

## К ПРИМЕНЕНИЮ МАРКОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Н. П. Бестужева, А. В. Чигарев

(Воронеж)

Рассматривается применение теории непрерывных марковских процессов к задачам динамического деформирования стохастической упругой среды. Выводятся уравнения для изменения геометрических параметров фронта волны вдоль луча, дополняющие систему динамических уравнений лучевого метода. Исследуются некоторые гипотезы относительно статистических свойств среды, позволяющие выписать для исходной системы уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова (сокращенно ФПК). В частных случаях найдены решения в виде логарифмически нормальных законов распределения интенсивности.

Уравнения, описывающие деформирование стохастически неоднородных сред, статистически нелинейны, поэтому проблема замыкания требует привлечения гипотез относительно статистических свойств рассматриваемых полей [1-5]. Наиболее полное вероятностное описание осуществляется на основе характеристических функционалов, однако методы решения уравнений в вариационных производных разработаны пока недостаточно [5-8]. Аппарат марковских процессов [4,9-11], позволяющий эффективно решать многие задачи для систем с сосредоточенными параметрами, неприменим для распределенных систем.

Использование асимптотических (лучевых) методов [7,8,12-16] при исследовании волновых процессов приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно коэффициентов соответствующих разложений. Исходная система содержит величины, характеризующие изменение геометрии фронта при распространении волны, поэтому необходимо привлечь получаемые на основе вариационного принципа уравнения для геометрических параметров. Полная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно динамических и геометрических характеристик волны нелинейна и зависит от вида неоднородности. Проблема статистического замыкания остается, но при определенных предположениях становится возможным применение теории марковских процессов [4,10]. Необходимым условием использования марковского приближения служит существование малого параметра, выражающего отношение масштаба изменения некоторых функций от упругих коэффициентов к другим характерным размерам динамической задачи. В результате комбинация асимптотических методов с методом уравнения ФПК позволяет достаточно полно исследовать процессы распространения гармонических и нестационарных волн в случайно неоднородных средах определенных типов.

Вопросы применения марковских моделей в задачах электродинамики и теории турбулентности рассматривались в работах [9,11]. При исследовании диффузии лучей в приближении геометрической оптики делалось предположение о малом отклонении лучей от первоначального направления, поэтому не возникала необходимость рассматривать полную систему геометрических характеристик. В [12,15] геометрические переменные задавались приближенно или входили в решение динамических уравнений в виде свободных функций.

Модель среды марковского типа применительно к задаче вычисления упругих эффективных модулей исследовалась в статье [17].

1. Динамика линейной упругой стохастически неоднородной среды описывается уравнениями

$$(1.1) \quad (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \lambda_{,i} u_{j,j} + \mu_{,j} (u_{j,i} + u_{i,j}) - \rho u_i'' = 0$$

$i = 1, 2, 3$

Здесь  $u_i$  — компоненты вектора смещений, индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате  $x_n$ ,  $\lambda(x_n)$ ,  $\mu(x_n)$  — упругие модули, зависящие случайным образом от пространственных координат.

Уравнения (1.1) стохастически нелинейны, и замыкание системы для моментов требует введения дополнительных предположений. Применение методов функций Грина [4], характеристического функционала [6] связано с большими математическими трудностями, а получаемые приближенные решения не всегда физически ясны.

Ищем решение (1.1) в виде лучевого ряда [7, 8, 12-16]

$$(1.2) \quad u_j(x_n, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_j^{(k)} f^{(k)} [t - \tau(x_n)] \quad (f^{(k)} = df^{(k-1)} / dS)$$

где  $t = \tau(x_n)$  — положение волнового фронта  $\Sigma$  в момент времени  $t$ ,  $f^{(0)}(S)$  — функция, имеющая особенность при  $S = 0$ .

Для гармонических волн, когда

$$u_j(x_n, t) = v_j(x_n, \gamma) \exp [i\gamma(t - \tau)]$$

а для  $v_j(x_n, \gamma)$  имеем следующий асимптотический ряд по обратным степеням частоты  $\gamma$ :

$$v_j(x_n, \gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_j^{(k)}(x_n)}{\gamma^k}$$

решение  $u_j(x_n, t)$  также может быть представлено в форме (1.2), причем

$$u_j^{(k)} = i^k v_j^{(k)}, \quad f^{(k)}(S) = \frac{e^{i\gamma S}}{[i\gamma]^k}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Поэтому все дальнейшие исследования, основанные на представлении решения в форме (1.2), будут верны как для нестационарных волн в окрестности волнового фронта, так и для гармонических высокочастотных волн.

