Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

539.3 : 534.1

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

Рассматривается линейная задача свободных колебаний оболочек (в пределах применимости классической двумерной теории). Обсуждается возможность решения этой задачи различными приближенными приемами, из которых главными оказываются безмоментная теория и метод замены оболочки пластинкой. Выводятся формальные оценки асимптотических погрешностей этих методов.

1. Будем исходить из линейных уравнений тонкой упругой оболочки. Уравнения равновесия

$$\frac{1}{2Eh}(\nabla_\alpha T^{m\alpha} - j_1 b_\alpha{}^m N^\alpha) + j_2\lambda v^m = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{2Eh}(j_3 b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + j_4\nabla_\alpha N^\alpha) - j_5\lambda w = 0$$

$$\nabla_\alpha M^{m\alpha} - N^m = 0 \quad \left(\lambda = \frac{\rho\omega^2}{2Eh}\right)$$

Формулы деформации смещения

$$j_6\varepsilon_{mn} = \nabla_m v_n + j_7 b_{mn} w - {}^1/_2 c_{mn}c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta \tag{1.2}$$

$$\mu_{mn} = \nabla_n\gamma_m - j_8 c_{\alpha m} b_n{}^\alpha\delta, \quad \gamma_m = \nabla_m w - j_8 b_m{}^\alpha v_\alpha$$

$$\delta = -{}^1/_2 c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta$$

$$(c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2})$$

Уравнения состояния

$$T^{mn} = E^{mn\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + j_1\frac{h^2}{3}F^{mn\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} \tag{1.3}$$

$$M^{mn} = \frac{h^2}{3}(G^{mn\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} + j_9 H^{mn\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta})$$

Здесь $a_{mn} = \mathbf{r}_m\cdot\mathbf{r}_n$ — метрический тензор срединной поверхности, $b_{mn} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{mn}$ — тензор кривизны, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор срединной поверхности, индексы при $\mathbf{r}$ означают дифференцирование, c_{mn} — дискриминантный тензор, ∇_m — символ ковариантной производной (в метрике срединной поверхности), λ — частотный параметр, связанный с круговой частотой ω, ρ — масса оболочки, приходящаяся на единицу ее срединной поверхности, h — полутолщина оболочки, T^{mn}, N^m, G^{mn} — тензоры тангенциальных усилий, перерезывающих усилий и моментов, ε_{mn}, μ_{mn} — тензоры тангенциальной и изгибной деформации, γ_m, δ — тензор углов поворота относительно тангенциальных осей и угол поворота относительно нормальной оси, v_m, w — тензор тангенциальных смещений и нормальное смещение, $E^{mn\alpha\beta}$, $F^{mn\alpha\beta}$, $G^{mn\alpha\beta}$, $H^{mn\alpha\beta}$ — физические тензоры, которые в первом приближении можно выразить формулами

$$G^{mn\alpha\beta} = E^{mn\alpha\beta} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(a^{\alpha m}a^{\beta n} + \nu c^{\alpha m}c^{\beta n}\right)$$

$$F^{mn\alpha\beta} = H^{mn\alpha\beta} = 0$$

Считается, что оболочка совершает свободные гармонические колебания по закону $\sin\omega t$ и что переменная t отделена. Перед некоторыми слагаемыми в (1.1) введены условные множители $j_1, j_2, \ldots, j_9$ (индексы при них не имеют тензорного значения). Они будут нужны для последующего изложения, а пока их надо считать равными единице.

2. Введем замену независимых переменных при помощи равенств (при η здесь и ниже вверху ставится показатель степени)

$$x^m = \eta^p\xi^m, \quad \eta = h/R \tag{2.1}$$

В них x^m — исходные параметры выбранной криволинейной системы координат, ξ^m — преобразованные параметры, R — характерный радиус кривизны срединной поверхности, p — число, зависящее от выбора.

Символ ковариантной производной можно представить в виде

$$\nabla_m = \frac{\partial}{\partial x^m} + g_m$$

где g_m — величина, не содержащая символов дифференцирования. Поэтому в силу (2.1) будем иметь

$$\nabla_m = \eta^{-p}\nabla_m^{\bullet}, \quad \nabla_m^{\bullet} = \frac{\partial}{\partial \xi^m} + \eta^p q_m \tag{2.2}$$

Введем, кроме того, следующие замены искомых величин:

$$\begin{gathered} T^{mn} = \eta^{q+s}\, T_0^{\ mn}, \quad M^{mn} = \eta^{2-2p} M_0^{\ mn}, \quad N^m = \eta^{2-3p} N_0^{\ m} \\ v_m = \eta^{p+q} v_m^{\circ}, \quad w = w_0, \quad \gamma_m = \eta^{-p}\gamma_m^{\circ}, \quad \delta = \eta^q\delta_0 \\ \varepsilon_{mn} = \eta^{q+s}\varepsilon_{mn}^{\circ}, \quad \mu_{mn} = \eta^{-2p}\mu_{mn}^{\circ}, \quad \lambda = \eta^{2r}\lambda_0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

где q, r, s — пока произвольные числа.

Выполнив замены (2.1) — (2.3) и умножая преобразованные уравнения на подобранные соответствующим образом степени η, получим вместо (1.1)—(1.3) систему

$$\begin{gathered} \frac{1}{2Eh}\nabla_\alpha^{\bullet} T_0^{m\alpha} - \frac{1}{2Eh}\eta^{2-2p-q-s} b_\alpha^{\ m} N_0^{\ \alpha} + \eta^{2r+2p-s}\lambda_0 v_0^{\ m} = 0 \\ \frac{1}{2Eh}\eta^k b_{\alpha\beta} T_0^{\alpha\beta} + \frac{1}{2Eh}\eta^{2-4p+k-q-s}\nabla_\alpha^{\bullet} N_0^{\ \alpha} - \eta^{2r+k-q-s}\lambda_0 w_0 = 0 \\ \nabla_\alpha^{\bullet} M_0^{m\alpha} - N_0^{\ m} = 0 \\ \eta^s \overset{\circ}{\varepsilon}_{mn} = \nabla_m^{\bullet} v_n^{\circ} + \eta^{-q} b_{mn} w_0 - {}^1\!/_2 c_{mn} c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha^{\bullet} v_\beta^{\circ} \\ \overset{\circ}{\mu}_{mn} = \nabla_n^{\bullet}\gamma_m^{\circ} - \eta^{2p+q} c_{\alpha m} b_n^{\ \alpha}\delta, \quad \gamma_m^{\circ} = \nabla_m^{\bullet} w_0 - \eta^{2p+q} b_m^{\ \alpha} v_\alpha^{\circ} \\ \delta^{\circ} = -{}^1\!/_2 c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha^{\bullet} v_\beta^{\circ} \\ T_0^{mn} = E^{mn\alpha\beta}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \eta^{2-2p-q-s}\frac{R^2}{3} F^{mn\alpha\beta}\overset{\circ}{\mu}_{\alpha\beta} \\ M_0^{mn} = \frac{R^2}{3}\left(G^{mn\alpha\beta}\overset{\circ}{\mu}_{\alpha\beta} + \eta^{2p+q+s} H^{mn\alpha\beta}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right) \end{gathered} \tag{2.4}$$

(во второе из этих равенств введен множитель η^k; k — пока произвольное число).

