Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3 : 534.231.1

О СТАТИСТИКЕ ПРОДОЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ ТЕЛЕ

А. И. Саичев

(Горький)

Вычисляются вероятностные распределения и спектры плоских нелинейных продольных волн в упругом теле, напряжения в котором линейно зависят от деформаций. Показано, что пространственный спектр сильно нелинейных упругих волн в некотором интервале волновых чисел спадает по степенному закону. Такие инерционные интервалы существуют, как известно, в спектрах многих нелинейных случайных волн, например при турбулентном движении жидкости. Полученный в работе результат указывает на то, что подобный инерционный интервал можно экспериментально обнаружить и в спектрах нелинейно-взаимодействующих упругих волн, сопровождающихся значительными деформациями.

Определению точных выражений для вероятностных распределений и спектров случайных римановых волн посвящены работы [1–6].

1. Рассмотрим плоские продольные волны в упругом теле, подчиняющемся закону Гука. В представлении Лагранжа координата $x(a, t)$ фиксированной частицы тела, имеющей вначале координату a, удовлетворяет в этом случае линейному уравнению (см., например, [7])

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} \tag{1.1}$$

В представлении Эйлера соответствующие поля скоростей $v(x, t)$ и деформаций $J(x, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = c^2 J \frac{\partial J}{\partial x} \\ \frac{\partial J}{\partial t} + v\frac{\partial J}{\partial x} = J\frac{\partial v}{\partial x} \\ v(a, t) = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad J(a, t) = \frac{\partial x}{\partial a} - 1 \end{gathered} \tag{1.2}$$

которые при достаточно больших деформациях существенно нелинейны.

Основная задача данной статьи состоит в точном определении различных статистических характеристик случайных нелинейных полей $v(x, t)$ и $J(x, t)$ по известной статистике их в начальный момент времени. Отыскание статистики, в частности моментов этих полей, с помощью непосредственного усреднения уравнений (1.2), наталкивается на трудности, аналогичные возникающим в проблеме замыкания в теории турбулентности (см., например, [8]). Однако линейность уравнения (1.1) позволяет легко определить статистические свойства случайных упругих волн в представлении

Лагранжа. Оказывается, между статистикой волн самой различной физической природы в лагранжевом и эйлеровом представлениях существуют довольно простые универсальные связи. Пользуясь ими, можно по известной статистике $v(a,t)$, $J(a,t)$ определить искомые статистические свойства полей $v(x, t)$, $J(x, t)$. Такой лагранжев подход и используется в данной статье при анализе статистики нелинейных полей $v(x, t)$ и $J(x, t)$.

2. Приведем некоторые связи между статистикой одномерных случайных волн в лагранжевом и эйлеровом представлениях, которые понадобятся для определения статистики нелинейных упругих волн. Отметим, что подобные связи для турбулентного движения несжимаемой жидкости рассматривались в работах [9-12]. Однако в случае, когда эффекты сжатия существенны ($J \neq 0$), они неприменимы.

Пусть известна плотность вероятности лагранжевых полей v, J и x: $f[v, J, x; a, t]$. Проделав выкладки, аналогичные приведенным в [13], и считая $x(a, t)$ монотонной функцией a, можно показать, что плотность вероятности эйлеровых полей $v(x, t)$, $J(x, t)$ — $w[v, J; x, t]$ связана с f следующим равенством:

$$w[v, J; x, t] = (1 + J) \int_{-\infty}^{\infty} f[v, J, x; at]\, da \tag{2.1}$$

Для нелинейных волн в плазме, в пучках заряженных частиц и многих других характерно образование многопотоковых движений. При этом $x(a, t)$ становится немонотонной функцией a и вместо (2.1) справедлива более общая формула [6, 13]

$$\begin{aligned} |1 + J| \int_{-\infty}^{\infty} f[v, J, x; a, t]\, da = \\ = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x, t) \sum_{n=1}^{N} w[v, J; x, t \mid n, N] \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $w[v, J; x, t \mid n, N]$ — эйлерова плотность вероятности n-го потока при условии, что в точке (x, t) образовалось N потоков. Отсюда среднее число потоков равно

$$\begin{aligned} \langle N(x, t)\rangle = \sum_{N=1}^{\infty} NP(N; x, t) = \\ = \iiint_{-\infty}^{\infty} |1 + J|\, f[v, J, x; a, t]\, da\, dv\, dJ \end{aligned} \tag{2.3}$$

Решением уравнения (1.1) при произвольных начальных условиях также может быть немонотонная функция $x(a, t)$. Однако уравнения (1.1), (1.2) перестают правильно описывать упругие волны еще до того, как $x(a, t)$ становится немонотонной. Поэтому в рассматриваемом случае $\langle N\rangle$ служит мерой справедливости полученных статистических результатов. Будем считать, что полученные ниже выражения достаточно хорошо описывают статистику нелинейных упругих волн пока $\langle N\rangle$ близко к единице и, следовательно, функция $x(a, t)$ практически всюду монотонна.

