Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.37

ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ

В. Е. Жиров

(Ростов-на-Дону)

Методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений электроупругости исследуются механические и электрические поля для плиты из пьезокерамики. Установлено, что электроупругое состояние плиты можно расчленить на внутреннее и состояние типа пограничного слоя. Определение решения типа пограничного слоя сведено к бесконечной системе. В первом приближении сформулирована краевая задача для определения внутреннего электроупругого состояния плиты.

1. Пусть $\Omega = S \times [-h, h]$ — область, занятая плитой, где S — ее срединная поверхность, $2h$ — толщина, ∂S — граница S, $\Gamma = \partial S \times \times [-h, h]$ — боковая поверхность, $S_\pm$ — торцы плиты, a — характерный линейный размер S. Плита отнесена к декартовой системе координат $ox_1x_2x_3$ с началом в S и осью ox_3, ортогональной S.

Предполагается, что материал предварительно поляризован по толщине плиты, и электроупругие свойства его описываются соотношениями [1]

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= c_{11}^E s_{11} + c_{12}^E s_{22} + c_{13}^E s_{33} - e_{31} E_3 \\
\sigma_{22} &= c_{12}^E s_{11} + c_{11}^E s_{22} + c_{13}^E s_{33} - e_{31} E_3 \\
\sigma_{33} &= c_{13}^E (s_{11} + s_{22}) + c_{33}^E s_{33} - e_{33} E_3 \\
\sigma_{12} &= (c_{11}^E - c_{12}^E) s_{12} = 2c_{66}^E s_{12} \\
\sigma_{i3} &= 2c_{44}^E s_{i3} - e_{15} E_i \\
D_i &= 2e_{15} s_{i3} + \varepsilon_{11}^s E_i \quad (i = 1, 2) \\
D_3 &= e_{31}(s_{11} + s_{22}) + e_{33} s_{33} + \varepsilon_{33}^s E_3
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь c_{ij}^E — модули упругости, e_{ij} — пьезомодули, ε_{ij}^s — диэлектрические проницаемости, E_k — компоненты вектора напряженности электрического поля, D_k — компоненты вектора электрической индукции, σ_{ml} — компоненты тензора напряжений, s_{ml} — компоненты тензора деформаций.

Добавляя к соотношениям (1.1) уравнения равновесия Коши и уравнения Максвелла

(1.2) $\qquad \sigma_{ml,l} = 0, \ D_{k,k} = 0, \ \mathrm{rot}\, \mathbf{E} = 0 \ (\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\, \psi)$, получаем относительно перемещений u_i и электрического потенциала ψ замкнутую систему уравнений, описывающих электроупругое равновесие плиты.

Введем обозначения

$$u_4 = -\psi / d, \quad a_{ij} = c_{ij}^E / c, \quad b_{ij} = e_{ij} d / c, \quad \lambda_{ij} = \varepsilon_{ij}^s d^2 / c$$
$$\xi_k = x_k / a, \ \partial_k = \partial / \partial \xi_k \ (k = 1,\ 2), \ \Delta_0 = \partial_1^2 + \partial_2^2,$$
$$\xi = x_3 / h, \ \varepsilon = h / a$$

Здесь c и d — некоторые характерные параметры материала плиты, имеющие размерности c_{ij}^E и E соответственно; при конкретных расчетах они могут быть выбраны, например, следующим образом: $c = c_{33}^E$, $|d| = |\mathbf{P}|$, где $\mathbf{P}$ — вектор предварительной поляризации керамики.

Будем считать, что внешняя по отношению к плите среда — вакуум. Пусть на торцах плиты выполнены условия

$$\sigma_{i3}|_{S_\pm} = 0, \ i = 1, 2, 3; \ u_4|_{S_+} = \varepsilon^2 a \varphi = \text{const}, \ u_4|_{S_-} = 0 \tag{1.3}$$

а на боковой поверхности заданы напряжения и поверхностная плотность электрических зарядов λ (n, s — местные координаты контура ∂S [2]).

$$\sigma_n|_\Gamma = cN(s, \xi), \quad \sigma_{ns}|_\Gamma = cT(s, \xi)$$
$$\sigma_{n\xi}|_\Gamma = cZ(s, \xi), \quad -D_n|_\Gamma = \frac{c}{d}\lambda(s, \xi)$$

Предполагается, что в граничных условиях (1.3) постоянная φ неизвестна, что соответствует случаю полностью электродированных, но не замкнутых торцов плиты [3]. При этом электроды считаются бесконечно малой толщины, так что их влиянием на упругие свойства плиты можно пренебречь.