3. В (2.4) для чисел p, q, r, s, k будут подбираться непротиворечивые значения, т. е. значения, удовлетворяющие трем условиям, которые формулируются ниже.

Условие 1. Все показатели степеней η должны быть неотрицательны и некоторые из них должны быть равны нулю.

Если условие 1 выполняется, то в (2.4) можно положить $\eta = 0$ и перейти к предельной системе, структура которой зависит от выбора p, q, r, s, k. Учитывая это, сформулируем оставшиеся два условия так:

Условие 2. Предельная система должна быть формально непротиворечивой, т. е. в любом наборе выделенных из нее равенств число уравнений не должно превышать числа входящих в них неизвестных.

Условие 3. В предельной системе должен содержаться по меньшей мере один из инерционных членов.

Четыре варианта непротиворечивых значений p, q, r, s, k, удовлетворяющих этим условиям, задаются следующими формулами:

Вариант 1

$$q = r = s = k = 0 \tag{3.1}$$

Вариант 2

$$q = -2p, \quad r = -p, \quad s = 0, \quad k = 0 \tag{3.2}$$

Вариант 3

$$q = 0, \quad r = 1 - 2p, \quad s = 2 - 4p, \quad k = 0 \tag{3.3}$$

Вариант 4

$$q = 0, \quad r = 1 - 2p', \quad k = 4p' - 2, \quad s = 0 \tag{3.4}$$

(Число p здесь остается неопределенным, а в варианте 4 для удобства дальнейшего изложения оно заменено на p'.)

Можно проверить, что сформулированные выше условия непротиворечивости выполняются, если значения чисел p и p' ограничить следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} &0 \leqslant p < {}^1/_2 && \text{(для вариантов 1, 3)} \\ &0 \leqslant p < 1 && \text{(для варианта 2)} \\ &{}^1/_2 \leqslant p' < 1 && \text{(для варианта 4)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. Будем считать, что справедливо

Предположение. Каждому из построенных в п. 3 вариантов непротиворечивых значений p, q, r, s, k соответствует некоторая совокупность решений уравнений (1.1) — (1.3), с известной степенью приближения удовлетворяющих соответствующей предельной системе. Это предположение будет более подробно обсуждено и уточнено в п. 5.

Обратимся к предельным системам уравнений, отвечающих четырем вариантам непротиворечивых значений p, k, r, s, k (п. 3). Схема вывода этих систем заключается в следующем:

Значения q, r, s, k для данного варианта задаются формулами (3.1) — (3.4). Поэтому в левых частях равенств (2.4) все показатели степеней η можно считать известными в каждом варианте с точностью до числа p, для которого справедливы неравенства (3.5). Вместе с тем можно убедиться, что каждому множителю вида η^m в уравнениях (2.4) соответствует в уравнениях (1.1) — (1.3) множитель j_n. Поэтому все j_n можно разбить на три группы: группа j_{n_1}, для которой соответствующие степени η положительны при любых допустимых значениях p (или p'); группа j_{n_2}, для которой соответствующие степени η неотрицательны, но принимают нулевое значение хотя бы при одном из допустимых значений p (или p'); группа j_{n_3}, для которой соответствующие степени η равны нулю.

Искомая предельная система, очевидно, может быть получена, если в (1.1) — (1.3) положить $j_{n_1}=0$, $j_{n_3}=1$, а множители j_{n_2} сохранить, считая, что они равны нулю, когда соответствующий показатель η положителен, и равны единице, когда этот показатель равен нулю. Применив такой подход, получим следующие результаты.

Варианту 1 отвечают решения, которые назовем *квазипоперечными интегралами*. Для них надо положить $n_1=1{,}4$; $n_2=2, 8, 9$; $n_3=3, 5, 6, 7$; и предельную систему, изменив в ней порядок записи уравнений, можно представить в виде (здесь и ниже в фигурных скобках указана наинизшая степень η, которая отбрасывалась по сравнению с единицей при выводе данных предельных уравнений)

$$\frac{1}{2Eh}\nabla_\alpha T^{m\alpha}+j_2\lambda v^m=0,\quad \frac{1}{2Eh}b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}-\lambda w=0 \tag{4.1}$$
$$T^{mn}=E^{mn\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta},\ \varepsilon_{mn}=\nabla_m v_n+b_{mn}w-{}^1/_2 c_{mn}c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta\quad \{j_4=\eta^{2-4p}\}$$

$$\mu_{mn}=\nabla_n\gamma_m-j_8c_{\alpha m}b_n{}^\alpha\,\delta,\quad \gamma_m=\nabla_m w-j_8 b_m{}^\alpha v_\alpha \tag{4.2}$$
$$\delta=-{}^1/_2 c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta$$
$$M^{mn}=\frac{h^2}{3}\left(G^{mn\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}+j_9H^{mn\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\right),\quad N^m=\nabla_\alpha M^{m\alpha}$$

Основываясь на предположении п. 4, отсюда можно сделать вывод, что квазипоперечные интегралы в исходном приближении определяются динамическими безмоментными уравнениями. Последние имеют силу (при построении квазипоперечных интегралов) при $0\leqslant p<{}^1/_2$, а если $p>0$, то в них можно внести дополнительные упрощения, положив $j_2=j_8=j_9=0$. Наиболее существенное из них упрощение $j_2=0$. Оно относится к равенствам (4.1), т. е. к замкнутой подсистеме дифференциальных уравнений, определяющей тензоры T^{mn}, v_m, w, ε_{mn}, и означает возможность пренебрежения в этих уравнениях тангенциальными силами инерции. Менее существенны упрощения $j_8=j_9=0$, относящиеся к равенствам (4.2), т. е. к формулам, позволяющим определить прямыми действиями оставшиеся неизвестные.

