Границы области на оси U, соответствующей росту возмущений, определяются экстремальными по k_2 значениями U, удовлетворяющими уравнению

$$\operatorname{Im}\omega''(k_2, U) = 0 \tag{7}$$

Пусть при некотором значении $k_2 = k_{20}$ величина U принимает экстремальное значение U_0. Покажем, что на прямой $U = U_0$, лежащей на плоскости U, V, найдется точка, принадлежащая граничной кривой (4). При $k_2 = k_{20}$, $U = U_0$ имеем

$$(\partial \operatorname{Im}\omega''/\partial k_2)_U = 0 \tag{8}$$

Согласно (6) имеем

$$\left(\frac{\partial\omega''}{\partial k_2}\right)_U = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_1}\right)\left(\frac{\partial k_1}{\partial k_2}\right)_U + \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_2}\right)_{k_1} - U\left(\frac{\partial k_1}{\partial k_2}\right) = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_2}\right)_{k_1} \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) следует, что существует V_0, такое, что

$$(\partial\omega/\partial k_2)_{k_1} = V_0, \quad \operatorname{Im} V_0 = 0 \tag{10}$$

Из действительности k_2 и V_0, а также из равенства (7) следует выполнение равенства (4) для значений U_0, V_0, т. е. эта точка принадлежит граничной кривой.

Покажем теперь, что в точке U_0, V_0 прямая $U = U_0$ касается граничной кривой (4). Действительно, производная от $\operatorname{Im}\omega'$ вдоль направления V может быть равна нулю только при условии, что кривая (4) имеет вертикальную касательную. Используя равенства (2) и (3), получим

$$\left(\frac{\partial \operatorname{Im}\omega'}{\partial V}\right)_U = \operatorname{Im}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_1}\right)_{k_2}\left(\frac{\partial k_1}{\partial V}\right)_U + \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_2}\right)_{k_1}\left(\frac{\partial k_2}{\partial V}\right)_U - k_2 - U\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial k_1}{\partial V}\right)_U - V\left(\frac{\partial k_2}{\partial V}\right)U\right] = -\operatorname{Im} k_2$$

Рассматривая прямые, ограничивающие области роста одномерных возмущений всевозможных ориентаций, получим в качестве огибающей кривую (4).

Поступила 14 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dysthe K. B.* Convective and absolute instability. Nucl. Fusion, 1966, vol. 6, No. 3, p. 215.
2. *Файнберг Я. Б., Курилко В. И., Шапиро В. Д.* К вопросу о характере неустойчивостей при взаимодействии пучков заряженных частиц с плазмой. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, вып. 6.
3. *Евграфов М. А., Постников М. М.* Асимптотика функций Грина параболических и эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. Матем. сб., 1970, т. 82, № 1.

УДК 533.6.011

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ НА ОДНОМЕРНОЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА

В. П. Шидловский

(Москва)

Один из возможных подходов к исследованию одномерных неустановившихся течений вязкого и теплопроводного газа связан с предположением об отсутствии противодавления и, в качестве следствия этого, с существованием поверхности слабого разрыва — фронта возмущений [1]. Фронт возмущений возникает только тогда, когда скорость звука в невозмущенной области строго равна нулю. Как будет показано ниже, если эта скорость звука отлична от нуля, но достаточно мала в сравнении со средней скоростью распространения возмущений, асимптотический анализ позволяет заменить слабый разрыв некоторой структурной областью плавного изменения гидродинамических параметров, тем самым осуществляя учет влияния противодавления. Определяется порядок толщины указанной выше переходной области, а задача о течении внутри нее сводится к одной квадратуре, в некоторых случаях вычисляемой аналитически.

Рассмотрим одномерное неустановившееся движение вязкого и теплопроводного газа. Газ считается совершенным, имеющим постоянное число Прандтля σ, отношение теплоемкостей $\varkappa$ и показатель степени n в законе зависимости вязкости от температуры. Вначале предположим, что существует некоторая область невозмущенного состояния (относящиеся к ней параметры обозначаются индексом единица), где газ покоится при нулевых значениях температуры и давления. Тогда область возмущенного движения ограничивается фронтом возмущений $r = r_f(t)$, обладающим конечной скоростью $U = dr_f / dt$.