Стандартными методами [12, 13] получаем рекуррентные соотношения, которые имеют место между величинами  $u_j^{(k)}$ .

Для продольного лучевого решения

$$(1.3) \quad u_j^{(k)} = u_j^{(k)\perp} + \varphi^{(k)} \tau_{,j}, \quad u_j^{(k)\perp} \perp \tau_{,j}, \quad u_j^{(-2)} = u_j^{(-1)} = 0$$

$$(\tau_{,i})^2 = \frac{1}{c^2}, \quad \rho c^2 = \lambda + 2\mu,$$

$$u_j^{(k)\perp} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho(\lambda + \mu)} [M_j(u_n^{(k-1)}) - L_j(u_n^{(k-2)})]$$

$$\frac{d\varphi^{(k)}}{ds} - \varphi^{(k)} \left( \Omega + \frac{1}{2} \frac{d \ln c}{ds} \right) + \frac{c}{2\sigma} [M_j(u_n^{(k)\perp}) - L_j(u_n^{(k-1)})] \tau_{,i} = 0$$

$$M_j(u_n) = (\lambda + \mu) [u_{i,i}\tau_{,j} + (u_i\tau_{,i})_{,j}] + \mu [u_j\tau_{,ii} + 2u_{j,i}\tau_{,i}] + \\ + \lambda_{,j}u_i\tau_{,i} + \mu_{,i}(u_i\tau_{,j} + u_j\tau_{,i}) \\ L_j(u_n) = (\lambda + \mu) u_{i,ij} + \mu u_{j,ii} + \lambda_{,j}u_{i,i} + \mu_{,i}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Здесь  $\Omega$  — средняя кривизна волнового фронта,  $\rho = \text{const}$  — плотность,  $d/ds$  — производная вдоль луча.

Поперечное лучевое решение удовлетворяет аналогичным соотношениям.

Главный тип разрыва нестационарной волны определяется функцией  $f^{(0)}(t - \tau)$ , а изменение интенсивности как продольного, так и поперечного разрыва вдоль луча описывается уравнением вида

$$(1.4) \quad \frac{d\omega}{ds} - \left( \Omega - \frac{1}{2} \frac{d \ln c}{ds} \right) \omega = 0, \quad \omega = |u_j^{(0)}| \\ c = \sqrt{\Lambda/\rho}, \quad \Lambda_1 = \lambda + 2\mu, \quad \Lambda_2 = \mu$$

Уравнения (1.3), (1.4) содержат в качестве свободной функции величину  $\Omega$ , являющуюся геометрической характеристикой распространяющегося фронта. Ниже будут получены соотношения для изменения геометрических величин вдоль луча.

Представим уравнение волновой поверхности в параметрическом виде  $x_i = x_i(u^\alpha, t)$  ( $\alpha = 1, 2$ ),  $u^\alpha$  — криволинейные поверхностные координаты.

Согласно принципу Ферма [13] нормаль к фронту удовлетворяет соотношениям

$$(1.5) \quad d\mathbf{v}/ds = -g^{\alpha\beta}\tau_\beta (\ln c)_{,\alpha}, \quad d\mathbf{R}/ds = \mathbf{v}$$

где  $\mathbf{v} = \{v_i\}$  — нормаль к  $\Sigma$ ,  $g^{\alpha\beta} = x_\alpha^i x_\beta^i$  — первая квадратичная форма поверхности  $\Sigma$ ,  $\tau_\alpha = \{x_\alpha^i\}$  — вектор, касательный к поверхности вдоль координатной линии  $u^\alpha$ ,  $\mathbf{R} = \{x^i\}$  — радиус-вектор точек поверхности.

Используя известные формулы теории поверхностей

$$x_{\alpha\beta}^i = b_{\alpha\beta}v^i, \quad v_\alpha^i = g^{\beta\gamma}b_{\alpha\beta}x_\gamma^i, \quad v^i v_i = 1, \quad x_\alpha^i v_i = 0$$

получаем уравнения, характеризующие изменения ко- и контравариантных компонент первой и второй квадратичных форм  $\Sigma$  и величины  $\tau_\alpha$  вдоль луча

$$(1.6) \quad db_{\alpha\beta}/ds = (\ln c)_{,\alpha\beta} + (\ln c)_{,\alpha} (\ln c)_{,\beta} - g^{\eta\delta} b_{\alpha\eta} b_{\beta\delta} \\ db^{\alpha\beta}/ds = g^{\alpha\eta} g^{\beta\delta} [(\ln c)_{,\eta\delta} (\ln c)_{,\eta} + (\ln c)_{,\delta}] + 3g_{\eta\delta} b^{\alpha\eta} b^{\beta\delta} \\ dg_{\alpha\beta}/ds = -2b_{\alpha\beta}, \quad dg^{\alpha\beta}/ds = 2b^{\alpha\beta}$$

$$(1.7) \quad d\tau_\alpha/ds = (\ln c)_{,\alpha} \mathbf{v} - g^{\delta\gamma} b_{\delta\alpha} \tau_\gamma$$

Соотношения (1.5) — (1.7) с соответствующими начальными условиями полностью определяют эволюцию геометрии лучей и фронта в процессе распространения.