Варианту 2 отвечают решения, которые назовем *квазитангенциальными интегралами*. Для них $n_1=1{,}4$; $n_2=7$; $n_3=2, 3, 5, 6, 8, 9$, и предельная система приобретет вид

$$(4.3)\qquad \frac{1}{2Eh}\nabla_\alpha T^{m\alpha} - \lambda v^m = 0,\quad \varepsilon_{mn} = \nabla_m v_n + j_7 b_{mn} w - \frac{1}{2} c_{mn} c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta$$

$$T^{mn} = E^{mn\alpha\beta}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\ \{j_1 = \eta^2\}$$

$$(4.4)\qquad \frac{1}{2Eh} b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - \lambda w = 0 \quad \{j_4 = \eta^{2-2p}\}$$

$$(4.5)\qquad \mu_{mn} = \nabla_n \gamma_m - c_{\alpha m} b_n{}^\alpha \delta,\quad \gamma_m = \nabla_m w - b_m{}^\alpha v_\alpha$$

$$\delta = -{}^1/_2 c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta$$

$$M^{mn} = \frac{h^2}{3}(G^{mn\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} + H^{mn\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}),\quad \nabla_\alpha M^{m\alpha} - N^m = 0$$

Снова получились динамические безмоментные уравнения, в которые, при определенных обстоятельствах, можно вносить дополнительные упрощения. При $p > 0$ допустимо дополнительное упрощение $j_7 = 0$. Оно весьма существенно, так как при этом уравнения (4.3) превращаются в замкнутую систему относительно T^{mn}, v_m, ε_{mn}, которая по своей структуре формально совпадает с динамическими уравнениями плоской задачи теории упругости. Остальные неизвестные w, γ_m, δ, μ_{mn}, M^{mn}, N^m определяются прямыми действиями из равенств (4.4), (4.5).

Замечание. Совпадение (4.3) с уравнениями плоской задачи (при $j_7 = 0$) названо формальным, так как метрика срединной поверхности оболочек, вообще говоря, отличается от «плоской» метрики, что может оказаться важным при выборе методов интегрирования уравнений. В частности, станет незаконным введение функции Эйри при помощи известных формул. Однако для обсуждаемых здесь вопросов это несущественно, и (4.3) при $j_7 = 0$ будут в дальнейшем условно называться уравнениями плоской задачи.

Варианту 3 отвечают решения, которые назовем *интегралами релеевского типа*. Для них $n_1 = 6,9$; $n_2 = 1, 2, 8$; $n_3 = 3, 4, 5, 7$, и предельные уравнения принимают вид

$$(4.6)\qquad \nabla_m v_n + b_{mn} w - {}^1/_2 c_{mn} c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta = 0 \qquad \{j_6 = \eta^{2-4p}\}$$

$$(4.7)\qquad \mu_{mn} = \nabla_n\gamma_m - j_8 c_{\alpha m} b_n{}^\alpha\delta,\quad \gamma_m = \nabla_m w - j_8 b_m{}^\alpha v_\alpha$$

$$\delta = -{}^1/_2 c^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta$$

$$M^{mn} = \frac{h^2}{3} G^{mn\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta},\quad \nabla_\alpha M^{m\alpha} - N^m = 0 \quad \{j_9 = \eta^{2-2p}\}$$

$$(4.8)\qquad \frac{1}{2Eh}(\nabla_\alpha T^{m\alpha} - j_1 b_\alpha{}^m N^\alpha) + j_2\lambda v^m = 0$$

$$\frac{1}{2Eh}(b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha N^\alpha) - \lambda w = 0$$

Это — уравнения, определяющие чисто моментное напряженное состояние (в терминах [1]) или деформацию без растяжений (в терминах [2]). Уравнения (4.6) образуют замкнутую подсистему относительно v_m, w; из (4.7) прямыми действиями находятся γ_m, δ, μ_{mn}, M^{mn}, N^n и для компонент тензора T^{mn} получается вторая замкнутая подсистема (4.8). Уравнения (4.6) — (4.8) имеют силу при всех значениях p, заключенных в пределах $0 \leqslant p < {}^1/_2$, а если $p > 0$, то допустимы дополнительные упрощения $j_1 =$

$= j_2 = j_8 = 0$. Они несущественны, так как относятся к слагаемым, считающимся известными.

Варианту 4 отвечают решения, которые назовем *интегралами с большой изменяемостью*. Для них $n_1 = 1, 2, 8, 9$; $n_2 = 3$; $n_3 = 4, 5, 6, 7$, а предельные уравнения можно представить так:

$$\frac{1}{2Eh}(j_3 b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha N^\alpha) - \lambda w = 0, \quad \nabla_\alpha M^{m\alpha} - N^m = 0 \tag{4.9}$$

$$\mu_{mn} = \nabla_n \gamma_m, \quad \gamma_m = \nabla_m w, \quad M^{mn} = \frac{h^2}{3} G^{mn\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}$$

$$\{j_8 = j_9 = \eta^{2p'}\}$$

$$\nabla_\alpha T^{m\alpha} = 0, \quad T^{mn} = E^{mn\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{4.10}$$

$$\varepsilon_{mn} = \nabla_m v_n + b_{mn} w - {}^1/_2 c_{mn} c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta \qquad \{j_1 = j_2 = \eta^{2-2p'}\}$$

Эта система при $j_3 = 1$ представляет собой динамический аналог уравнений приближенной теории напряженно-деформированных состояний с большой изменяемостью (учитываются только нормальные силы инерции). Область применимости этой системы определяется неравенствами ${}^1/_2 \leqslant p' < 1$, а при ${}^1/_2 < p'$ становится допустимым дополнительное упрощение $j_3 = 0$. Оно существенно, так как в результате уравнения (4.9) выделяются в самостоятельную замкнутую подсистему относительно M^{mn}, N^m, μ_{mn}, γ_m, w, формально (с точностью до свойств метрики) совпадающую с уравнениями поперечных колебаний пластинки. Для определения остальных искомых тензоров T^{mn}, ε_{mn}, v_m остаются уравнения (4.10). В них w надо рассматривать как известную величину, и, следовательно, они представляют собой неоднородные уравнения статической плоской задачи теории упругости.

5. Усилим предположение, принятое в п. 4, и будем считать, что каждая из предельных систем, соответствующая некоторому варианту непротиворечивых значений p, q, r, s, k, в рассматриваемой области имеет такие решения, в которых все искомые величины, отмеченные нуликом, в формулах (2.3) имеют одинаковый асимптотический порядок, а дифференцирование по ξ^1, ξ^2 не может привести к существенному возрастанию этих величин. Тогда преобразование (2.1) будет представлять собой характерное для асимптотических подходов масштабное растяжение, а число p в нем совпадет по смыслу с показателем изменяемости.