2. Для решения поставленной задачи воспользуемся системой решений уравнений электроупругости (1.1), (1.2), которые удовлетворяют следующим однородным условиям на торцах плиты:

$$\sigma_{i3}|_{S_\pm} = 0 \ (i = 1,\ 2,\ 3), \quad u_4|_{S_\pm} = 0$$

В работе [4] методами, изложенными в [5], построена полная система однородных решений для плиты из электроупругого материала с переменными по толщине свойствами. Используя результаты этих работ, приведем систему однородных решений для рассматриваемой задачи.

Бигармоническое решение

$$u_i^{(1)} = a\varepsilon\{\varphi_i - \partial_i[\Phi_1 + P_1\Phi_2 + \varepsilon^2\Delta_0(q_0P_2\Phi_1 + q_2F\Phi_2)]\}, \ i=1,2 \tag{2.1}$$
$$u_3^{(1)} = a\{\Phi_2 + \varepsilon^2\Delta_0[q_1P_1\Phi_1 - q_3(P_2 - P_0)\Phi_2]\}$$
$$u_4^{(1)} = a\varepsilon^2 q_4(P_2 - P_0)\Delta_0\Phi_2$$

Здесь $P_j(\xi)$ — полиномы Лежандра, Φ_1 и Φ_2 — плоские бигармонические функции, φ_1 и φ_2 — сопряженные гармонические функции, связанные с Φ_1 равенством

$$\partial_1\varphi_1 = \partial_2\varphi_2 = \varkappa\Delta_0\Phi_1, \qquad F(\xi) = \xi^3 - 3\xi$$
$$q_0 = -a_{13}(2\varkappa - 1)/(3a_{33}), \quad q_1 = 3q_0$$
$$q_2 = -[(a_{44} + a_{13})g_1 + (b_{15} + b_{31})g_2 + a_{11}]/(6a_{44}), q_3 = q_1/3$$
$$q_4 = g_2/3, \quad \varkappa = (a_{11} - a_{13}^2/a_{33})/(a_{11} + a_{12} - 2a_{13}^2/a_{33})$$
$$g_1 = -(a_{13}\lambda_{33} + b_{31}b_{33})/(b_{33}^2 + a_{33}\lambda_{33}), \quad g_2 = (a_{33}b_{31} -$$
$$- a_{13}b_{33})/(b_{33}^2 + a_{33}\lambda_{33})$$

Потенциальное решение

$$u_i^{(2)} = a\varepsilon^3 \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\xi)\,\partial_i A_k,\ i=1,2;\quad u_3^{(2)} = -a\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(\xi)\,A_k \tag{2.2}$$

$$u_4^{(2)} = a\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2\theta_k(\xi)\,A_k,\quad \operatorname{Re}\gamma_k > 0$$

$$a_k(\xi) = q_5 f_k'' - \gamma_k^2 q_6 f_k + q_7\theta_k'$$

$$\omega_k(\xi) = q_5 f_k''' - (q_6 - 2q_8)\,\gamma_k^2 f_k' + q_7\theta_k'' - q_9\gamma_k^2\theta_k$$

Здесь γ_k — собственные значения, $\{f_k,\ \theta_k\}$ — собственные пары функций (аналог функций Папковича классической теории упругости) спектральной задачи

$$q_5 f^{\mathrm{IV}} + 2(q_8 - q_6)\,\gamma^2 f'' + q_{10}\gamma^4 f + q_7\theta''' + (q_{11} - q_9)\,\gamma^2\theta' = 0 \tag{2.3}$$

$$q_7 f''' + (q_{11} - q_9)\,\gamma^2 f' + q_{12}\theta'' + q_{13}\gamma^2\,\theta = 0$$

$$f(\pm 1) = 0 = f'(\pm 1),\quad \theta(\pm 1) = 0$$

$$q_5 = a_{33}/g,\quad q_6 = a_{13}/g,\quad q_7 = (a_{33}b_{31} - a_{13}b_{33})/g,\quad q_8 = 1/(2a_{44})$$

$$q_9 = b_{15}/a_{44},\quad q_{10} = a_{11}/g,\quad q_{11} = (a_{11}b_{33} - a_{13}b_{31})/g$$

$$q_{12} = \lambda_{33} + b_{33}q_{11} + b_{31}q_7,\quad q_{13} = \lambda_{11} + b_{15}q_9,\quad g = a_{11}a_{33} - a_{13}$$