Пользуясь общепринятыми обозначениями для размерных гидродинамических параметров, запишем уравнения Навье — Стокса в безразмерной форме (см. [1]), вводя вместо r и t новые аргументы.

$$\eta = \frac{r}{r_f}, \quad \chi = \frac{\mu_0 U^{2n-1}}{\rho_1 [(\varkappa - 1) c_v T_0]^n r_f}$$

где индекс нуль соответствует некоторому стандартному состоянию, принятому за начальное.

Приведение искомых величин к безразмерной форме осуществляется по формулам

$$v = UV(\eta, \chi), \quad \rho = \rho_1 R(\eta, \chi), \quad p = \rho_1 U^2 P(\eta, \chi)$$

$$T = c_v^{-1} (\varkappa - 1)^{-1} U^2 N(\eta, \chi), \quad \mu = \chi \rho_1 r_f U N^n(\eta, \chi)$$

В новых переменных уравнения Навье — Стокса имеют вид

$$(1) \qquad (V - \eta)\frac{\partial R}{\partial \eta} + K\chi \frac{\partial R}{\partial \chi} + R\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\nu - 1}{\eta} RV = 0$$

$$R\left[ZV + (V - \eta)\frac{\partial V}{\partial \eta} + K\chi\frac{\partial V}{\partial \chi}\right] + \frac{\partial P}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{4}{3}\chi\frac{\partial}{\partial \eta}\left[N^n\left(\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\nu - 1}{2}\frac{V}{\eta}\right)\right] + 2(\nu - 1)\chi\frac{N^n}{\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{V}{\eta}\right)$$

$$R\left[2ZN + (V - \eta)\frac{\partial N}{\partial \eta} + K\chi\frac{\partial N}{\partial \chi} + (\varkappa - 1)N\left(\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\nu - 1}{\eta}V\right)\right] =$$

$$= \frac{\varkappa}{\sigma}\chi\eta^{1-\nu}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta^{\nu-1}N^n\frac{\partial N}{\partial \eta}\right) + 2(\varkappa - 1)\chi N^n\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 + (\nu - 1)\frac{V^2}{\eta^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\left[\frac{\partial V}{\partial \eta} + (\nu - 1)\frac{V}{\eta}\right]^2\right\}, \quad P = RN$$

$$Z(\chi) = r_f (dU / dt) / U^2, \quad K(\chi) = (2n - 1)Z(\chi) - 1$$

где параметр ν характеризует тип симметрии ($\nu = 1, 2, 3$).

Если снять первоначальное допущение об отсутствии противодавления, то, вообще говоря, возмущения будут распространяться неограниченно далеко и понятие фронта возмущений теряет первоначальный смысл. Однако во многих случаях можно не отказываться от употребления функций $r_f(t)$ и $U(t)$, интерпретируя их как среднее расстояние и среднюю скорость распространения возмущений.

Пусть противодавление p_1 отлично от нуля, однако остается существенно меньше величины $\rho_1 U^2$, так что $P_1 = \varepsilon\ (\varepsilon \ll 1)$. Величину ε можно интерпретировать как отношение квадрата скорости звука в невозмущенном газе к квадрату средней скорости распространения возмущений, предполагаемое здесь малым.

Воспользуемся теперь методом асимптотического исследования, рассматривая окрестность поверхности $\eta = 1$ как область, имеющую определенный порядок малости по ε. Строящееся для этой области решение подлежит асимптотическому сращиванию, с одной стороны,— с имеющимся решением для внешней области движения, где $\varepsilon = 0$, $\eta \to 1$, а с другой стороны,— с решением для внешней области покоя, где $P \to \varepsilon$.

