Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 532 + 533

О ГРАНИЦАХ ОБЛАСТИ РОСТА НЕОДНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НЕУСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ

В. А. Кондрашев, А. Г. Куликовский

(Москва)

При изучении развития неустойчивости стационарных состояний, не зависящих от координат, большое значение имеет определение границы расширяющейся области, в которой происходит рост возмущений, первоначально заданных в ограниченной области. В частности, знание упомянутых границ позволяет определить, является ли неустойчивость абсолютной или конвективной [1,2]. Ниже будет показано, что граница области, занятой растущими возмущениями в неодномерном случае, может быть получена как огибающая прямых или плоскостей, ограничивающих области, в которых происходит рост одномерных возмущений.

Ограничимся для простоты рассмотрением двумерных возмущений (трехмерные возмущения изучаются аналогично). Как известно, первоначально локализованное возмущение, представленное интегралом Фурье [3]

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ik_1x + ik_2y - i\omega(k_1, k_2)t\right] dk_1dk_2$$

можно оценить вдоль лучей $x = Ut$, $y = Vt$ при $t \to \infty$ с помощью метода перевала [3] согласно формулам

$$\exp\left[t \operatorname{Im} \omega'(U, V) - \ln t\right] \tag{1}$$

$$\omega' = \omega(k_1, k_2) - k_1U - k_2V \tag{2}$$

$$\partial\omega / \partial k_1 = U, \quad \partial\omega / \partial k_2 = V \tag{3}$$

Здесь $\omega = \omega(k_1, k_2)$ — дисперсионное уравнение возмущений. Для получения функции $\omega' = \omega'(U, V)$ значения k_1 и k_2 должны быть найдены из уравнений (3), задающих точки перевала функции $\omega'(k_1, k_2, U, V)$ на комплексных плоскостях k_1 и k_2, и затем подставлены в выражение (2).

Кривая, определяемая уравнением

$$\operatorname{Im} \omega'(U, V) = 0 \tag{4}$$

отделяет область значений U и V, при которых происходит рост возмущений вдоль луча $x = Ut$, $y = Vt$, от области, соответствующей затуханию возмущений.

Рассмотрим одномерные возмущения, соответствующие тому же дисперсионному уравнению, такие, что можно выбрать систему координат так, чтобы $\operatorname{Im} k_2 = 0$. В выбранной системе координат возмущения не имеют пространственного роста вдоль оси y. Действительную величину k_2 будем рассматривать как параметр. Асимптотическое поведение одномерных возмущений вдоль луча $x = Ut$ при $t \to \infty$ имеет вид

$$\exp\left[t \operatorname{Im} \omega''(k_2, U) - {}^1/_2 \ln t\right] \tag{5}$$

$$\omega'' = \omega(k_1, k_2) - k_1U, \quad \partial\omega/\partial k_1 = U \tag{6}$$

Границы области на оси U, соответствующей росту возмущений, определяются экстремальными по k_2 значениями U, удовлетворяющими уравнению

$$\operatorname{Im} \omega'' (k_2, U) = 0 \tag{7}$$

Пусть при некотором значении $k_2 = k_{20}$ величина U принимает экстремальное значение U_0. Покажем, что на прямой $U = U_0$, лежащей на плоскости U, V, найдется точка, принадлежащая граничной кривой (4). При $k_2 = k_{20}$, $U = U_0$ имеем

$$(\partial \operatorname{Im} \omega''/\partial k_2)_U = 0 \tag{8}$$

Согласно (6) имеем

$$\left(\frac{\partial \omega''}{\partial k_2}\right)_U = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_1}\right)\left(\frac{\partial k_1}{\partial k_2}\right)_U + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_2}\right)_{k_1} - U\left(\frac{\partial k_1}{\partial k_2}\right) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_2}\right)_{k_1} \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) следует, что существует V_0, такое, что

$$(\partial \omega/\partial k_2)_{k_1} = V_0, \quad \operatorname{Im} V_0 = 0 \tag{10}$$

Из действительности k_2 и V_0, а также из равенства (7) следует выполнение равенства (4) для значений U_0, V_0, т. е. эта точка принадлежит граничной кривой.

Покажем теперь, что в точке U_0, V_0 прямая $U = U_0$ касается граничной кривой (4). Действительно, производная от $\operatorname{Im} \omega'$ вдоль направления V может быть равна нулю только при условии, что кривая (4) имеет вертикальную касательную. Используя равенства (2) и (3), получим

$$\left(\frac{\partial \operatorname{Im} \omega'}{\partial V}\right)_U = \operatorname{Im}\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial k_1}\right)_{k_2}\left(\frac{\partial k_1}{\partial V}\right)_U + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_2}\right)_{k_1}\left(\frac{\partial k_2}{\partial V}\right)_U - k_2 - U \times\right.$$
$$\left.\times \left(\frac{\partial k_1}{\partial V}\right)_U - V\left(\frac{\partial k_2}{\partial V}\right)U\right] = -\operatorname{Im} k_2$$

Рассматривая прямые, ограничивающие области роста одномерных возмущений всевозможных ориентаций, получим в качестве огибающей кривую (4).

Поступила 14 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dysthe K. B.* Convective and absolute instability. Nucl. Fusion, 1966, vol. 6, No. 3, p. 215.
2. *Файнберг Я. Б., Курилко В. И., Шапиро В. Д.* К вопросу о характере неустойчивостей при взаимодействии пучков заряженных частиц с плазмой. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, вып. 6.
3. *Евграфов М. А., Постников М. М.* Асимптотика функций Грина параболических и эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. Матем. сб., 1970, т. 82, № 1.

УДК 533.6.011

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ НА ОДНОМЕРНОЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА

В. П. Шидловский

(Москва)

Один из возможных подходов к исследованию одномерных неустановившихся течений вязкого и теплопроводного газа связан с предположением об отсутствии противодавления и, в качестве следствия этого, с существованием поверхности слабого разрыва — фронта возмущений [1]. Фронт возмущений возникает только тогда, когда скорость звука в невозмущенной области строго равна нулю. Как будет показано