Функции A_k в (2.2) удовлетворяют соотношению

$$(\varepsilon^2\Delta_0 - \gamma_k^2)\,A_k(\xi_1, \xi_2) = 0$$

Вихревое решение

$$u_1^{(3)} = a\varepsilon^3 \sum_{p=1}^{\infty} t_p(\xi)\,\partial_2 B_p,\quad u_2^{(3)} = -a\varepsilon^3 \sum_{p=1}^{\infty} t_p(\xi)\,\partial_1 B_p \tag{2.4}$$

$$u_3^{(3)} = 0 = u_4^{(3)},\quad \delta_p > 0$$

Здесь

$$a_{44}t_p'' + a_{66}\delta_p^2 t_p = 0,\quad t_p'(\pm 1) = 0$$

$$(\varepsilon^2\Delta_0 - \delta_p^2)\,B_p(\xi_1, \xi_2) = 0$$

Следует отметить, что в отличие от упругого случая [6] спектр $\{\gamma_k\}$ задачи (2.3) зависит от электроупругих свойств материала. Однако для большинства типов пьезокерамики (*PZT*-4, *PZT*-5, *ЦТС*-19 и др.) можно указать некоторые общие особенности его распределения: спектр $\{\gamma_k\}$ дискретен, симметрично расположен в комплексной плоскости и имеет точку сгущения на бесконечности; среди γ_k нет чисто мнимых; при $|\gamma| \to \infty$ ($\operatorname{Re}\gamma > 0$) имеются три асимптоты распределения γ_k, одна из которых вещественная ось, а две другие — прямые $\arg\gamma = \pm\nu$, $\nu \neq 0$.

Приведем формулы асимптотических значений вещественных и комплексных γ_k

$$\gamma_n = [(n-1)\,\pi + r\pi/2 - \alpha]/\mu_1 \tag{2.5}$$

$$\gamma_m = -i\bar{\mu}_2\,\{\ln|G_1 + iG_2| + \arg[(-1)^r(G_1 + iG_2)] + 2(m-1)\,\pi i\}/(2|\mu_2|)$$

$$r = 0,\ 1;\quad n = 1, 2, 3, \ldots;\quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\operatorname{tg}\alpha = G_1 / G_2, \quad G_1 = X_1 \operatorname{Im}(Y_2\bar{Z}_2) / G$$
$$G_2 = \operatorname{Re}[X_2(Y_1\bar{Z}_2 - Z_1\bar{Y}_2)] / G, \quad G = \operatorname{Im}[X_2(Y_1\bar{Z}_2 -$$
$$- Z_1\bar{Y}_2)] - X_1 \operatorname{Im}(Y_2\bar{Z}_2)$$
$$\operatorname{Im}\mu_j > 0, \quad \operatorname{Re}\gamma_k > 0, \quad \operatorname{Im}\gamma_k > 0$$

Связь постоянных μ_j, X_j, Y_j, Z_j с электроупругими характеристиками материала плиты указана в работе [7].

Существенно, что уже первые ($n, m = 1$) значения γ_k, полученные по формулам (2.5), отличаются от точных [8] не более чем на 6%.

Разъясним кратко некоторые свойства однородных решений. Потенциальное и вихревое решения, как следует из формул (2.2) и (2.4), содержат функции A_k и B_p, являющиеся решениями уравнений, содержащих параметр ε^2 при старших производных. Используя свойства спектров $\{\gamma_k\}$ и $\{\delta_p\}$, можно показать, что решения этих уравнений при малых ε имеют характер пограничного слоя, локализованного у границы ∂S [2]. Поэтому потенциальное и вихревое решения быстро убывают по мере удаления от боковой поверхности Г. Таким образом, внутреннее электроупругое состояние плиты определяется бигармоническим решением.