Вводя инварианты  $2\Omega = b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ ,  $2K = 4\Omega^2 - b_{\alpha\beta}b^{\alpha\beta}$  (средняя и гауссова кривизны) и принимая во внимание равенства (1.6), находим

$$(1.8) \quad d\Omega/ds = 2\Omega^2 - K + c_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}/2c \\ dK/ds = 2\Omega K + 2\Omega c_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}/c - c_{,\alpha\beta}b^{\alpha\beta}/c$$

Запятой в формулах (1.6) — (1.8) обозначается ковариантное дифференцирование.

Соотношения (1.4) — (1.8) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений первого порядка, которая при заданных начальных условиях и известной скорости  $s$  описывает кинематику и динамику нулевого приближения. Для получения решений более высоких порядков необходимо использовать уравнения (1.3).

2. Запишем исходные уравнения (1.3) — (1.8) в форме

$$(2.1) \quad d(\xi_i^{(\alpha\beta)})/ds = \Phi_i(\xi_k^{(\alpha\beta)}, \eta_k^{(\alpha\beta)}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Здесь  $\eta_k^{(\alpha\beta)}$  — случайные функции с известными вероятностными характеристиками. Такими функциями в данной задаче будут  $\ln c$ ,  $d(\ln c)/ds$ ,  $(\ln c)_{,\alpha}$ ,  $(\ln c)_{,\alpha\beta}$ .

Дальнейшие преобразования (2.1) связаны с привлечением соотношений, выражающих случайные функции  $\eta_k^{(\alpha\beta)}$  через вспомогательные функции  $q_i^{(\alpha\beta)}$ , обладающие свойствами: 1)  $q_i^{(\alpha\beta)}(s)$  образуют гауссовское случайное поле, 2)  $\langle q_i^{(\alpha\beta)} \rangle = 0$ , 3)  $\langle q_i^{(\alpha\beta)}(s) q_j^{(\gamma\delta)}(s') \rangle = \delta(s - s') A_{ij}^{(\alpha\beta\gamma\delta)}$ , где  $A_{ij}^{(\alpha\beta\gamma\delta)}$  — величина, характеризующая мощность белого шума  $q_i^{(\alpha\beta)}$  в точках поверхности  $\Sigma$ . Вдоль луча мощность считается постоянной.

Если  $\eta_j^{(\alpha\beta)}(s)$  — стационарные случайные функции  $s$ , имеющие дробно-рациональные спектральные плотности, то уравнения для  $\eta_j$  принимают вид

$$(2.2) \quad d(\eta_j^{(\alpha\beta)})/ds = F_j(\eta_k^{(\alpha\beta)}) + G_j(\eta_k^{(\alpha\beta)}) q_k^{(\alpha\beta)}, \quad j = 1, 2, \dots, l$$

Использование вспомогательных функций с нулевым временем корреляции для описания математической модели стохастически неоднородной среды в форме (2.2) приводит к уравнениям относительно  $\xi_m^{(\alpha\beta)}$ , которые относятся к классам систем, описывающих непрерывные многомерные марковские процессы [4,10].

После перенумерации система (2.1), (2.2) запишется в форме

$$(2.3) \quad d(\xi_m^{(\alpha\beta)})/ds = W_m(\xi_k^{(\alpha\beta)}) + f_m(q_k^{(\alpha\beta)}, \xi_k^{(\alpha\beta)}), \quad m = 1, 2, \dots, l + n$$

Рассмотрим случай  $F_j \equiv 0$ ,  $G_j = 1$

$$(2.4) \quad d(\eta_j^{(\alpha\beta)})/ds = q_j^{(\alpha\beta)}(s)$$

Из (2.4) следует, что возмущения  $\eta_j^{(\alpha\beta)}$  представлены нормальным винеровским процессом [18] с постоянным математическим ожиданием  $\langle \eta_j^{(\alpha\beta)} \rangle = \eta_{j0}^{(\alpha\beta)}$  ( $\eta_{j0}^{(\alpha\beta)}$  — значение  $\eta_j^{(\alpha\beta)}$  при  $s = 0$ ). Для марковских процессов  $\eta_j^{(\alpha\beta)}(s)$  получаем  $\langle q_i^{(\alpha\beta)}(s) \eta_j^{(\gamma\delta)}(s') \rangle = 0$  при  $s' \leq s$  и продольная корреляция, вследствие (2.4) удовлетворяющая уравнению  $d\langle \eta_i^{(\alpha\beta)}(s) \eta_j^{(\gamma\delta)}(s') \rangle/ds = 0$ , имеет вид