В дальнейшем будем считать функции $v(x, t)$ и $J(x, t)$ статистически однородными и однозначными по x. При этом формулы (2.1), (2.2) принимают особенно простой вид

$$w[v, J; t] = (1 + J) f[v, J; t] \tag{2.4}$$

Приведем еще выражение для пространственного спектра статистически однородного по x эйлерового поля $v(x, t)$. Запишем его следующим образом:

$$G[\Omega, t] = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \iint\limits_{-X}^{X} \langle v(x_1, t) v(x_2, t)\rangle \exp[i\Omega(x_1 - x_2)]\, dx_1\, dx_2$$

Считая $x(a, t)$ монотонной функцией a и перейдя к интегрированию по лагранжевым координатам, имеем

$$G[\Omega, t] = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \iint\limits_{-A_1}^{A_2} \Big\langle \prod_{j=1}^{2} [1 + J(a, t)]\, v(a_j, t) \times$$
$$\times \exp\{i\Omega[x(a_1, t) - x(a_2, t)]\}\Big\rangle da_1\, da_2$$

где $A_{1,2}$ — решения уравнений $\pm X = x(a, t)$. Поскольку $1 + J = \partial x / \partial a$ и на конечных временах $|X - A| / A \sim 1 / X$ при $X \to \infty$, перепишем последнее равенство так:

$$G[\Omega, t] = \frac{1}{\Omega^2} \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A_1 + A_2} \iint\limits_{-A_1}^{A_2} \Big\langle \frac{\partial v(a_1, t)}{\partial a_1} \frac{\partial v(a_2, t)}{\partial a_2} \times$$
$$\times \exp[i\Omega\, [x(a_1, t) - x(a_2, t]\}\Big\rangle da_1\, da_2$$

Среднее под интегралом из-за статистической однородности зависит только от $s = a_1 - a_2$, поэтому получим окончательно

$$G[\Omega, t] = \frac{1}{\Omega^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big\langle \frac{\partial v(a, t)}{\partial a} \frac{\partial v(a + s, t)}{\partial a} \times \tag{2.5}$$
$$\times \exp\{i\Omega[x(a, t) - x(a + s, t)]\}\Big\rangle ds$$

3. Перейдем к анализу эйлеровой статистики случайных плоских упругих волн. Рассмотрим для определенности случай, когда $J(a, 0) = 0$, а $v(a, 0) = v_0(a)$ — статистически однородная функция, все вероятностные свойства которой известны. При этом

$$x(a, t) = a + \frac{1}{2c} \int\limits_{a-ct}^{a+ct} v_0(s)\, ds \tag{3.1}$$

Найдем вначале одноточечное вероятностное распределение полей $v(x, t)$, $J(x, t)$: $w[v, J; t]$. Согласно (2.4), (3.1) оно связано с начальным двухточечным распределением $v_0(a)$ — $w_0[v_1, v_2; a_1 - a_2]$ по формуле

$$w[v, J; t] = 2(1 + J)\, w_0[v + J, J - v; 2ct]$$

Приведем физические следствия этой формулы — выражения для средней плотности кинетической энергии и среднего квадрата скорости шумовых упругих волн

$$\begin{gathered}{}^1/_2 \langle \rho(x, t)\, v^2(x, t)\rangle = \\ = {}^1/_4 [\langle v_0^2(a)\rangle + \langle v_0(a+ct)\, v_0(a-ct)\rangle]\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\langle v^2(x, t)\rangle = \langle \rho v^2\rangle + \\ + {}^1/_8\, c\, [\langle v_0^2(a+ct)\, v_0(a-ct)\rangle - \langle v_0^2(a-ct)\, v_0(a+ct)\rangle]\end{gathered}$$

Здесь считается для простоты, что плотность тела в недеформированном состоянии всюду равна единице, так что $\rho = 1 / (1 + J)$. Для статистически обратимой или симметрично распределенной относительно $v = 0$ случайной функции $v_0(a)$ $\langle v^2\rangle = \langle \rho v^2\rangle$. При $ct \gg l$, где l — длина корреляции $v_0(a)$, упругие волны стремятся к статистически равновесному состоянию, в котором $\langle v^2(x, \infty)\rangle = \langle v_0^2\rangle / 2$.