Неоднородность в условии (1.3) можно снять с помощью частного решения вида

$$u_1^{(4)} = 0 = u_2^{(4)}, \quad u_3^{(4)} = \varepsilon^2 a b_{33}\varphi\xi / (2a_{33}), \quad u_4^{(4)} = \varepsilon^2 a\varphi(\xi + 1) / 2$$

Тогда суммарное решение $u_l = u_l^{(1)} + \ldots + u_l^{(4)}$ ($l = 1, 2, 3, 4$) будет удовлетворять уравнениям электроупругости (1.1), (1.2) и граничным условиям (1.3).

3. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности плиты Г, воспользуемся вариационным принципом, сформулированным в [4]. В рассматриваемом случае его можно записать в виде

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad &\iint_\Gamma \Big\{(\sigma_n - N)\Big[a\Big(\delta u_{0n}^{(1)} - \varepsilon P_1 \delta \frac{\partial}{\partial n}\Phi_2\Big) + \delta u_n^{(2)} + \delta u_n^{(3)}\Big] + \\ &+ (\sigma_{ns} - T)\Big[a\Big(\delta u_{0s}^{(1)} + \varepsilon P_1 \frac{\partial}{\partial s}\delta\Phi_2\Big) + \delta u_s^{(2)} + \delta u_s^{(3)}\Big] + \\ &+ (\sigma_{n\xi} - Z)(a\delta\Phi_2 + \delta u_3^{(2)}) - (D_n + \lambda)\,\delta u_4^{(2)}\Big\}\, ds\, d\xi - \\ &- \delta u_4^{(4)} \iint_{S_+} D_\xi\, d\Sigma = 0\end{aligned}$$

Здесь (R — радиус кривизны ∂S)

$$\begin{aligned}\sigma_n = \varepsilon\, &\Big\{{}^1\!/_2\varkappa_1\varphi + 2a_{66}\, Q_n\, [\Phi_1 + P_1\Phi_2 + \varepsilon^2\Delta_0\,(q_0 P_2\Phi_1 + \\ &+ q_2 F\Phi_2)] - \varkappa_2\Delta_0\Phi_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^2 f_k'' A_k - 2\varepsilon^2 a_{66} a_k Q_n A_k) - \\ &- 2\varepsilon^2 a_{66}\sum_{p=1}^{\infty} t_p Q_s B_p\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ns} = \varepsilon\, &\Big\{2a_{66}Q_s\,[\Phi_1 + P_1\Phi_2 + \varepsilon^2\Delta_0\,(q_0P_2\Phi_1 + q_2F\Phi_2)] - \\ &- 2\varepsilon^2 a_{66}\sum_{k=1}^{\infty} a_k Q_s A_k + \sum_{p=1}^{\infty}(a_{44} t_p'' B_p + 2\varepsilon^2 a_{66} t_p Q_n B_p)\Big\}\end{aligned}$$

$$\sigma_{n\xi} = \varepsilon^2\Big[-\varkappa_3\frac{\partial}{\partial n}\Delta_0\Phi_2 - \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2 f_k' \frac{\partial}{\partial n}A_k + a_{44}\sum_{p=1}^{\infty} t_p' \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial s}B_p\Big]$$

$$D_n = \varepsilon^2\left[-\varkappa_4 \frac{\partial}{\partial n}\Delta_0\Phi_2 - \sum_{k=1}^{\infty} d_k(\xi)\frac{\partial}{\partial n}A_k + b_{15}\sum_{p=1}^{\infty} t_p' \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial s}B_p\right]$$

$$D_\xi = \varepsilon\left[\frac{1}{2}\varkappa_5\varphi + \varkappa_6\Delta_0\Phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2(q_7 f_k'' + \gamma_k^2 q_{11} f_k + q_{12}\theta_k')A_k\right]$$

$$u_n^{(2)} + u_n^{(3)} = a\varepsilon^3\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial}{\partial n}A_k + \sum_{p=1}^{\infty} t_p \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial s}B_p\right)$$

$$u_s^{(2)} + u_s^{(3)} = a\varepsilon^3\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial s}A_k - \sum_{p=1}^{\infty} t_p \frac{\partial}{\partial n}B_p\right)$$

$$Q_n(\cdot) = \left(\frac{1}{H^2}\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{a}{RH}\frac{\partial}{\partial n} + \frac{naR'}{H^3R^2}\frac{\partial}{\partial s}\right)(\cdot)$$