$$\langle \eta_i^{(\alpha\beta)}(s) \eta_j^{(\gamma\delta)}(s') \rangle = \langle \eta_i^{(\alpha\beta)}(s') \eta_j^{(\gamma\delta)}(s') \rangle = \eta_{i0}^{(\alpha\beta)} \eta_{j0}^{(\gamma\delta)} + A_{ij}^{(\alpha\beta\gamma\delta)} s'$$

Использование более сложных моделей сводится к задачам получения из белого шума случайных функций с определенными вероятностными характеристиками, которые решаются с помощью формирующего фильтра (2.2) [4,18].

Полная система (2.3), определяющая изменение параметров внутренней геометрии фронта и траектории лучей для винеровской модели,

$$\frac{d(\ln c)_{,\alpha}}{ds} = q_{\alpha}(s), \quad \frac{d(\ln c)_{,\alpha\beta}}{ds} = q_{\alpha\beta}(s)$$

запишется в форме

$$\begin{aligned} (2.5) \quad \xi_i^{(\alpha\beta)} &= \{(\ln c)_{,\alpha}, (\ln c)_{,\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, \mathbf{R}, \mathbf{v}, \tau_{\alpha}\} \\ W_i^{(\alpha\beta)} &= \{0, 0, W', W'', -2b_{\alpha\beta}, 2b^{\alpha\beta}, \mathbf{v}, - \\ &\quad - g^{\alpha\beta}\tau_{\beta}(\ln c)_{,\alpha}, (\ln c)_{,\alpha}\mathbf{v} - g^{\beta\gamma}b_{\delta\alpha}\tau_{\gamma}\} \\ f_i^{(\alpha\beta)} &= \{q_{\alpha}, q_{\alpha\beta}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \\ W' &= (\ln c)_{,\alpha\beta} + (\ln c)_{,\alpha}(\ln c)_{,\beta} - g^{\eta\delta}b_{\alpha\eta}b_{\beta\delta} \\ W'' &= g^{\alpha\eta}g^{\beta\gamma}[(\ln c)_{,\eta\gamma} + (\ln c)_{,\eta}(\ln c)_{,\gamma}] + 3g_{\eta\delta}b^{\alpha\eta}b^{\beta\delta} \end{aligned}$$

Для марковской модели типа (2.4)

$$\begin{aligned} d(\ln c)/ds &= q(s), \quad d(N_{\alpha\beta})/ds = q_{\alpha\beta}(s) \\ N_{\alpha\beta} &= c_{,\alpha\beta}/c = (\ln c)_{,\alpha\beta} + (\ln c)_{,\alpha}(\ln c)_{,\beta} \end{aligned}$$

уравнения для изменения интенсивности приводятся к виду (2.3), где выражения  $\xi_i^{(\alpha\beta)}$ ,  $W_i^{(\alpha\beta)}$ ,  $f_i^{(\alpha\beta)}$  соответственно равны

$$\begin{aligned} (2.6) \quad \xi_i^{(\alpha\beta)} &= \{N_{\alpha\beta}, \chi, b_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}\}, \quad \chi = \ln \omega \\ W_i^{(\alpha\beta)} &= \{0, 1/2 g^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta} - g^{\eta\delta}b_{\alpha\eta}b_{\beta\delta}, -2b_{\alpha\beta}\} \\ f_i^{(\alpha\beta)} &= \{q_{\alpha\beta}, 1/2 q, 0, 0\} \end{aligned}$$

Сведение динамических уравнений (1.3) — (1.8) к схеме марковских процессов, основанное на представлении исходных соотношений в форме (2.3), (2.6), (2.5), и предположения о  $\delta$ -коррелированных свойствах некоторых функций от упругих коэффициентов позволяют использовать методы теории непрерывных марковских процессов [4, 11], согласно которым совместная плотность распределения указанных характеристик удовлетворяет уравнению ФПК.