В правой части первого равенства (2.1) для обеих независимых переменных берется одинаковый множитель η^p. Формально это соответствует предположению, что изменяемость в обоих координатных направлениях одинакова. Однако ниже будем считать, что могут существовать такие направления, в которых изменяемость искомых функций существенно меньше, а соответствующий показатель изменяемости θ имеет значение меньше p. Такие направления будут называться квазистационарными, соответствующий им показатель изменяемости θ — частным, а показатель изменяемости p (в тех случаях, когда важно отличить его от θ) — общим.

Замечание. Если квазистационарные направления совмещены с координатными направлениями, то при решении предельных уравнений надо считать, что производная по соответствующей переменной обращается в нуль. Это будет использовано для дальнейших упрощений некоторых предельных систем.

В формулах (2.3) порядок величин, отмеченных нуликом, одинаков. Это значит, что равенствами (2.3) устанавливается асимптотика всех искомых величин: если считать, что решение нормированно, так, что $w = O(\eta^\circ)$, то порядки остальных величин определяются степенями η, стоящими в правых частях (2.3).

Обозначим через P или Q совокупность тензоров, определяющих напряженно-деформированное состояние оболочки, и если оно соответствует тому или иному из интегралов, введенных в п. 4, то будем отмечать P или Q дополнительным индексом в скобках. Тогда для широкого класса задач напряженно-деформированное состояние колеблющейся оболочки можно представить в виде

$$P = P_{(m)} + \eta^{\varkappa} Q_{(n)} \tag{5.1}$$

где P — полное напряженно-деформированное состояние, $P_{(m)}$, $Q_{(n)}$ — упомянутые выше конкретизированные напряженно-деформированные состояния, первое из которых назовем главным, а второе — дополнительным.

Под $\varkappa$ подразумевается число, которое надо подобрать так, чтобы был возможен следующий итерационный процесс выполнения граничных условий. При построении исходного приближения главного напряженно-деформированного состояния $P_{(m)}$ надо выполнять два из четырех граничных условий теории оболочек, которые могут выбираться по-разному для разных типов колебаний и будут называться главными граничными условиями. В двух оставшихся граничных условиях (дополнительных) при этом появятся невязки, которые должны быть сняты при построении дополнительного напряженно-деформированного состояния $Q_{(n)}$. В результате появятся невязки в главных граничных условиях, которые надо устранять при построении первой поправки к $P_{(m)}$ и т. д.

Для исходного приближения $P_{(m)}$ получается однородная краевая задача (главная), в процессе решения которой определятся и собственные значения $\lambda_{(m)}$. Они представляют собой исходные приближения искомого частотного параметра. Для исходного приближения $Q_{(n)}$ получается неоднородная краевая задача (дополнительная), в которой частотный параметр надо считать фиксированным ($\lambda_{(n)} = \lambda_{(m)}$). В дальнейшем под $P_{(m)}$, $Q_{(n)}$ и λ будут всегда подразумеваться исходные приближения этих величин.

Примем, что для каждого $P_{(m)}$ и каждого $Q_{(n)}$ в отдельности может быть указан общий показатель изменяемости, который будет обозначаться через p', если напряженно-деформированное состояние определяется интегралами с большой изменяемостью, и через p — в остальных случаях. Учитывается, что $P_{(m)}$ и $Q_{(n)}$ в той или иной части рассматриваемой области могут иметь квазистационарные направления. В частности, допускается, что край g оболочки для данного вида колебаний окажется квазистационарной линией. Поэтому обозначим показатель изменяемости искомого напряженно деформированного состояния вдоль g через θ и будем считать, что это число одинаково для $P_{(m)}$ и $Q_{(n)}$ (иначе невязки, которые даст $P_{(m)}$ в дополнительных граничных условиях, нельзя было бы снять при помощи $Q_{(n)}$.)

6. Изложенный в п. 5 подход к решению задач теории колебаний можно назвать методом расчленения напряженно-деформированного состояния. В статике он подробно описан в [1]. Обратимся к его приложениям в динамике и введем попутно классификацию возможных типов колебаний не претендующую на полноту и совпадающую в основном с данной в [10]. Для конкретности ограничимся случаем, когда край оболочки g жестко заделан, и запишем соответствующие граничные условия так (γ — угол поворота относительно касательной к линии g):

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0; \quad w = 0, \quad \gamma = 0 \quad (\text{на } g) \tag{6.1}$$

Квазипоперечные колебания с малой изменяемостью. Так будем называть колебания, полное напряженное состояние которых определяется формулой (5.1), при $\varkappa = 0$, $m = 1$, $n = 4$ ($P_{(1)}$ — главное напряженно-деформированное состояние, определяемое квазипоперечными интегралами; $Q_{(4)}$ — дополнительное напряженное состояние, определяемое интегралами с большой изменяемостью).

Асимптотика величин, стоящих в левых частях граничных равенств (6.1), определяется для $P_{(1)}$ формулами (2.3), (3.1), а для $Q_{(4)}$ формулами (2.3), (3.4). Поэтому (6.1) можно заменить равенствами

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{v}_{1(1)} = -\eta^{p'-p}\overset{\circ}{v}_{1(4)}, \quad \overset{\circ}{v}_{2(1)} = -\eta^{p'-p}\overset{\circ}{v}_{2(4)} \\ w_{(4)}{}^\circ = -w_{(1)}{}^\circ, \quad \gamma_{(4)}{}^\circ = -\eta^{p'-p}\,\gamma_{(1)}{}^\circ \quad (\text{на } g) \end{gathered} \tag{6.2}$$

в которых нулики имеют то же значение, что в (2.3).

Из требования $\lambda_{(n)} = \lambda_{(m)}$ при помощи (2.3), (3.1), (3.4) получаем для общего показателя изменяемости p' дополнительного напряженно-деформированного состояния $p' = {}^1/_2$.

Общий показатель изменяемости p для $P_{(1)}$ ограничен неравенствами первой строки (3.5). Отсюда следует, что в (6.2) все явно выписанные степени η положительны, и эти граничные условия можно приближенно выразить равенствами

$$\overset{\circ}{v}_{1(1)} = 0, \quad \overset{\circ}{v}_{2(1)} = 0, \quad w_{(4)}{}^\circ = -w_1{}^\circ, \quad \gamma_{(4)}{}^\circ = 0 \quad (\text{на } g) \tag{6.3}$$

Расчленение полной краевой задачи достигнуто. Главная краевая задача заключается в интегрировании безмоментных динамических уравнений (4.1) с учетом однородных тангенциальных граничных условий, выражаемых первыми двумя равенствами (6.3). Дополнительная краевая задача заключается в интегрировании динамических уравнений напряженных состояний с большой изменяемостью (4.9), (4.10) с учетом неоднородных нетангенциальных граничных условий, выражаемых двумя последними равенствами (6.3). Имеет место равенство $p' = {}^1/_2$, в силу которого в (4.9) надо положить $j_3 = 1$. Правую часть третьего равенства (6.3) следует рассматривать как известную.