$$Q_s(\cdot) = -\left(\frac{1}{H}\frac{\partial^2}{\partial n\,\partial s} - \frac{a}{H^2R}\frac{\partial}{\partial s}\right)(\cdot), \quad H = 1 + naR^{-1}$$

$$\varkappa_1 = (a_{13}b_{33} - a_{33}b_{31})\,/\,a_{33}, \quad \varkappa_2 = a_{11}P_1 + (a_{13}q_3 + b_{31}q_4)P_2'$$

$$\varkappa_3 = 3\,[a_{44}q_2 + (a_{44}q_3 + b_{15}q_4)\,/\,2]\,(\xi^2 - 1), \quad \varkappa_4 = 3\,[b_{15}q_2 + (b_{15}q_3 - \lambda_{11}q_4)\,/\,2]\,(\xi^2 - 1)$$

$$\varkappa_5 = (b_{33}^2 + a_{33}\lambda_{33})\,/\,a_{33}, \quad \varkappa_6 = b_{31}(2\varkappa - 1) + b_{33}q_1$$

$$d_k(\xi) = \gamma_k^2(q_9 f_k' - q_{13}\theta_k)$$

Выбирая в качестве независимых вариации граничных значений функций $u_{0n}^{(1)}$, $u_{0s}^{(1)}$, Φ_2, $\partial\Phi_2\,/\,\partial n$, A_k, B_p и $u_4^{(4)}$, как и в [5], получим соотношения, определяющие граничные условия для функций Φ_i, A_k и B_p и интегральное условие для нахождения наведенной разности потенциалов φ, которая в определенной степени характеризует взаимодействие упругих и электрических полей

(3.2)
$$a_{66}\left[Q_n\left(2\Phi_1 - \varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)}A_k\right)\right]_{n=0} = N_0$$

$$a_{66}\left[Q_s\left(2\Phi_1 - \varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)}A_k\right)\right]_{n=0} = T_0$$

$$\left\{a_{66}\frac{\partial}{\partial s}Q_s\left[\frac{2}{3}\Phi_2 - \frac{8}{5}q_2\varepsilon^2\Delta_0\Phi_2 - \varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)}A_k\right] + \frac{1}{6}(a_{13}g_1 + b_{31}g_2 + a_{11})\frac{\partial}{\partial n}\Delta_0\Phi_2\right\}_{n=0} + \varepsilon a_{44}\sum_{p=1}^{\infty}\delta_p^{-2}t_p^{(0)}(aR^{-1}S_p\beta_p + \varepsilon\beta_p'')' = Z_0 + \frac{\partial}{\partial s}M_{ns}$$

$$\left\{a_{66}Q_n\left[\frac{2}{3}\Phi_2 - \frac{8}{5}q_2\varepsilon^2\Delta_0\Phi_2 - \varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)}A_k\right] - \frac{1}{3}(a_{13}g_1 + b_{31}g_2 + a_{11})\Delta_0\Phi_2\right\}_{n=0} + \varepsilon a_{44}\sum_{p=1}^{\infty}\delta_p^{-2}t_p^{(0)}(S_p\beta_p' - \varepsilon aR^{-1}\beta_p') = M_{nn}$$