Считая интенсивность элементом многомерного марковского процесса (2.3), (2.6), запишем уравнение для плотности распределения  $P(\chi, N_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}, s)$

$$\begin{aligned} (2.7) \quad \frac{\partial P}{\partial s} + \Omega \frac{\partial P}{\partial \chi} - 4\Omega P + (N_{\alpha\beta} - g^{\eta\delta}b_{\alpha\eta}b_{\beta\delta}) \frac{\partial P}{\partial b_{\alpha\beta}} - 2b_{\alpha\beta} \frac{\partial P}{\partial g_{\alpha\beta}} - \\ - \pi \left[ D_{11} \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} + (D_{12}^{(\alpha\beta)} + D_{21}^{(\alpha\beta)}) \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial N_{\alpha\beta}} + D_{22}^{(\alpha\beta\gamma\delta)} \frac{\partial^2 P}{\partial N_{\alpha\beta} \partial N_{\gamma\delta}} \right] = 0 \end{aligned}$$

Здесь  $D_{11}$ ,  $D_{12}^{(\alpha\beta)}$ ,  $D_{21}^{(\alpha\beta)}$ ,  $D_{22}^{(\alpha\beta\gamma\delta)}$  — постоянные спектральные плотности возмущений  $d(\ln c)/ds$ ,  $d(N_{\alpha\beta})/ds$ .

Следует отметить, что для негауссовских флуктуаций функций  $q^{(\alpha\beta)}(s)$  принципиально возможно получение уравнения типа ФПК для соответствующего характеристического функционала, введение которого значительно усложняет решение задачи.

Ниже будут приведены решения (2.7) в некоторых частных случаях.

3. Рассмотрим задачу определения плотности вероятности интенсив-

ности волны в случае, когда кривизны фронта — детерминированные функции  $s$ . Последнее условие накладывает ограничения на свойства среды, которая предполагается случайно неоднородной вдоль  $s$  и однородной вдоль фронта.

Решение системы (1.8) примет вид

$$(3.1) \quad \Omega(s) = (\Omega_0 - K_0 s) \kappa(s), \quad K(s) = K_0 \kappa(s) \\ \kappa(s) = (1 - 2\Omega_0 s + K_0 s^2)^{-1}.$$

где  $\Omega_0, K_0$  — соответственно средняя и гауссова кривизны фронта в начальный момент  $s = s_0$ .

Рассмотрим два типа сред: 1)  $d(\ln c)/ds = q(s)$ , 2)  $d(\ln c)/ds = \ln c + q(s)$ . Здесь  $q(s)$  — белый шум с постоянной мощностью  $4N$ . Тогда для винеровской модели 1) логарифм интенсивности удовлетворяет стохастическому уравнению

$$(3.2) \quad d\chi(s)/ds = (\Omega_0 - K_0 s) \kappa(s) - 1/2 q(s)$$

Соответствующее (3.2) уравнение ФПК для плотности распределения вероятности  $P(\chi, s)$  имеет вид

$$(3.3) \quad \frac{\partial P(\chi, s)}{\partial s} + (\Omega_0 - K_0 s) \kappa(s) \frac{\partial P(\chi, s)}{\partial \chi} - \frac{N}{2} \frac{\partial^2 P(\chi, s)}{\partial \chi^2} = 0$$

Решая (3.3) при начальном условии  $P(\chi, 0) = \delta(\chi - \chi_0)$ , где  $\chi_0$  — логарифм начальной интенсивности, находим

$$P(\chi, s) = \sqrt{\frac{1}{2\pi Ns}} \exp \left\{ -\frac{[\chi - \chi_0 - 1/2 \ln \kappa(s)]^2}{2Ns} \right\}$$

Таким образом, для  $\chi$  получаем нормальный закон распределения с математическим ожиданием  $\chi_0 + 1/2 \ln \kappa(s)$  и дисперсией  $Ns$ .

Для вычисления продольной корреляции  $\chi$  умножим уравнение (3.2) на  $\chi(s')$  ( $s' < s$ ) и усредним

$$(3.4) \quad d \langle \chi(s) \chi(s') \rangle / ds = (\Omega_0 - K_0 s) \kappa(s) \langle \chi(s') \rangle + 1/2 \langle q(s) \chi(s') \rangle$$

Учитывая, что  $\langle q(s) \chi(s') \rangle = 0$ , получаем решение (3.4) в форме

$$(3.5) \quad \langle \chi(s) \chi(s') \rangle = D(s') - 1/2 [\chi_0 + 1/2 \ln \kappa(s')] [\ln \kappa(s') - \ln \kappa(s)] \\ D(s') = \langle \chi(s') \chi(s') \rangle = 1/2 Ns' + [\chi_0 + 1/2 \ln \kappa(s')]^2$$

Одномерная плотность распределения вероятности интенсивности  $\omega$  представима в виде