Квазитангенциальные колебания. Так будем называть колебания, полное напряженно-деформированное состояние которых определяется формулой (5.1) при $\varkappa = 0$, $m = 2$, $n = 5$ ($P_{(2)}$ — главное напряженно-деформированное состояние, определяемое квазитангенциальными интегралами; $Q_{(5)}$ — дополнительное напряженно-деформированное состояние, определяемое интегралами с большой изменяемостью).

Пользуясь формулами (2.3), (3.2) для $P_{(2)}$ и формулами (2.3), (3.4) для $Q_{(5)}$, представим (6.1) в виде

$$\overset{\circ}{v}_{1(2)} = -\eta^{p'+p}\,\overset{\circ}{v}_{1(5)},\quad \overset{\circ}{v}_{2(2)} = -\eta^{p'+p}\,v_{(5)},\quad w_{(5)}^{\circ} = -w_{(2)}^{\circ}$$
$$\gamma_{(5)}^{\circ} = -\eta^{p'-p}\,\gamma_1{}^{\circ}{}_{(2)} \qquad \text{на } (g) \tag{6.4}$$

Из условия $\lambda_{(n)} = \lambda_{(m)}$ при помощи (2.3), (3.2) и (3.4) получаем, что p — общий показатель изменяемости $Q_{(5)}$ — определяется формулой

$$p' = {}^1/_2\,(1 + p) \tag{6.5}$$

а так как p — общий показатель изменяемости $P_{(2)}$ — подчиняется неравенствам второй строки (3.5), то показатели всех явно выписанных степеней η в (6.4) положительны, и эти равенства также можно приближенно заменить равенствами вида (6.3). Это значит, что снова достигнуто расчленение полной краевой задачи: главная краевая задача заключается в интегрировании динамических безмоментных уравнений (4.3), (4.4) с учетом однородных тангенциальных граничных условий, выражаемых первыми двумя равенствами (6.3), а дополнительная краевая задача заключается в интегрировании динамических уравнений напряженных состояний с большой изменяемостью (4.9), (4.10), с учетом не однородных нетангенциальных граничных условий, выражаемых двумя последними равенствами (6.3).

При $p > 0$ в (4.3) нужно положить $j_7 = 0$ и тогда, как уже говорилось в п. 4, эти равенства превратятся в уравнения плоской задачи. Кроме того, из (6.5) следует, что $p' \geqslant {}^1/_2$. Это значит, что, вообще говоря (при $p' > {}^1/_2$), в уравнениях (4.9) можно положить $j_3 = 0$, что приведет к их вырождению в уравнения поперечных колебаний пластинки.

Колебания релеевского типа. Они хорошо известны и возникают в оболочке только тогда, когда краевые закрепления не препятствуют изгибаниям ее срединной поверхности. Жесткая заделка края не оставляет такой свободы и было бы бессодержательно изучать колебания релеевского типа, исходя из условий (6.1). Не останавливаясь подробно на этом вопросе, заметим только (без доказательства), что для колебаний релеевского типа в формуле (5.1) надо положить $\varkappa = 1 - 2p$, $m = 3$, $n = 4$ ($P_{(3)}$, $Q_{(4)}$ — напряженно-деформированные состояния, определяемые интегралами релеевского типа и интегралами с большой изменяемостью соответственно).

Квазипоперечные колебания с большой изменяемостью. Под такими колебаниями будут подразумеваться колебания, для которых главная краевая задача заключается в интегрировании уравнений поперечных колебаний пластинки (уравнений (4.9) при $j_3 = 0$) с учетом нетангенциальных граничных условий. Для таких колебаний общий показатель изменяемости p' должен удовлетворять неравенству $p' > 1/2$, так как только тогда в (4.9) можно положить $j_3 = 0$.

При некоторых дополнительных условиях, которые выявятся ниже, можно считать, что полное напряженное состояние определяется лишь интегралами с большой изменяемостью. Тогда в исходном приближении можно пользоваться уравнениями (4.9), (4.10), а так как по предположению в (4.9) можно положить $j_3 = 0$, то произойдет выделение главной задачи, заключающейся в интегрировании уравнений поперечных колебаний пластинки с учетом нетангенциальных граничных условий. Дополнительная задача при этом будет состоять в интегрировании неоднородных статических уравнений плоской задачи (4.10) и выполнении тангенциальных граничных условий.

Из результатов работы [4] (см. также приложение в [1]) следует, что уравнения (4.10) не имеют таких интегралов с большой изменяемостью, для которых какая-либо линия, в том числе и край g, квазистационарная. Поэтому для дополнительной задачи общий показатель изменяемости p и частный показатель изменяемости θ в направлении края g должны подчиняться соотношению $p = \theta \leqslant p'$. Но уравнения (4.10) выведены в предположении, что общий показатель изменяемости одинаков для всех искомых величин. Следовательно, область применимости описываемого приближенного метода ограничена требованием законности отбрасываний, приводящих к уравнениям (4.10). Наиболее существенно, с этой точки зрения, отбрасывание слагаемого $A = \eta^{2r+2p-s}\lambda_0 v_0{}^m$ в первом равенстве (2.4). Здесь можно положить $s = 0$ ($s \neq 0$ только для колебаний релеевского типа). Поэтому, учитывая последнее равенство (2.3), можно написать $A = \eta^{2p}\lambda v_0{}^m$.

Вместе с тем, по предположению, λ определяется из решения главной задачи. Поэтому в силу (2.3) и (3.4) надо считать, что $\lambda = O(\eta^{2-4p'})$. Кроме того, имеем $p = \theta$. Следовательно, $A \to 0$ при $\eta \to 0$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\theta > 2p' - 1 \tag{6.6}$$

которым и ограничивается область применимости уравнений (4.9), (4.10) для приближенного исследования квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью.