$$\left\{2a_{66}\left(S_m{}^*Q_n - \varepsilon\frac{\partial}{\partial s}Q_s\right)[a_m^{(0)}\Phi_1 + a_m^{(1)}\Phi_2 + \varepsilon^2\Delta_0(q_0a_m^{(2)}\Phi_1 + \right.$$
$$\left. + q_2a_m^{(3)}\Phi_2)] - a_m^{(4)}S_m^*\Delta_0\Phi_2 + \varepsilon\omega_m^{(1)}\frac{\partial}{\partial n}\Delta_0\Phi_2 - \varepsilon\gamma_m{}^2\theta_m^{(1)}\frac{\partial}{\partial n}\Delta_0\Phi_2\right\}_{n=0} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k{}^2a_{mk}^{(1)}S_m{}^* + \gamma_k{}^2\omega_{mk}^{(1)}S_k - \gamma_m{}^2\theta_{mk}^{(1)}S_k)\,\alpha_k -$$
$$- 2a_{66}\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}^{(2)}S_m{}^*(aR^{-1}S_k\alpha_k + \varepsilon\alpha_k'') - \varepsilon^2 2a_{66}\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}^{(2)}(S_k\alpha_k' -$$
$$- \varepsilon aR^{-1}\alpha_k')' + 2a_{66}\varepsilon\sum_{p=1}^{\infty}a_{mp}^{(3)}S_m{}^*(S_p\beta_p' - \varepsilon aR^{-1}\beta_p') -$$
$$- \varepsilon a_{66}\sum_{p=1}^{\infty}[-\delta_p{}^2a_{mp}^{(3)}\beta_p' + 2\varepsilon a_{mp}^{(3)}(aR^{-1}S_p\beta_p + \varepsilon\beta_p'')'] -$$
$$- \varepsilon a_{44}\sum_{p=1}^{\infty}\omega_{mp}^{(2)}\beta_p' + \varepsilon b_{15}\gamma_m{}^2\sum_{p=1}^{\infty}\theta_{mp}^{(2)}\beta_p' = S_m{}^*N_m - \varepsilon T_m' - Z_m -$$
$$- \gamma_m{}^2\lambda_m \tag{3.3}$$

$$\left\{2a_{66}\left(S_r{}^*Q_s - \varepsilon\frac{\partial}{\partial s}Q_n\right)\left[\frac{a_{44}}{a_{66}}\delta_r{}^{-2}t_r{}^{(0)}\Phi_2 + \varepsilon^2\Delta_0(q_0t_r{}^{(1)}\Phi_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + q_2t_r{}^{(2)}\Phi_2)\right] - \varepsilon t_r{}^{(3)}\frac{\partial}{\partial s}\Delta_0\Phi_2\right\}_{n=0} + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}[\gamma_k{}^2t_{rk}^{(0)}\alpha_k' -$$
$$- \varepsilon 2a_{66}a_{kr}^{(3)}(aR^{-1}S_k\alpha_k + \varepsilon\alpha_k'')'] + \varepsilon 2a_{66}\sum_{k=1}^{\infty}a_{kr}^{(3)}S_r{}^*(\varepsilon aR^{-1}\alpha_k' -$$
$$- S_k\alpha_k') + S_r{}^*[-a_{66}\delta_r{}^2\beta_r + \varepsilon 2a_{66}(aR^{-1}S_r\beta_r + \varepsilon\beta_r'')] -$$
$$- \varepsilon 2a_{66}(\varepsilon aR^{-1}\beta_r' - S_r\beta_r')' = \varepsilon N_r{}^\circ + S_r{}^*T_r{}^\circ \tag{3.4}$$

$$\varphi = -\frac{2}{\varkappa_5\Pi}\iint\limits_{S_+}\left[\varkappa_6\Delta_0\Phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k{}^2(q_7f_k'' + q_{12}\theta_k')\,A_k\right]d\Sigma \tag{3.5}$$

Здесь

$$a_k^{(i)} = \int_{-1}^{1}a_kP_i\,d\xi,\quad i = 0, 1, 2;\quad a_k{}^{(3)} = \int_{-1}^{1}a_kF\,d\xi,\quad a_m{}^{(4)} = \int_{-1}^{1}\varkappa_2a_m\,d\xi$$

$$a_{mk}^{(1)} = \int_{-1}^{1}f_k''a_m\,d\xi,\quad a_{mk}^{(2)} = \int_{-1}^{1}a_ka_m\,d\xi,\quad a_{mp}^{(3)} = \int_{-1}^{1}t_pa_m\,d\xi$$

$$\omega_m{}^{(1)} = \int_{-1}^{1}\varkappa_3\omega_m\,d\xi,\quad \omega_{mk}^{(1)} = \int_{-1}^{1}f_k'\omega_m\,d\xi,\quad \omega_{mp}^{(2)} = \int_{-1}^{1}t_p'\omega_m\,d\xi$$

$$\theta_m^{(1)} = \int_{-1}^{1}\varkappa_4\theta_m\,d\xi,\quad \theta_{mk}^{(1)} = \int_{-1}^{1}d_k\theta_m\,d\xi,\quad \theta_{mp}^{(2)} = \int_{-1}^{1}t_p'\theta_m\,d\xi,\quad t_p{}^{(0)} = \int_{-1}^{1}t_p'\,d\xi$$

