то в решении, описывающем отраженную волну, появится логарифмическая особенность [3] вследствие того, что волновое уравнение само есть линейное приближение уравнений газовой динамики. Но несмотря на это, линейное решение позволяет понять качественную картину течения вблизи каустики и извлечь полезную информацию о характере отражения коротких волн от каустики.

Пусть в декартовых координатах X, Y, t каустика задана уравнениями

$$X = f(t), \quad Y = g(t)$$

Перейдем в естественную для каустики систему координат, движущуюся вдоль нее вместе с волной (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \xi &= (X - f(t)) \cos \theta + (Y - g(t)) \sin \theta \\ \eta &= -(X - f(t)) \sin \theta + (Y - g(t)) \cos \theta \end{aligned}$$

где θ — угол между нормалью к каустике и осью ординат. Ось ξ направлена вдоль каустики против направления движения системы координат, а ось η — по нормали к каустике в сторону приходящей волны.

В этой системе координат уравнения газовой динамики имеют вид (θ' — угловая скорость вращения системы координат, a_c — скорость звука на каустике)

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + (a_c + u + \eta\theta') \frac{\partial p}{\partial \xi} + (v - \xi\theta') \frac{\partial p}{\partial \eta} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} - v\theta' + (a_c + u + \eta\theta') \frac{\partial u}{\partial \xi} + (v - \xi\theta') \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\theta' + (a_c + u + \eta\theta') \frac{\partial v}{\partial \xi} + (v - \xi\theta') \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + (a_c + u + \eta\theta') \frac{\partial S}{\partial \xi} + (v - \xi\theta') \frac{\partial S}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned}$$

Система координат движется вместе с волной, поэтому изменения по времени, вызванные расходимостью лучей, будут пропорциональны величине a_c / L . Изменения же по ξ и η пропорциональны соответственно $1/\lambda$ и $1/l$. Так как $\lambda/L \ll 1$ и $l/L = (\lambda/L)^{2/3} \ll 1$, движение в первом приближении установившееся. Далее считаем, что возмущения всех величин малы, а именно $u \ll a_c$, $v \ll a_c$, $p - p_0 \ll p_0$, $r - r_0 \ll r_0$. Тогда вместо (1) получим в основном порядке

$$(2) \quad \rho a_c \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad \rho a_c \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} = 0$$

Первое уравнение системы (1) в этом приближении дает соотношение, которое является следствием написанных. Из первого и второго уравнений системы (2) получим

$$(3) \quad \partial v / \partial \xi - \partial u / \partial \eta = 0$$

Отсюда видно, что v имеет порядок $u\lambda/l$. Из первого и третьего уравнений системы (2) получим линеаризованный интеграл Бернулли

$$(4) \quad a^2 = a_0^2(\eta) - (\kappa - 1) a_c u$$

Видно, что линии тока в первом приближении совпадают с линиями $\eta = \text{const}$. Заметим, что

$$a_0^2 = a_c^2 + \eta \frac{da_0^2}{d\eta} = a_c^2 - 2a_c^2 \frac{\eta}{R_r}, \quad \theta' = \frac{a_c}{R_c}$$

где R_c и R_r — радиусы кривизны соответственно каустики и лучей. Используя (4) и учитывая это замечание, получим из (1) в следующем порядке:

$$(5) \quad \left(\frac{\kappa + 1}{a_c} u + \frac{\eta}{R} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{1}{R} = 2 \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_r} \right)$$

Уравнения (3) и (5) образуют замкнутую систему. Перепишем их в безразмерных переменных

$$(6) \quad (u' + y) \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 0$$

$$u' = (\kappa + 1) \frac{u}{a_c} \frac{R}{l}, \quad v' = (\kappa + 1) \frac{v}{a_c} \left(\frac{R}{l} \right)^{3/2} x = \xi/\lambda, \quad y = \eta/l$$

Граничные условия для системы (6) получим из геометрической акустики. При больших отрицательных y возмущения u' и v' должны стремиться к нулю. При больших положительных y имеем приходящий к каустике сигнал в виде

$$(7) \quad u' = -\mu y^{-1/4} f(x + 2/3y^{3/2})$$

Величина μ характеризует амплитуду сигнала. Несколько иначе уравнения, аналогичные (6), были получены в работах [4-6].

Система (6) сложна для аналитического исследования. Поэтому для выяснения качественной стороны явления воспользуемся линейной постановкой задачи об отражении волны от каустики. Для этого введем потенциал скоростей и вместо (6) напишем

$$(8) \quad y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Следуя [7], решаем (8) методом преобразования Фурье. Получим

$$(9) \quad \Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} k(\omega) \text{Ai}(-|\omega|^{2/3} y) d\omega$$

где $\text{Ai}(t)$ — функция Эйри, заглухающая по экспоненциальному закону для $t \rightarrow +\infty$.

