УДК 539.3

МЕТОД ПЕРЕНОРМИРОВОК В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ В ОТСУТСТВИЕ ВНЕШНИХ СИЛ

А. Г. Фокин

(Москва)

Дается решение задачи о расчете полей и эффективных модулей упругости для неограниченной среды в отсутствие внешних сил. Посредством введения перенормированных полей и материальных характеристик проведено разделение взаимодействий между областями неоднородности на локальную и нелокальную составляющие. Учет лишь первой из них приводит к моделям и приближениям, дающим упругие поля и эффективные модули упругости в форме, полученной в сингулярном приближении. Последнее представляет собой обобщение известных гипотез Фойгта (однородные деформации) и Ройсса (однородные напряжения). Показано, что природа отмеченной эквивалентности состоит в том, что в упомянутых моделях и приближениях упругие поля имеют вид полей, рассчитанных для изолированного включения, помещенного в неограниченную матрицу в отсутствие объемных сил.

1. Пусть рассматриваемая неоднородная неограниченная среда характеризуется тензором модулей упругости четвертого ранга $\lambda(\mathbf{r})$. (Здесь и далее тензорные индексы для простоты опущены.) Наряду с этим введем в рассмотрение среду сравнения, отличающуюся от исходной лишь упругими свойствами, которые описываются однородным тензором λ_c. Свойство однородности поля сравнения, однако, не обязательно. Так, например, при решении упругой задачи для слоистой среды с малыми неровностями в слоях [1] в качестве λ_c целесообразно выбрать поле слоистой среды без неровностей, для которой задача решается точно.

Поля смещений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_c$, соответствующие обеим средам, удовлетворяют уравнениям [2,3]

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & L\mathbf{u} = 0, \ L = \operatorname{div} \lambda \operatorname{def} \\
& L_c\mathbf{u}_c = 0, \ L_c = \operatorname{div} \lambda_c \operatorname{def}
\end{aligned}
$$

где оператор def связывает тензор деформаций ε и вектор смещений $\mathbf{u}$ равенством $\varepsilon = \operatorname{def} \mathbf{u}$.

В отличие от задач в классической теории упругости однородных сред в статистической теории упругости возникает дополнительная проблема определения эффективных упругих постоянных. Последние фигурируют в законе Гука, усредненном по ансамблю реализаций. Для неограниченных сред в отсутствие внешних сил усреднения по объему и по ансамблю реализаций дают одинаковый результат, поэтому эффективные модули упругости в данном случае являются также и макроскопическими параметрами среды. Ниже не делается различия между двумя способами усреднения.

Нахождение полей напряжений σ и деформаций ε и эффективных модулей упругости λ_* на базе уравнений (1.1) удобно провести путем введения некоторых перенормированных величин τ, e и l, связанных с σ, ε и λ равенствами [2,3]

$$\tau = le = \sigma - \lambda_c \varepsilon, \quad e = (I - g\lambda')\,\varepsilon \tag{1.2}$$
$$l = \lambda' (I - g\lambda')^{-1}, \ \lambda' = \lambda - \lambda_c$$

где g — некоторый постоянный тензор, определяющий мощность сингулярной составляющей второй производной тензора Грина G уравнения (1.1) для среды сравнения.

Решая (1.1) в терминах τ, e, l, получим [2, 3]

$$e = R\langle e\rangle, \quad l_* = \langle lR\rangle, \quad \langle R\rangle = I \tag{1.3}$$

где R — некоторый нелокальный оператор, определенный на базе формальной составляющей второй производной тензора Грина. Решение в форме (1.3) удобно тем, что в нем локальные взаимодействия отделены от нелокальных.

В большинстве работ, посвященных данному вопросу, обычно ограничиваются приближенными решениями. Наилучшие из них те, которые полностью и точно учитывают локальные взаимодействия всех порядков. Можно показать [4], что все подходы подобного рода приводят к аналитически одинаковым результатам, а различия между ними могут возникать лишь вследствие различий в использованных параметрах λ_c. Ниже это приближение именуется сингулярным (S-приближением).

Полагая в S-приближении $R_s = I$, запишем

$$l_* = \langle l\rangle, \quad e = \langle e\rangle \tag{1.4}$$

Решение (1.4) показывает, что приближения, игнорирующие нелокальные взаимодействия, или, что эквивалентно, формальную составляющую второй производной тензора Грина G, являются промежуточными между приближениями Фойгта $\varepsilon = \langle\varepsilon\rangle$ и Ройсса $\sigma = \langle\sigma\rangle$.

Действительно, вводя тензор b_c равенством $g\,(\lambda_c + b_c) = -\mathrm{I}$ и используя связь (1.2) между e и ε, из (1.4) получим

$$\sigma + b_c\varepsilon = \langle\sigma + b_c\varepsilon\rangle = \langle\sigma\rangle + b_c\,\langle\varepsilon\rangle \tag{1.5}$$

Отсюда при $b_c \to 0$ и $b_c \to \infty$ приходим соответственно к приближениям Ройсса и Фойгта.