$$t_r{}^{(1)} = \int_{-1}^{1}t_rP_2\,d\xi,\quad t_r{}^{(2)} = \int_{-1}^{1}t_rF\,d\xi,\quad t_r{}^{(3)} = \int_{-1}^{1}\varkappa_2t_r\,d\xi,\quad t_{rk}^{(0)} =$$
$$= \int_{-1}^{1}f_k''t_r\,d\xi$$

$$2\varepsilon N_0 = \int_{-1}^{1} N\,d\xi - \varepsilon\varkappa_1\varphi, \quad 2\varepsilon T_0 = \int_{-1}^{1} T\,d\xi, \quad 2\varepsilon^2 Z_0 = \int_{-1}^{1} Z\,d\xi$$

$$2\varepsilon M_{ns} = \int_{-1}^{1} T\xi\,d\xi, \quad 2\varepsilon M_{nn} = \int_{-1}^{1} N\xi\,d\xi, \quad \varepsilon N_m = \int_{-1}^{1} N a_m\,d\xi - $$

$$-\frac{\varkappa_1}{2} a_m^{(0)}\varphi$$

$$\varepsilon T_m = \int_{-1}^{1} T a_m\,d\xi, \quad \varepsilon^2 Z_m = \int_{-1}^{1} Z\omega_m\,d\xi, \quad \varepsilon^2\lambda_m = \int_{-1}^{1} \lambda\theta_m\,d\xi$$

$$\varepsilon N_r^\circ = \int_{-1}^{1} N t_r\,d\xi, \quad \varepsilon T_r^\circ = \int_{-1}^{1} T t_r\,d\xi$$

$\alpha_k(s)$ и $\beta_p(s)$ — граничные значения функций A_k и B_p на ∂S; S_k — оператор, введенный по правилу [9] $S_k\alpha_k = \varepsilon\partial A_k / \partial n$, S_k^* — ему сопряженный; П — площадь S_+.

Как следует из (3.5), наведенная разность потенциалов φ связана только с бигармонической и потенциальной частями симметричной относительно срединной поверхности деформации плиты. Этот факт становится очевидным в случае обратного пьезоэффекта: приложение электрической разности потенциалов к электродам на торцах плиты не может вызвать деформации изгиба или кручения.

Если при помощи (3.3) и (3.4) исключить из (3.2) функции α_k и β_p, можно получить непосредственно граничные условия для функций Φ_i, которые определяют внутреннее электроупругое состояние плиты.

4. Считая ε малым параметром, решение уравнений (3.2) — (3.5) будем искать в форме следующих рядов [5]:

$$\Phi_i = \Phi_{i0} + \varepsilon\Phi_{i1} + \ldots, \qquad \alpha_k(s) = \alpha_{k0} + \varepsilon\alpha_{k1} + \ldots$$

$$\beta_p(s) = \beta_{p0} + \varepsilon\beta_{p1} + \ldots, \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \ldots$$

При этом предполагаем, что внешние физические факторы на Г представимы в виде

$$N(s, \xi) = \varepsilon(N^{(0)} + \varepsilon N^{(1)} + \ldots), \quad T(s, \xi) = \varepsilon(T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \ldots)$$

$$Z(s, \xi) = \varepsilon^2(Z^{(0)} + \varepsilon Z^{(1)} + \ldots), \quad \lambda(s, \xi) = \varepsilon^2(\lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} + \ldots)$$

и являются достаточно гладкими, медленно меняющимися функциями s.

Используя асимптотические разложения операторов S_k и S_k^* [9], из (3.2) — (3.5) определим граничные условия для функций Φ_i, A_k, B_p и постоянную φ в каждом приближении по ε. В нулевом приближении находим

$$2a_{66}[Q_n\Phi_{10}]_{n=0} = N_0^{(0)}, \quad 2a_{66}[Q_s\Phi_{10}]_{n=0} = T_0^{(0)} \tag{4.1}$$

$$\left[\frac{2}{3} a_{66}\frac{\partial}{\partial s} Q_s\Phi_{20} + \frac{1}{6}(a_{13}g_1 + b_{31}g_2 + a_{11})\frac{\partial}{\partial n}\Delta_0\Phi_{20}\right]_{n=0} = \tag{4.2}$$