Если неравенство (6.6) нарушается, то надо снова вернуться к форме решения (5.1), положив $\varkappa = p + p'$, $m = 6$, $n = 7$, считая, что $P_{(6)}$ определяется интегралами уравнений (4.9) при $j_3 = 0$, а $Q_{(7)}$ определяется квазитангенциальными интегралами, в которых $p = 2p' - 1$. Граничные условия (6.1) в силу (2.3), (3.2), (3.4) приведутся к виду

$$v_{1(7)}{}^\circ = -v_{1(6)}{}^\circ, \quad v_{2(7)}{}^\circ = -v_{2(6)}{}^\circ, \quad w_{(6)} = -\eta^{p'+p}w_{(7)}{}^\circ, \quad \gamma_{(6)}{}^\circ = \\ = -\eta^{2p'}\gamma_{1(7)}{}^\circ \quad (\text{на } g) \tag{6.7}$$

В правых частях двух последних равенств показатели положительны, а, значит, расчленение возможно и при нарушении условия (6.6). Главная задача остается прежней, а дополнительная теперь будет заключаться в интегрировании уравнений динамической плоской задачи с учетом неоднородных тангенциальных граничных условий (можно показать, что динамические уравнения плоской задачи имеют интегралы, для которых край g — квазистационарная линия).

7. Обсудим главные краевые задачи, выявившиеся в п. 6. Для квазитангенциальных колебаний и для квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью эти краевые задачи можно считать хорошо изученными. С точностью до свойств метрики они совпадают с краевыми задачами теории продольных или поперечных колебаний пластинки и имеют нетривиальные решения, определяющие спектры их колебаний. В последних надо, конечно, оставить только такие колебания, для которых общие показатели изменяемости p и p' ограничены неравенствами второй и третьей строки (3.5).

Для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью главная краевая задача заключается в построении нетривиальных решений динамических уравнений безмоментной теории, удовлетворяющих тангенциальным граничным условиям, причем тангенциальные силы инерции должны учитываться лишь при $p = 0$.

Для динамических безмоментных уравнений важную роль играют так называемые переходные линии δ_1, δ_2, на которых главные радиусы кривизны R_1, R_2 связаны с частотным параметром λ равенствами $\lambda = 1 / R_1^2$ или $\lambda = 1 / R_2^2$.

В случаях, когда при рассматриваемых значениях λ срединная поверхность оболочки содержит точки переходных линий, решения безмоментных динамических уравнений будут терпеть на δ_1 и δ_2 бесконечные разрывы. Поэтому решения главной задачи для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью могут и не существовать, т. е. может иметь место такая же ситуация, как в статической безмоментной задаче, для таких оболочек, как, например, торовые, когда вблизи линий изменения знака кривизны срединной поверхности решения безмоментных уравнений надо «исправлять» при помощи решений типа краевых эффектов. Однако в статике переходные линии являются исключением, связанным с геометрической спецификой оболочки, а в теории колебаний оболочек появление переходной линии представляет собой правило и обусловливается значением частот. (Исключение в этом смысле в теории колебаний имеет место лишь в простейших оболочках, главные кривизны которых постоянны.)

Процедура устранения разрывов для оболочек вращения описана, например, в [3,5–7]. Общие рассуждения о переходных линиях можно найти в [8].

Если рассматриваемое значение λ находится вне интервала

$$\min\left(\frac{1}{R_1^2}, \frac{1}{R_2^2}\right) \leqslant \lambda \leqslant \max\left(\frac{1}{R_1^2}, \frac{1}{R_2^2}\right) \tag{7.1}$$

т. е. если на срединной поверхности отсутствуют точки переходных линий, то главная краевая задача может иметь нетривиальные решения. Справа от интервала (7.1) они, по-видимому, существуют всегда, а слева от (7.1) их может и не быть (для оболочек вращения условия существования нетривиальных решений главной задачи установлены для этого случая в [9]).

8. Обращаясь к обсуждению дополнительных задач, начнем с квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью. В этом случае главное и дополнительное напряженные состояния обозначаются через $P_{(1)}$ и $Q_{(4)}$, а дополнительная краевая задача заключается в интегрировании динамических уравнений напряженных состояний с большой изменяемостью при неоднородных нетангенциальных граничных условиях.

Общий показатель изменяемости $Q_{(4)}$ равен $1/2$ (п. 6). Поэтому надо исходить из уравнений (4.9), (4.10), положив в них $j_3 = 1$, т. е. считая, что они не вырождаются в уравнения поперечных колебаний пластинки. Вместе с тем частный показатель изменяемости вдоль края g по предположению одинаков для $P_{(1)}$ и $Q_{(4)}$ и должен подчиняться неравенству $\theta \leqslant p$, а p — общий показатель изменяемости $P_{(1)}$ — должен подчиняться неравенствам первой строки (3.5). Отсюда и из равенства $p = 1/2$ заключаем, что для $Q_{(4)}$ край g — квазистационарная линия. Воспользовавшись этим, можно построить локальные (имеющие, вообще говоря, силу лишь вблизи края g) уравнения теории напряженно-деформированных состояний $Q_{(4)}$. Они получаются из (4.9), (4.10) в результате дополнительных упрощений, основанных на том, что вблизи края g заранее известны направления относительно медленного изменения искомых величин напряженно-деформированного состояния $Q_{(4)}$. Не останавливаясь на подробностях, которые можно найти в [10], приводим окончательный результат. Если отнести срединную поверхность оболочки к произвольной ортогональной системе координат (α, β) так, чтобы g совпало с β-линией, то получится система, представляющая собой динамический аналог приближенных уравнений простого краевого эффекта. Ее решение сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{h^2}{3(1-\nu^2)}\frac{1}{A^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \left(\frac{j_3}{R_2'^2} - \lambda\right) w = 0 \tag{8.1}$$

в котором A^2 — коэффициент первой квадратичной формы, R_2' — нормальный радиус кривизны поверхности вдоль β-линии, j_3 пока надо считать равным единице. Если всюду на краю g выполняется неравенство

$$1/R_2'^2 - \lambda > 0 \tag{8.2}$$

то решение дополнительной краевой задачи можно строить, так же как в статике, вводя в рассмотрение только те интегралы, которые затухают при удалении от g. Наоборот, если знак неравенства (8.2) во всех точках g изменится на обратный, то уравнение (8.1) заведомо будет иметь решения, осциллирующие без затухания вблизи g, а произволов, содержащихся в затухающих решениях, станет недостаточно для выполнения всех условий дополнительной краевой задачи. В терминах работы [11] нарушение условия (8.2) означает нерегулярность вырождения полной краевой задачи в главную краевую задачу (однако (8.2) в общем случае не является достаточным условием регулярности вырождения).