2. Покажем, что решение в форме (1.4), (1.5) совпадает с решением, полученным для одного включения в матрице.

Сделаем предварительное замечание. В теории обобщенных функций производная однородной степени — 2 функции Φ, имеющая в нуле особенность, может быть определена следующим образом [5]:

$$\Phi_{,i} = \Phi_{,i}^{s} + \Phi_{,i}^{f}, \quad \int_V \Phi_{,i}^{s}(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \varphi(0)\int_{S_0} \Phi\, dS_i \tag{2.1}$$

$$\int_V \Phi_{,i}^{f}(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{V_0} \Phi_{,i}(\mathbf{r})\,[\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(0)]\,d\mathbf{r} + \int_{V-V_0} \Phi_{,i}(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$$

где φ — вспомогательная функция, S_0 — поверхность объема V_0, включающего точку локальной неинтегрируемости $r = 0$. Можно показать [5], что поверхностный интеграл зависит лишь от формы S_0, но не от величины V_0. Из (2.1) имеем (δ — дельта-функция)

$$\Phi_{,i}^{s} = \delta \int_{S_0} \Phi\, dS_i \tag{2.2}$$

С учетом сказанного введем обозначения

$$(\mathrm{def\,div}^T)^s\, G = g\delta, \quad \mathrm{div}^T\, G * \equiv G * \quad \mathrm{div}\,(\mathrm{def\,div}^T)^f\, G * F = hF$$

где s и f означают сингулярную и формальную части, T — транспонирование.

В рассматриваемом случае неограниченной среды и отсутствия внешних сил решение (1.3) имеет вид [2, 3]

$$R = \sum_0^\infty (hl)^n, \quad \langle e\rangle = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

Очевидно решение (2.3), справедливое для среды с произвольным распределением неоднородностей, применимо и в частном случае среды в виде матрицы с включением.

Описывая упругие свойства включения и матрицы постоянными тензорами λ_i и λ_c, заметим, что тензор l отличен от нуля лишь во включении. Вследствие этого интегрирование, связанное с оператором h, будет ограничено лишь объемом включения.

Учитывая сказанное и вводя в соответствии с (2.1) обозначения

$$\Phi_{,i}^{f}(\mathbf{r}) \equiv \mathrm{def\,div}^T\, G(\mathbf{r}), \quad \varphi(r) \equiv l^T \otimes l\langle e\rangle$$

где $\otimes$ означает прямое произведение тензоров, а начало координат лежит во включении, представим величину $z = lhl\langle e\rangle$ в виде

$$z = \int_V \Phi_{,i}^{f}(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_{V_0} \Phi_{,i}(\mathbf{r})\,[\varphi(r) - \varphi(0)]\,d\mathbf{r} = 0$$

Последнее равенство справедливо в силу постоянства $\varphi(\mathbf{r})$ внутри V_0. Таким образом, члены ряда (2.3) вида $(hl)^n\langle e\rangle$ при $n \geqslant 2$ обращаются в нуль всюду, а при $n = 1$ — лишь для точек $\mathbf{r} \in V_0$.

Следовательно, поле $e(\mathbf{r})$ имеет вид

$$e = R\langle e\rangle, \quad R = \begin{cases} I, & \mathbf{r} \in V_0 \\ I + hl, & \mathbf{r} \in V - V_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Аналогичным образом из (1.3) находим

$$l_* = \langle lR\rangle = v_i l_i \equiv \langle l\rangle, \quad v_i = V_0/V \tag{2.5}$$

Как видно из (2.4), поле во включении однородно, а поле в матрице содержит член $hl\langle e\rangle$, определяющий неоднородную составляющую. Однако, поскольку в матрице $l = 0$, поле в матрице не используется при расчете l_* и таким образом эта неоднородность не проявляется.

Отметим также, что формулы (2.4) и (2.5), совпадающие с решением (1.4) в S-приближении и, следовательно, приводящие к полям ε, σ, λ_*, удовлетворяющим (1.4), (1.5), справедливы в отличие от последних при $v_i \to 0$.

Приведенное решение, основанное на использовании метода перенормировок, с одной стороны, объясняет природу эквивалентности приближенных решений, основанных на учете лишь локальных взаимодействий. С другой стороны, оно указывает на еще неиспользованные возможности метода.

Поступила 10V1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Теория армированной слоистой среды со случайными начальными неправильностями. Механика полимеров, 1966, № 1.
2. *Фокин А. Г.* Об использовании сингулярного приближения при решении задач статистической теории упругости. ПМТФ, 1972, № 1.
3. *Фокин А. Г.* О границах для эффективных упругих модулей неоднородных твердых тел. ПМТФ, 1973, № 5.
4. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* О приближенных методах вычисления эффективных упругих модулей статистических смесей. В сб.: Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс, 1971, стр. 175.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.