$$= Z_0^{(0)} + \frac{\partial}{\partial s} M_{ns}^{(0)}$$

$$\left[\frac{2}{3} a_{66} Q_n\Phi_{20} - \frac{1}{3}(a_{13}g_1 + b_{31}g_2 + a_{11})\Delta_0\Phi_{20}\right]_{n=0} = M_{nn}^{(0)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k{}^2\gamma_m a_{mk}^{(1)} + \gamma_k{}^3\omega_{mk}^{(1)} - \gamma_m{}^2\gamma_k\theta_{mk}^{(1)})\alpha_{k0} = \gamma_m N_m^{(0)} - Z_m^{(0)} - \tag{4.3}$$
$$- \gamma_m{}^2\lambda_m^{(0)} - 2a_{66}\gamma_m [Q_n (a_m^{(0)}\Phi_{10} + a_m^{(1)}\Phi_{20})]_{n=0} + \gamma_m a_m^{(4)} [\Delta_0\Phi_{20}]_{n=0}$$
$$\beta_{r0} = -(a_{66}\delta_r{}^2)^{-1} [T_r{}^{\circ(0)} - 2a_{44}\delta_r{}^{-2}t_r{}^{(0)}Q_s\Phi_{20}]_{n=0}$$
$$\varphi_0 = -\frac{2\varkappa_6}{\varkappa_5\Pi}\iint\limits_{S_+} \Delta_0\Phi_{10}d\varepsilon$$

Таким образом, с погрешностью порядка ε внутреннее электроупругое состояние плиты определяется из краевых задач (4.1) и (4.2), эквивалентных плоской задаче теории упругости и задаче изгиба.

Выражая бигармоническую функцию Φ_1 через аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$

$$4a_{66}\Phi_1 = \bar{z}\varphi + z\bar{\varphi} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}, \quad d\chi/dz = \psi(z) \qquad (z=\xi_1+i\xi_2)$$

условию (4.1) можно придать классический вид [10]

$$d/ds\,(\varphi_0 + z\,\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0) = i\,(X_{n0}{}^{(0)} + iY_{n0}{}^{(0)})$$
$$X_{n0}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (N_0^{(0)}l - T_0^{(0)}m)\,d\xi, \quad Y_{n0}^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (N_0^{(0)}m + T_0^{(0)}l)\,d\xi$$
$$l = \cos(n, \xi_1), \quad m = \cos(n, \xi_2)$$

Видно, что матрица бесконечной системы (4.3) не зависит от нагрузки и геометрии плиты и одинакова во всех приближениях по ε.

Как и в теории упругих плит [3,5,9], потенциальное и вихревое решения в напряжениях σ_n, σ_s, σ_{ns}, а в рассматриваемом случае и в D_ξ, имеют тот же порядок по ε, что и бигармоническое решение. Кроме того, погранслойные решения определяют поведение σ_ξ, $\sigma_{\xi s}$, $\sigma_{\xi n}$, D_n и D_s на Γ, при этом последние оказываются того же порядка по ε, что и σ_n, σ_s, σ_{ns} и D_ξ.

Автор благодарит Ю. А. Устинова за постановку задачи и полезные советы.

Поступила 5 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая акустика, т. 1, ч. А (Под ред. У. Мэзона.). М., «Мир», 1966.
2. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
3. *Holland R., Nisse Eer E. P.* Variational evaluation of admittances of multielectroded three-dimensional piezoelectric structures. IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics, 1968, vol. SU-15, No. 2.
4. *Устинов Ю. А.* Однородные решения и проблема предельного перехода от трехмерных задач к двумерным для плит из электроупругих материалов с переменными свойствами по толщине. Тр. X Всес. конференции по теории оболочек и пластин, т. 1. Кутаиси, 1975. Тбилиси, «Мецниереба», 1975.
5. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г., Устинов Ю. А.* К теории неоднородных по толщине плит. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
6. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
7. *Жиров В. Е., Устинов Ю. А.* Действие локальной нагрузки на плиту из поликристаллического пьезоматериала. Тр. X Всес. конференции по теории оболочек и пластин, т. 1. Кутаиси, 1975. Тбилиси, «Мецниереба», 1975.
8. *Жиров В. Е., Устинов Ю. А.* Некоторые задачи теории плит из электроупругого материала. В сб.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып. 17. Киев, «Наукова думка», 1977.
9. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.