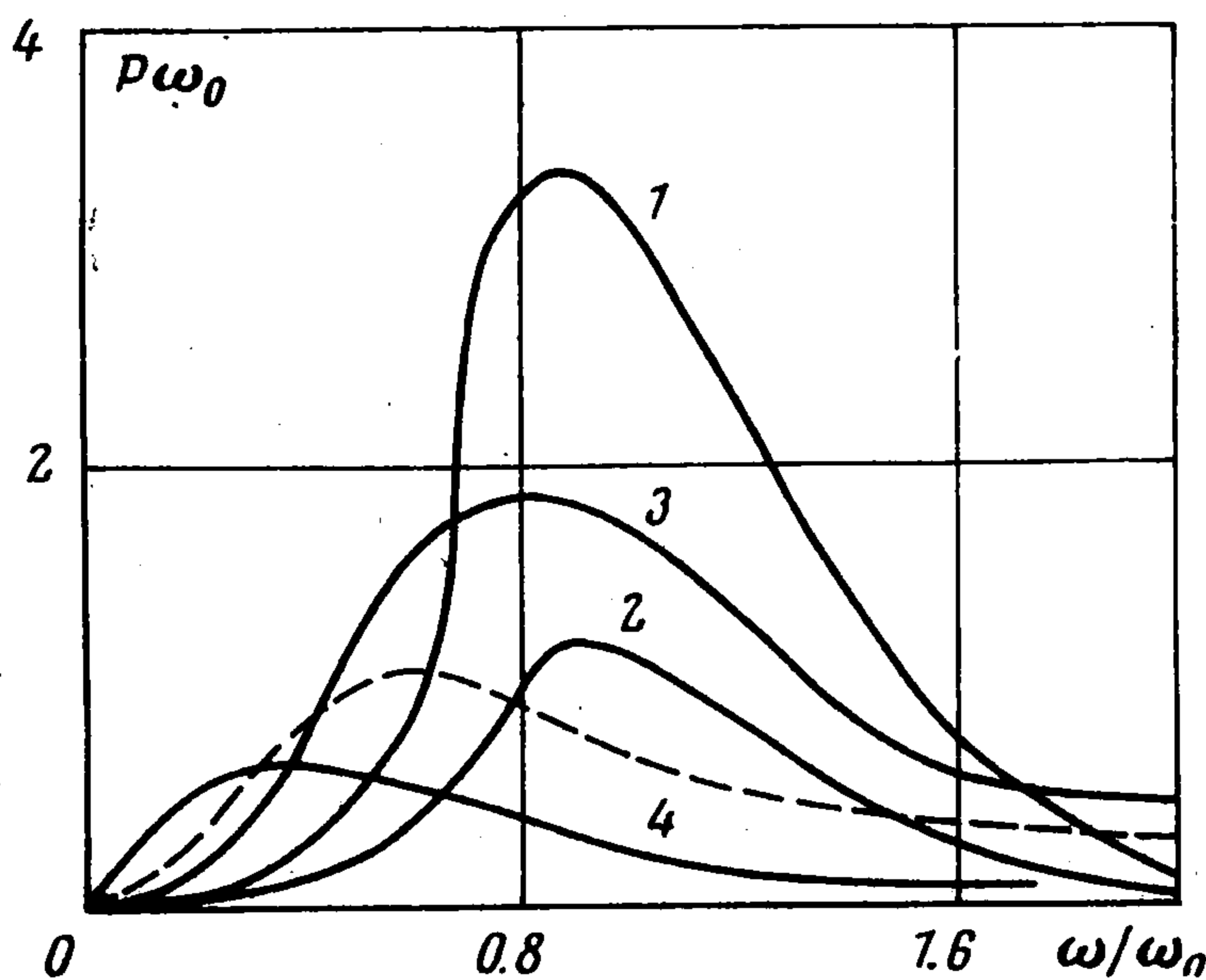
$$(3.6) \quad P_{(\omega, s)}^{(1)} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi Ns\omega}} \exp \left\{ -\frac{[\ln(\omega/\omega_0) - 1/2 \ln \kappa(s)]^2}{2Ns} \right\}$$

Аналогично получаем выражение для  $P^{(2)}(\omega, s)$  в случае, когда возмущение  $\ln c$  удовлетворяет условию 2)