Для квазитангенциальных колебаний должны быть построены напряженно-деформированные состояния $P_{(2)}$ и $Q_{(5)}$, а дополнительная краевая задача, как и раньше, заключается в интегрировании динамических уравнений напряженных состояний с большой изменяемостью при неоднородных нетангенциальных условиях. При этом для p' — общего показателя изменяемости $Q_{(5)}$ справедливо соотношение (6.5), из которого следует, что, вообще говоря, $p' > 1/2$. Поэтому в (4.9) надо положить $j_3 = 0$, и эти равенства превратятся в уравнения поперечных колебаний пластинки, а дополнительная краевая задача сведется, в сущности, к расчету вынужденных установившихся поперечных колебаний пластинки, вызванных периодически изменяющимися краевыми смещениями. Эта задача, вообще говоря, имеет решение (единственное), а исключение представляют случаи, когда частоты квазитангенциальных колебаний совпадают с собственными значениями однородной дополнительной краевой задачи или, что то же, с частотами квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью. Такого рода совпадения в дальнейшем будут называться *внутренним резонансом*.

Из (6.5) при всех допустимых значениях p ($p < 1$) следует неравенство $p' > p$, в правой части которого стоит общий показатель изменяемости $P_{(2)}$. Это значит, что $p' > \theta$, т. е. для дополнительного напряженного состояния $Q_{(5)}$ край g, как и для $Q_{(4)}$, является квазистационарной линией. Следовательно, подсистему (4.9) вблизи g можно дополнительно упростить и вывести локальное разрешающее уравнение. Оно, очевидно, получится, если в (8.1) положить $j_3 = 0$. Таким образом, при $\lambda = 0$, $j_3 = 1$ (8.1) превращается в статическое уравнение простого краевого эффекта, а при $\lambda \neq 0$, $j_3 = 0$ оно представляет собой результат некоторых упрощений уравнений поперечных колебаний пластинки. Физически ясно, что в первом случае внутренний резонанс невозможен, а во втором он при некоторых λ неизбежен. Для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью в (8.1) слагаемые в скобках соизмеримы и можно предположить, что внутренний резонанс станет возможен тогда и только тогда, когда λ на некотором участке края превзойдет нижнюю границу интервала (7.1).

Для квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью дополнительная краевая задача при выполнении условия (6.6) сводится к решению статической плоской задачи теории упругости, и в этом случае внутренний резонанс невозможен. Если условие (6.6) нарушится, дополнительная задача сводится к расчету тангенциальных колебаний пластинки, что при определенных значениях λ будет приводить к внутреннему резонансу.

9. Обратимся к обсуждению приближенных методов исследования свободных колебаний оболочек, подразумевая под этим приближенный прием, заключающийся в замене решения полной задачи решением главной задачи.

Для поперечных колебаний с малой изменяемостью и для квазитангенциальных колебаний главная краевая задача заключается в интегрировании безмоментных динамических уравнений, а обсуждаемый приближенный прием сводится к применению безмоментной теории для исследования свободных колебаний оболочки. В соответствующих уравнениях, при известных обстоятельствах, допустимы различные дополнительные упрощения. А именно, для квазипоперечных колебаний можно отбросить тангенциальные силы инерции, а для квазитангенциальных колебаний можно отбросить нормальные перемещения в выражениях для компонент тангенциальной деформации. Отсюда вытекает, что безмоментной теорией (с выполнением тангенциальных граничных условий) формально можно пользоваться для построения квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью, если частотный параметр лежит вне интервала (7.1), а также для построения квазитангенциальных колебаний при любых λ и любой изменяемости, не выходящей за область применимости двумерной теории оболочек.

Второй приближенный метод исследования свободных колебаний оболочек заключается в построении квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью при помощи интегрирования уравнений (4.9) при $j_3 = 0$ и в выполнении нетангенциальных граничных условий. Его можно условно назвать методом замены оболочки пластинкой.

В совокупности два приближенных метода — безмоментная теория и расчет оболочки как пластины — охватывает весьма широкий, но не исчерпывающий класс колебаний оболочек. В него не входят: квазипоперечные колебания с малой изменяемостью, для которых λ находится в интервале (7.1), квазипоперечные колебания с промежуточной изменяемостью, при которой в основу расчета надо класть уравнения (4.9), (4.10), считая, что в них $j_3 = 1$ и они не вырождаются в уравнения поперечных колебаний пластинки.

Предлагаемые методы неприменимы и тогда, когда имеет место внутренний резонанс. Это явление возможно для квазитангенциальных колебаний в любом интервале изменения λ, для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью — при λ, расположенных правее верхней границы интервала (7.1), для квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью — в случае, когда нарушается неравенство (6.6).

Замечание. Квазипоперечные колебания с промежуточной изменяемостью представляют собой относительно частный, но важный вид колебаний. Как правило, именно они происходят с наинизшими частотами. В п. 4 для промежуточного показателя изменяемости было получено $p' = 1/2$. Однако надо иметь в виду, что предлагаемое исследование не претендует на полноту. Им, например, не охвачены колебания, для которых квазистационарные направления проходят вдоль асимптотических линий срединной поверхности. Из результатов работы [10] вытекает, что для таких колебаний $p' = {}^1/_3$ при $K < 0$ и $p' = {}^1/_4$ при $K = 0$ (K — кривизна срединной поверхности).

10. Обсудим неточности рассматриваемых приближенных методов. Они составляются, во-первых, из погрешностей от отбрасывания дополнительного напряженно-деформированного состояния и, во-вторых, из погрешностей, допускаемых при построении главного напряженно-деформированного состояния. Оценим сначала погрешности первого рода.

По формулам (2.3), (3.1), (3.2), (3.4) получаем оценки для величин, связанных с напряженно-деформированными состояниями $P_{(1)}$, $P_{(2)}$, $P_{(3)}$, введенными в п. 5 (всюду считается, что w соизмеримо с единицей)

$$
\begin{aligned}
&v_{\rho(1)} = O(\eta^{p}), \quad \sigma_{(1)}(T) = O(\eta^{-1}), \quad \sigma_{(1)}(M) = O(\eta^{-2p}) \\
&v_{\rho(2)} = O(\eta^{-p}), \quad \sigma_{(2)}(T) = O(\eta^{-1-2p}), \quad \sigma_{(2)}(M) = O(\eta^{-2p}) \\
&v_{\rho(4)} = O(\eta^{p'}), \quad \sigma_{(4)}(T) = O(\eta^{-1}), \quad \sigma_{(4)}(M) = O(\eta^{-2p'}) \\
&(\rho = 1, 2)
\end{aligned} \tag{10.1}
$$

В них под $\sigma(T)$ и $\sigma(M)$ подразумеваются напряжения от тангенциальных усилий и от моментов соответственно. (Оценочные формулы для $Q_{(5)}$, которые понадобятся ниже, при произвольных p' не отличаются от формул для $Q_{(4)}$, но надо помнить, что смысл p' для $Q_{(4)}$ и $Q_{(5)}$ различен.)