Проведем замену переменных

$$P = \varepsilon P_*, \quad N = \varepsilon N_*, \quad V = \varepsilon^\alpha V_*, \quad \eta = 1 - \varepsilon^\beta z_*^\circ \tag{2}$$

и подберем постоянные показатели α и β, исходя из условий сращивания с внешней областью потока. При $z_*^\circ \to \infty$ решение, выраженное в терминах функций с индексом звездочка, должно сращиваться с предельной формой решения, полученного без учета противодавления при $1 - \eta \to 0$. Воспользуемся асимптотическими формулами для этой области, пригодными в случае $\zeta = 3\varkappa / (4\sigma) > 1$ (см. [2])

$$N = P = A_N (1 - \eta)^{1/n}, \quad V = \zeta (\zeta - 1)^{-1} A_N (1 - \eta)^{1/n} \tag{3}$$

$$A_N = [\sigma n (\varkappa\chi)^{-1}]^{1/n}$$

С учетом (3) условия сращивания дают $\alpha = 1$, $\beta = n$. Тогда подстановка формул (2) в уравнения (1) приводит, после перехода к пределу $\varepsilon \to 0$, к более простым уравнениям, содержащим аргумент χ только как параметр. Желая окончательно исключить из рассмотрения χ, проведем еще одну замену аргумента

$$z_* = z_*^\circ \sigma n / (\varkappa\chi)$$

и получим из (5) следующую систему уравнений:

$$\frac{dR_*}{dz_*} = 0, \quad nN_*^n \frac{dN_*}{dz_*} = N_* - 1 \tag{4}$$

$$\frac{1}{\zeta} nN_*^n \frac{dV_*}{dz_*} = V_* - N_* + 1, \quad P_* = R_* N_*$$

в которой два уравнения (второе и третье) приведены в форме, получаемой после однократного интегрирования с учетом граничных условий при $z_* \to -\infty$.

Полный набор граничных условий для первоначальной системы уравнений в новых переменных имеет вид

$$R_* (-\infty) = P_* (-\infty) = N_* (-\infty) = 1, \quad V_* (-\infty) = 0 \tag{5}$$

$$N_* \to z_*^{1/n}, \quad P_* \to z_*^{1/n}, \quad V_* \to \zeta (\zeta - 1)^{-1} z_*^{1/n} \quad \text{при } z_* \to \infty$$

Формально, перейдя к уравнениям (4), достаточно из числа условий (5) сохранить лишь три: для $R_* (-\infty)$, $N_* (\infty)$ и $V_* (\infty)$.

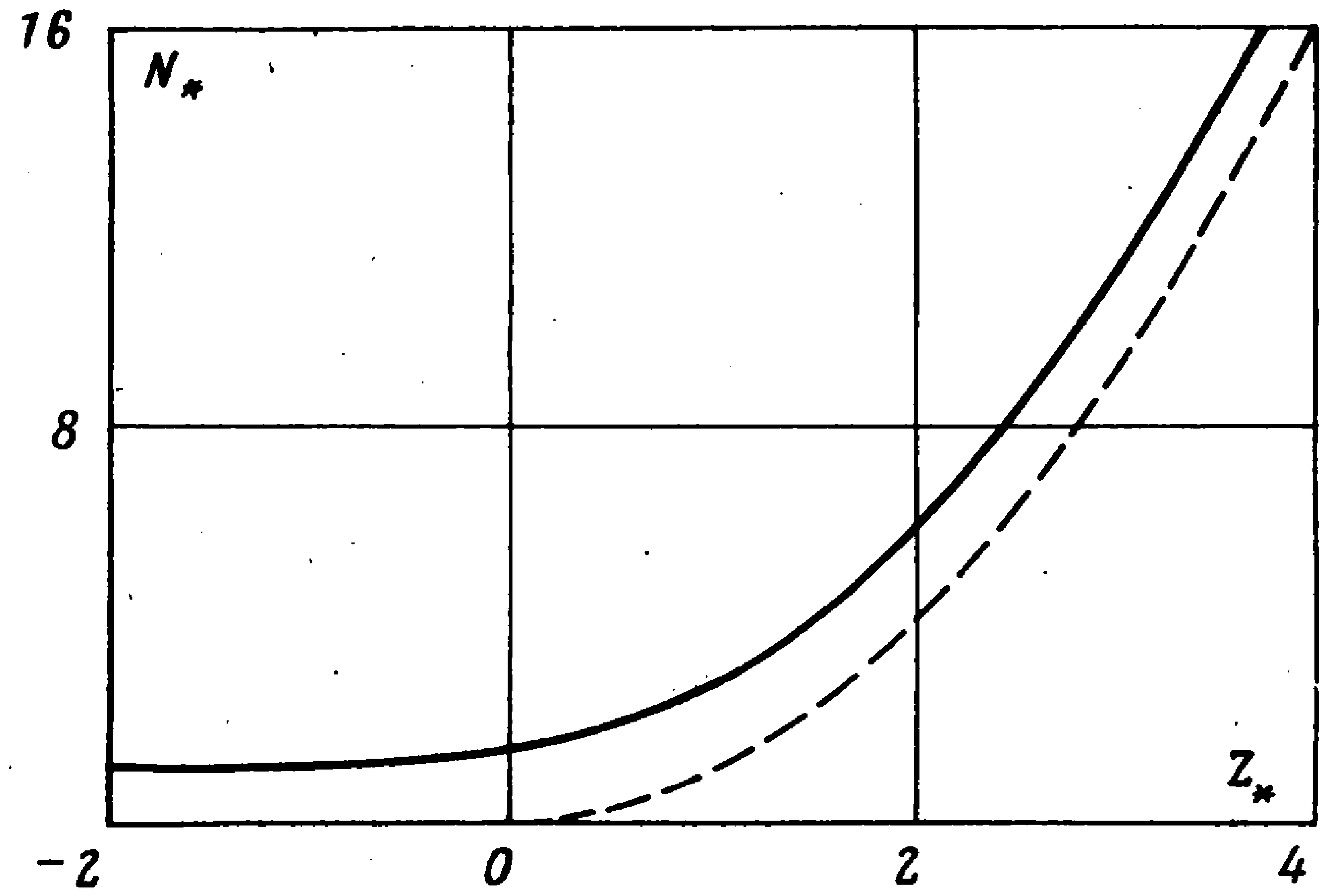
Нетрудно убедиться, что неизвестные R_*, P_* и V_* можно исключить из рассмотрения, полагая