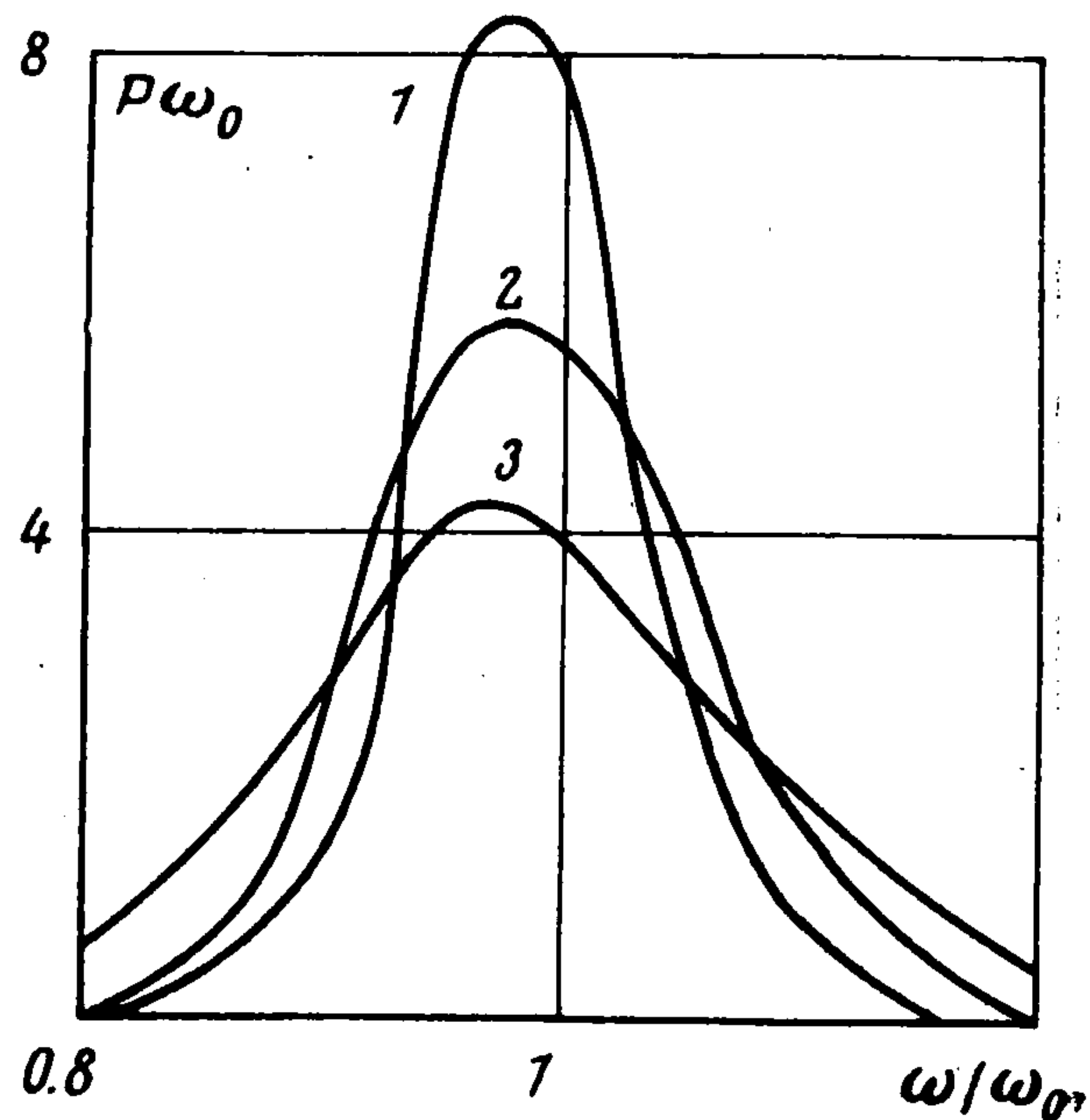
$$(3.7) \quad P_{(\omega, s)}^{(2)} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi\omega\sigma(s)}} \exp \left\{ -\frac{[\ln(\omega/\omega_0) - 1/2 \ln \kappa(s)]^2}{2\sigma^2(s)} \right\} \\ \sigma^2(s) = 1/2 [1 - \exp(-2Ns)]$$

Как следует из формул (3.6), (3.7), для обеих моделей сред интенсивность волны имеет логарифмически нормальный закон распределения. Отметим, что процесс  $\omega^{(1)}$  не имеет стационарного режима. Распределение  $P^{(2)}(\omega, s)$  становится стационарным при  $s \rightarrow \infty$  для плоской волны ( $\Omega_0 = 0, K_0 = 0$ ).

Графики изменения  $P^{(1)}(\omega), P^{(2)}(\omega)$  в случае плоской волны для  $sN = 0.125$  изображены на фиг. 1 (кривые 1 и 2). Значение  $\omega = 0.882\omega_0$  ( $\omega = 0.895\omega_0$ ) соответствует максимальной плотности распределения  $P^{(1)}$  ( $P^{(2)}$ ). Штриховой линией представлено



Фиг. 1



Фиг. 2

стационарное распределение  $P^{(2)}(\omega)$ . Для другого предельного случая ( $s = 0$ )  $P^{(1)} = P^{(2)} = \delta(\omega - \omega_0)$ . Изменение плотности  $P^{(1)}(\omega)$  при  $sN = 0.25$  и  $sN = 1$  представлено кривыми 3 и 4 соответственно.