Из граничного условия (7) имеем

$$k(\omega) = -\sqrt{2\pi} \mu |\omega|^{-5/6} (1 + i \operatorname{sign} \omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega p} f(p) dp$$

Кроме того, из асимптотического поведения (9) при больших y получим отраженную волну в виде

$$(10) \quad u = -\frac{\mu y^{-1/4}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega q} \beta(\omega) d\omega$$

$$\beta(\omega) = -i \operatorname{sign} \omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega p} f(p) dp, \quad q = x - \frac{2}{3} y^{3/2}$$

Таким образом, для любого входного сигнала (7) можем записать отраженный сигнал при помощи формулы (10). Рассмотрим структуру отраженного сигнала в случае приходящей к каустике ударной волны с простирающейся за ней областью равномерного потока. В этом случае

$$f(p) = \theta(p) - \theta(p - \delta)$$

где $\theta(p)$ — функция Хевисайда, δ — достаточно большая постоянная. В работе [7] выписано решение (8) через гипергеометрические функции. Зависимость $u(x)$, полученная из (9), при $y = 1$, для $\delta = 20$, $\mu = 1$ приведена на фиг. 2 штриховой линией. Воспользовавшись формулой (10), получим отраженный сигнал в виде

$$u = \frac{\mu y^{-1/4}}{\pi} (\ln |q| - \ln |q - \delta|)$$

На самом деле, нелинейные члены скажутся именно в окрестности логарифмической особенности и вместо нее в нелинейном решении будет конечное, но весьма существенное увеличение амплитуды сигнала [8,9]. Однако характер решения зависит от длины волны приходящего к каустике сигнала.

Чтобы выяснить, какое влияние оказывает конечная длина волны на структуру отраженного сигнала, рассмотрим падающую волну, форма которой описывается формулой

$$f(p) = \frac{p - \lambda}{\lambda} [\theta(p - \lambda) - \theta(p)]$$

В этом случае отраженная волна имеет вид

$$u = \frac{\mu y^{-1/4}}{\pi} \left(1 + \frac{q - \lambda}{\lambda} \ln \left| \frac{q - \lambda}{q} \right| \right)$$

Видно, что длина отраженной волны будет того же порядка, что и длина падающей волны. Вследствие этого пик увеличения амплитуды сигнала для короткой волны будет существенно уже. Для сравнения на фиг. 2 приведены графики $u(x)$ при $y = 1$ для $\mu = 1$, $\lambda = 20$ (кривая 1) и $\lambda = 1$ (кривая 2). Очевидно, что нелинейные эффекты больше повлияют на узкий пик, чем на широкий. Поэтому в нелинейном решении увеличение амплитуды сигнала будет тем меньше, чем меньше длина волны приходящего к каустике сигнала.

Рассмотрим наиболее интересный в практическом отношении случай, когда приходящий к каустике сигнал имеет форму N -волны. В этом случае

$$f(p) = 2 \frac{p}{\lambda} \left[\theta\left(p - \frac{\lambda}{2}\right) - \theta\left(p + \frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

Отраженная волна описывается формулой

$$u = 2 \frac{\mu y^{-1/4}}{\pi} \left[1 + \frac{q}{\lambda} \left(\ln \left| q - \frac{\lambda}{2} \right| - \ln \left| q + \frac{\lambda}{2} \right| \right) \right]$$

В отраженной волне имеются две быстро затухающие логарифмические особенности одного знака. По смыслу введенных величин ясно, что длина волны приходящего к каустике сигнала должна быть порядка единицы в безразмерных переменных x и y . Зависимость $u(x)$ при $y = 1$ для $\mu = 1$, $\lambda = 1$ показана на фиг. 2 (кривая 3). Пики увеличения амплитуды сигнала будут совсем узкими. Поэтому в отраженной волне амплитуда сигнала имеет тот же порядок, что и в падающей.

Автор благодарен О. С. Рыжову за постоянное внимание к работе.

Поступила 7 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Buchal R. N., Keller J. B. Boundary layer problems in diffraction theory. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1960, vol. 13, No. 1.
2. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
3. Lighthill M. J. Reflection at a laminar boundary layer of a weak steady disturbance to a supersonic stream, neglecting viscosity and heat conduction. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1950, vol. 3, No. 3.
4. Guiraud J.-P. Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques et focalisation. *J. méca.*, 1965, t. 4, No. 2.
5. Багдоев А. Г. Некоторые нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1967.
6. Hayes W. D. Similarity rules for non-linear acoustic propagation through a caustic. *Sonic boom research*, 1968, NASA SP-180.
7. Seebass R. Non-linear acoustic behavior at a caustic. *Sonic boom research*, 1971, NASA SP-255.
8. Seebass R., Murman E. M., Krupp J. A. Finite difference calculation on the behavior of a discontinuous signal near a caustic. *Sonic boom research*, 1971, NASA SP-255.
9. Yu N. S., Seebass R. Computational procedures for mixed equations with shock waves. *Proc. Internat. conf. on computational methods in non-linear mechanics*. Austin, Texas, 1974.

УДК 534.222.2

О ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ В ПОЛИТРОПНОМ ГАЗЕ

М. Ю. Козманов

(Челябинск)

Рассматривается движение одномерного поршня в покоящемся политропном газе. Получено приближенное представление для ударной волны и течения газа за волной. Работа примыкает к [1].

1. Пусть покоящийся политропный газ с плотностью $\rho = \rho_+(x)$, энтропией $S = S_+(x)$ и уравнением состояния $P = \rho^\gamma S$ находится справа от плоского поршня; $\rho_+(x)$, $S_+(x)$ — аналитические функции.

В момент времени $t = 0$ поршень начинает двигаться по закону

$$x(t) = \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \dots + \xi_n t^n, \quad \xi_1 > 0$$

В газе распространяется ударная волна.

Ищем приближенное представление для ударной волны в виде

$$(1.1) \quad x = c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n$$

Задача сводится к нахождению c_1, \dots, c_n по заданному закону движения поршня и поля течения между ударной волной и поршнем.