Из (10.1) вытекают следующие формулы сравнения по деформативности и по напряженности:

$$
\begin{aligned}
&V_{(4)} = O(V_{(1)}), \quad \Sigma_{(4)} = O(\Sigma_{(1)}) \\
&V_{(5)} = O(\eta^{p}V_{(2)}), \quad \Sigma_{(5)} = O(\eta^{1+2p-2p'}\Sigma_{(2)}) = O(\eta^{p}\Sigma_{(2)})
\end{aligned} \tag{10.2}
$$

В них под V и Σ подразумеваются модули асимптотически главных перемещений и напряжений соответственно, а последнее равенство преобразовано при помощи (6.5).

Таким образом, $P_{(1)}$ и $Q_{(4)}$ асимптотически эквивалентны как по деформативности, так и по напряженности, и, следовательно, безмоментный расчет квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью формально приводит к погрешности порядка $O(1)$. Такая же ситуация имеет место для оболочек с заделанным краем и в статике. Различие заключается только в том, что в статике $Q_{(4)}$ всегда затухает при удалении от края, и, значит, безмоментный расчет вдали от линий искажения остается верен, в то время как для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью затухание $Q_{(4)}$ будет обеспечено, только пока частотный параметр λ располагается левее интервала (7.1).

Замечание. Если $Q_{(4)}$ содержит осциллирующие слагаемые, то безмоментный расчет сохраняет свое значение как первый этап приближенного исследования. Он должен быть в этом случае дополнен построением напряженно-деформированного состояния $Q_{(4)}$ (вообще говоря, это весьма сложная, даже для решения на ЭЦВМ, задача, но, например, для оболочек вращения она элементарно решается методом экспоненциального представления).

Для квазитангенциальных колебаний $Q_{(5)}$ при $p > 0$ и по деформативности, и по напряженности — второстепенно по сравнению с $P_{(2)}$. Таким образом, безмоментный расчет для квазитангенциальных колебаний при $p > 0$ всегда дает исчезающе малую (при $\eta \to 0$) погрешность, асимптотический порядок которой оценивается по формулам (10.2) и (6.5), т. е. приводит в динамике к лучшим результатам, чем в статике.

Если нарушается требование (6.6), то при расчете квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью методом замены оболочки пластинкой в формуле (5.1) отбрасывается слагаемое $P_{(6)}$. Учитывая, что $P_{(6)}$ определяется интегралами с большой изменяемостью, а $Q_{(7)}$ — квазитангенциальными интегралами, можно воспользоваться оценками (10.1), заменив в них индексы (4) и (2) на (6) и (7) соответственно. Отсюда

$$(10.3) \qquad \eta^{p+p'}V_{(7)} = O\,(\eta^{p'}V_{(6)}), \;\; \eta^{p+p'}\Sigma_{(7)} = O\,(\eta^{-1+3p'-p}\Sigma_{(6)})$$

Условие применимости метода замены оболочки пластинкой заключается в неравенстве $p' > {}^1/_2$. Поэтому в правой части первого соотношения (10.3) показатель при η положителен. Таким же свойством обладает и второе соотношение (10.3), так как в рассматриваемом случае $p = 2p' - 1$ (п. 6), а следовательно, $-1 + 3p' - p = p'$.

Обратимся к погрешностям определения главного напряженно-деформированного состояния, связанным с неточностями, допущенными как в уравнениях, так и в граничных условиях главной краевой задачи.

Оценки порядков слагаемых, отброшенных в уравнениях, выписаны в фигурных скобках при соответствующих системах. Однако построению подлежат интегралы с большой изменяемостью, и в них погрешности будут существенно больше относительных модулей отбрасываемых членов. А именно, на основании обсуждения этого вопроса в [12] (гл. 13, § 4) можно принять, что отбрасывание величин порядка $O\,(\eta^k)$ влечет погрешность порядка $O(\eta^{k-p})$ при определении интегралов с показателем изменяемости p. Отсюда, используя записи в фигурных скобках при уравнениях (4.1), (4.3), (4.4) и (4.9), получаем следующие оценки погрешностей ε':

$$(10.4) \qquad \varepsilon' = O\,(\eta^{2-5p}), \qquad \varepsilon' = O\,(\eta^{2-3p}), \qquad \varepsilon' = O\,(\eta^{p'})$$

соответственно для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью, квазитангенциальных колебаний и квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью.

Можно принять, что погрешности ε'', связанные с неточностями в граничных условиях главных краевых задач, имеют такой же порядок, как и члены, отбрасываемые в равенствах, которые выражают эти условия. Поэтому в силу (6.2), (6.4), (6.5) и (6.7) получаем следующие оценки:

$$(10.5) \qquad \varepsilon'' = O\,(\eta^{1/2-p}), \qquad \varepsilon'' = O\,(\eta^{1/2+3/2p}), \qquad \varepsilon'' = O\,(\eta^{p'+p} + \eta^{2p'})$$

(в первой из них принято во внимание, что для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью $p' = {}^1/_2$).

Окончательно погрешность в главном напряженно-деформированном состоянии определяется как максимум двух соответствующих оценок (10.4), (10.5).

В заключение отметим, не останавливаясь на подробностях, что порядок поправки $\delta\lambda$ частотного параметра можно принять равным порядку наибольшего из модулей слагаемых, отбрасываемых в уравнениях или в граничных условиях главной задачи. Это значит, что $\delta\lambda = \max(\varepsilon'', \varepsilon''')$, где

$$\varepsilon''' = O(\eta^{2-4p}), \quad \varepsilon''' = O(\eta^{2-2p}), \qquad \varepsilon''' = O(\eta^{2-2p'})$$

Поступила 1 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
2. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.— Л., ОНТИ, 1935.
3. *Алумяэ Н. А.* О фундаментальной системе интегралов уравнений малых осесимметрических установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960, т. 9, № 1.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, зависящими от параметра. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
5. *Товстик П. Е.* Интегралы уравнений осесимметричных колебаний оболочки вращения. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, вып. 4. Изд-во ЛГУ, 1965.
6. *Товстик П. Е.* Интегралы системы уравнений неосесимметричных колебаний тонкой оболочки вращения. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, вып. 5. Изд-во ЛГУ, 1966.
7. *Товстик П. Е.* Свободные осесимметричные колебания оболочки вращения. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
8. *Чернышев Г. Н.* О некоторых свойствах интегралов динамических уравнений теории оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 2.
9. *Харькова Н. В.* О нижней части спектра собственных осесимметричных колебаний тонкой упругой оболочки вращения. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
10. *Гольденвейзер А. Л.* Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
11. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5 (77).
12. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.