Для анализа более сложных статистических характеристик упругих волн, например их спектров, необходимо знать распределение $x(a, t)$ и, следовательно, согласно (3.1), статистику линейного функционала от $v_0(a)$. Эта задача имеет простое решение, если $v_0(a)$ — гауссова случайная функция. Однако при этом с конечной вероятностью $|v_0| > c$ функции $v(x, t)$, $J(x, t)$, удовлетворяющие уравнениям (1.2), становятся неоднозначными функциями x и уже неправильно описывают поведение упругих волн. Тем не менее, если среднее число их потоков $\langle N\rangle$ близко к единице, функция $v(x, t)$ однозначна практически при всех x, и упругие волны достаточно хорошо описываются уравнениями (1.1), (1.2).

Найдем $\langle N\rangle$ для гауссовой $v_0(a)$ с нулевым средним и корреляционной функцией $K[s]$. Как следует из (2.3), при этом

$$\langle N(x, t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{1/\sqrt{D}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + \sqrt{\frac{D}{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{D}\right\}$$

$$D(t) = [K[0] - K[2ct]] / c^2$$

Даже при $D = 2$, когда нелинейность уравнений (1.2) существенна и флуктуации J порядка единицы, $\langle N\rangle \approx 1.17$, т. е. достаточно близко к единице. Поэтому ниже при анализе спектра $v(x, t)$ будем считать $v_0(a)$ гауссовой ($\langle v_0^2\rangle \leqslant 2c^2$).

4. Проанализируем пространственный спектр эйлерова поля скорости плоских упругих волн

$$G[\Omega; t] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle v(x, t)\, v(x+s, t)\rangle \exp\{i\Omega s\}\, ds$$

Чтобы избежать громоздких выкладок, подробно изучим лишь равновесный случай $t \to \infty$. Полагая $v_0(a)$ гауссовой с корреляционной функцией $K[s]$, согласно (2.5) имеем

$$G[\Omega, t] = -\frac{1}{2\Omega^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2K[s]}{ds} \exp\{i\Omega s - B(s)\,\Omega^2\}\, ds + \tag{4.1}$$

$$+\frac{1}{2}\cos 2c\Omega t \exp\left\{-\Omega^2\frac{t}{c}\int\limits_0^\infty K[s]\,ds\right\}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{K[s]-\frac{1}{2c^2}K^2[s]\right\}ds$$

$$B(s)=\frac{1}{2c^2}\int\limits_0^s (s-a)\,K[a]\,da \quad \left(\int\limits_0^\infty K[s]\,ds\neq 0\right)$$

Первое слагаемое здесь описывает спектр волн, бегущих в одну сторону, второе слагаемое — взаимный спектр волн, бегущих в разные стороны. Последний при достаточно больших t сосредоточен в узкой области Ω, уменьшающейся с ростом t. Это обусловлено тем, что даже для практически линейных волн ($K[0]\ll c^2$) эйлерово расстояние между коррелированными значениями бегущих в разные стороны волн отличается от лагранжева $2ct$ на случайную величину, много большую l.

Обсудим спектр волн, бегущих в одну сторону

$$G[\Omega]=-\frac{1}{2\Omega^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2K[s]}{ds^2}\exp\{i\Omega s-B(s)\,\Omega^2\}\,ds \tag{4.2}$$

Его фурье-образом является $\Pi(s)\,\langle v(x,\ t)\,v(x+st)\rangle$, где

$$\Pi(s)=\begin{cases}1, & l\ll|s|\ll ct\\ 0, & |s|\gtrsim ct\end{cases}$$

— функция, обрезающая корреляцию при $s\sim 2ct$. Соответствующий равновесный спектр в случае, когда можно пренебречь нелинейностью уравнений (1.2), или, что то же, отличием лагранжевых от эйлеровых координат, имеет вид

$$G[\Omega]=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K[s]\,e^{i\Omega s}\,ds$$

Этот спектр получим, если пренебрежем в (4.2) членом $B(s)\,\Omega^2$, описывающим отличие лагранжевых координат от эйлеровых. Разлагая правую часть (4.2) в ряд по степеням $B(s)\,\Omega^2$, имеем разложение равновесного спектра скорости по степеням нелинейных взаимодействий. В таком разложении можно ограничиться лишь несколькими первыми членами, если $K[0]\ll c^2$ или $B(l)\,\Omega^2\ll 1$. Полагая в этом разложении $\Omega=0$, получим точное значение спектра в нуле

$$G[0]=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K[s]\,ds+\frac{1}{4c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K^2[s]\,ds$$

Отметим, что для полного спектра (4.1) значение в нуле сохраняется.

Выше была найдена равновесная дисперсия скорости $\langle v^2(x,\ \infty)\rangle = K[0]/2$. Зная ее и $G[0]$, можно определить эффективную длину корреляции волн, бегущих в одну сторону, при $ct\gg l$

$$l_\infty=\frac{G[0]}{\langle v^2(x,\infty)\rangle}=l+\frac{1}{2c^2K[0]}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K^2[s]\,ds$$

Здесь l — длина корреляции $v_0(a)$. Таким образом, нелинейность приводит к уменьшению эффективной ширины спектра $\Omega_\infty = 1 / l_\infty$. Напомним, что ширина спектра римановой волны остается неизменной [4].