Для сферической волны с начальным радиусом  $R_0$  исследовано влияние мощности  $N$  на характер распределения интенсивности при  $s/R_0 = 0.01$ . С точностью до 0.01 графики модели 1) и 2) совпадают. Они показаны на фиг. 2 для значений  $R_0 N$ , равных 0.25, 0.5 и 1 (кривые 1, 2, 3 соответственно).

Исследование вероятностных свойств решений более высоких порядков требует привлечения рекуррентных соотношений (1.3), которые образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа (2.3) и сводятся к схеме марковского процесса аналогично полной системе уравнений для определения интенсивности (2.3), (2.6), (2.7). При этом каждый шаг рекуррентного процесса сопровождается повышением на единицу порядка производной вдоль луча от величин, определяющих модель среды с  $\delta$ -коррелированной функцией  $q(s)$ . Поэтому для решения  $k$ -го порядка требуется введение новых по сравнению с  $k - 1$ -м порядком предположений относительно статистических свойств некоторых функций от параметров среды. В общем случае для последующих приближений уравнения для плотностей вероятностей имеют операторный вид и содержат вариационные производные.]

В заключение обратимся к уравнениям лучей, которые могут быть представлены в форме [9,11]  $dv_i/ds = (\ln c)_{,i} - v_i v_j (\ln c)_{,j}, dx_i/ds = v_i$  и рассматриваются отдельно от геометрии поверхности. Переход к лучевым координатам  $u^\alpha, s$ , связанным с геометрией фронта, позволил выписать эти соотношения в виде уравнений (1.5), которые следует рассматривать совместно с (1.6), (1.7). При фиксированных  $u^\alpha$  уравнения для лучей в рамках винеровской модели сведены к схеме (2.3) — (2.5). Предположение о том, что поверхность  $\Sigma$  в окрестности точки  $\{u^\alpha\} = \text{const}$  является плоскостью, приводит к более простым, чем (1.5) — (1.7), уравнениям  $dR_\perp/ds = v(s), dv/ds =$

$= d(\ln c) / dR_{\perp}$  ( $R_{\perp}$  — плоское поперечное смещение), которые совпадают с соотношениями работ [9,11], полученными в случае малых угловых отклонений лучей и допускающими полный анализ в марковском приближении. В общем случае геометрические соотношения (1.5) — (1.7) замкнутые и могут рассматриваться независимо от динамических уравнений (1.3), (1.4).

Из изложенного выше следует, что на основе принципа Ферма можно получить уравнения для геометрических характеристик фронта. С помощью этих уравнений замыкается система соответствующих динамических соотношений. При достаточно общих предположениях оказывается возможным для описания исходной нелинейной системы применить метод ФПК. Распределение упругих параметров при этом близко к лог-нормальному, что соответствует экспериментальным данным для горных пород. Получаемые распределения интенсивностей фронтов в рассматриваемых примерах также близки к наблюдаемым [6].

Поступила 26 IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. О связи между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации в статистически изотропных твердых телах. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
2. Болотин В. В., Гольденблат И. И., Смирнов А. Ф. Строительная механика. М., Стройиздат, 1972.
3. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., «Наука», 1970.
4. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.
5. Собчик К. Распространение волн в стохастических средах. Механика. Сб. перев., 1974, вып. 6.
6. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
7. Keller J. V. Stochastic equations and wave propagation in random media. Proc. Sympos. Appl. Math., 1964, vol. 16.
8. Keller J. V. Wave propagation in random media. Proc. Sympos. Appl. Math., 1962, vol. 13.
9. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М., «Наука», 1975.
10. Красовский А. А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М., «Наука», 1974.
11. Кляцкин В. И., Татарский В. И. Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики. Успехи физ. наук, 1973, т. 110, вып. 4.
12. Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Изд-во ЛГУ, 1961.
13. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
14. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
15. Чигарев А. В. Распространение ударных волн в стохастически неоднородной упругой среде. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 5.
16. Haselgrove J. Ray theory and a new method for ray-tracing. Proc. Cambridge Conf. Phys. Ionosphere, 1955.
17. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. К вычислению упругих модулей гетерогенных сред. ПМТФ, 1968, № 3.
18. Пугачев В. С., Казаков И. Е., Евланов Л. Г. Основы статистической теории автоматических систем. М., «Машиностроение», 1974.