$$R_* \equiv 1, \quad P_* = N_*, \quad V_* = \zeta (\zeta - 1)^{-1} (N_* - 1)$$

Таким образом, задача сводится к решению единственного уравнения первого порядка для N_*, входящего в (4). Заменяя $N_*^n = u$, это уравнение можно переписать в форме

$$\int \frac{u^{1/n} du}{u^{1/n} - 1} = z_* + C \tag{6}$$

где постоянная C должна определяться с учетом условий (5). Интеграл в уравнении (6) выражается в элементарных функциях, если $1 / n = k$, где k — натуральное целое число. Ограничиваясь рассмотрением диапазона значений $^1/_2 \leqslant n \leqslant 1$, найдем,



что аналитическое представление решения задачи о структуре фронта возмущений возможно для граничных точек этого диапазона, а именно

$$z_* = \begin{cases} \sqrt{N_*} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{N_*}-1}{\sqrt{N_*}+1}, & n = \dfrac{1}{2} \\ N_* + \ln(N_* - 1), & n = 1 \end{cases} \tag{7}$$

Для любых промежуточных значений n зависимость $N_*(z_*)$ определяется с помощью численной квадратуры.

График зависимости $N_*(z_*)$, соответствующей первой из формул (7) при $n = 1/2$, показан на фигуре. Штриховой линией выделена асимптотическая кривая внешнего решения, построенного при нулевом противодавлении.

Полученные результаты дают представление о структуре фронта возмущений, проявляющейся при наличии противодавления, малого в сравнении с величиной $\rho_1 U^2$. У одной из границ этой структурной области, имеющей толщину порядка ε^n, значения гидродинамических величин асимптотически приближаются к заданным значениям параметров невозмущенного потока.

Поступила 20 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шидловский В. П.* Сингулярные возмущения при одномерном неустановившемся движении реального газа. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
2. *Shidlovsky V. P.* Self-similar problems of the one-dimensional, unsteady motion of viscous, heat-conducting gas. Arch. mech. stosowanej, 1974, vol. 26, No. 5, p. 861—869.

УДК 534.2 : 532

О СТРУКТУРЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ

В. А. Еременко

(Москва)

Рассматривается задача об отражении короткой волны от каустики. Выводятся приближенные уравнения, в которых сохранен главный нелинейный член. Для произвольной падающей волны в линейном приближении получено решение, позволяющее описать отраженную волну. Сделан качественный вывод о влиянии длины приходящей волны, содержащей сильный разрыв, на амплитуду отраженного сигнала.