При больших Ω ($B(l)\,\Omega^2 \gg 1$) спектр (4.2) спадает по универсальному степенному закону. Вычисляя интеграл в (4.1) методом перевала, имеем

$$\underset{\Omega\to\infty}{G[\Omega]} = \frac{cH}{\Omega^3}\sqrt{\frac{\pi}{K[0]}}\exp\left\{-\frac{c^2}{K[0]}\right\}, \quad H = \left.\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}\right|_{s=0}$$

Аналогичная асимптотика получена для спектра римановых волн в работах [1, 4, 14]. В работе [4] было замечено, что закон $G \sim 1 / \Omega^3$ тесно связан с образованием многопотоковости. Однако формирование степенного спектра происходит еще до образования многопотоковости и присуще любому сильно нелинейному возмущению. Чтобы показать это, рассмотрим спектр в случае, когда $v_0(a) = A\sin(pa + \varphi)$, где φ — случайная фаза, равномерно распределенная в интервале $[0, 2\pi]$. При $A \lesssim c$ волны в стержне будут нелинейными, но всюду однопотоковыми. При этом, как показано ниже, в спектре существует инерционная область, внутри которой он спадает по степенному закону.

После вычислений получим из (2.5)

$$G[\Omega, t] = \frac{\pi}{2}A^2\cos^2 pct \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{b(n, t)}{n^2}\delta(\Omega - pn)$$

$$b(n, t) = J_{n+1}^2(nz) + J_{n-1}^2(nz) + 2J_{n+2}(nz)\,J_{n-2}(nz)$$
$$z = (A / c)\sin pct$$

В области $1 \ll n \ll 1 / (1 - z)$ имеем $b(n, t) \sim 1/\sqrt{n}$ [15], так что $G[n, t] \sim n^{-5/2}$ спадает по степенному закону. При $n(1 - z) \gtrsim 1$ функция $b(n, t)$ спадает по экспоненциальному закону.

В заключение приведем один случай, когда интеграл в (4.2) вычисляется точно. Пусть

$$K[s] = \begin{cases}(k / h)(h - |s|), & |s| \leqslant h\\ 0, & |s| > h\end{cases}$$

Тогда

$$G[\Omega] = \frac{k}{h\Omega^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{\Omega^2 h^2 k^2}{6c^2}\right)\cos\Omega h\right]$$

Здесь $G[\Omega]$ при $\Omega \to \infty$ также спадает по степенному закону $G \sim 1 / \Omega^2$, но в данном случае он обусловлен не нелинейностью уравнений (1.2), а недифференцируемостью начальной скорости $v_0(a)$. При $k \to 0$ спектр $G[\Omega]$ переходит в равновесный спектр линеаризованных уравнений.

Автор благодарит А. Н. Малахова и С. Н. Гурбатова за полезные обсуждения.

Поступила 27 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руденко О. В., Чиркин А. С.* О нелинейной трансформации спектров случайных волновых полей. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 5.
2. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.

3. *Руденко О. В., Чиркин А. С.* Теория нелинейного взаимодействия монохроматических и шумовых волн в слабодиспергирующих средах. ЖЭТФ, 1974, т. 67, вып. 5.
4. *Саичев А. И.* О спектрах некоторых случайных волн, распространяющихся в нелинейных средах. Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 7.
5. *Малахов А. Н., Саичев А. И.* К вопросу о кинетических уравнениях в теории случайных волн. Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 5.
6. *Малахов А. Н., Саичев А. И.* О вероятностном описании случайных полей, удовлетворяющих простейшим уравнениям гидродинамического типа. ЖЭТФ, 1974, т. 67, вып. 3.
7. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
8. *Крейчнан Р. Х.* Проблема замыкания в теории турбулентности. В сб.: Гидродинамическая неустойчивость. М., «Мир», 1964.
9. *Lumley J. L.* An approach to the Eulerian — Lagrangian problem. J. Math. Phys., 1962, vol. 3, No. 2, p. 309.
10. *Монин А. С.* О лагранжевых характеристиках турбулентности. Докл. АН СССР, 1960, т. 134, № 2.
11. *Любимов Б. Я.* Лагранжево описание динамики турбулентного движения. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 5.
12. *Новиков Е. А.* Связь лагранжевого и эйлерового описаний турбулентности. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
13. *Малахов А. Н., Саичев А. И.* О лагранжевом и эйлеровом описании статистических свойств световых волн. Изв. вузов. Радиофизика, 1976, т. 19, № 9.
14. *Кузнецов В. П.* О спектрах интенсивных шумов. Акуст. ж., 1970, т. 16, вып. 1.
15. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.