Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 532.516

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ В ОБЛАСТИ, ПРИМЫКАЮЩЕЙ К ОБТЕКАЕМОМУ ТЕЛУ, ПРИ МАЛОМ ЧИСЛЕ РЕЙНОЛЬДСА

М. М. Васильев

(Москва)

Рассматривается обтекание тела конечных размеров, имеющего достаточно гладкую границу, стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости при малом числе Рейнольдса 2λ. Изучается асимптотическое поведение скорости течения на расстояниях от тела $R \ll \lambda^{-1}$. Доказано, что скорость может быть представлена в виде суммы скорости в линейном приближении Озеена, которая является аналитической функцией числа Рейнольдса, и отрезка асимптотического ряда по числу Рейнольдса. Коэффициенты этого отрезка ряда определяются как решения некоторых линейных краевых задач в приближении Стокса. Для случая обтекания шара получается явная формула, которая совпадает с известным внутренним разложением Праудмена и Пирсона.

1. Стационарное обтекание тела B потоком вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье — Стокса с граничными условиями (S — поверхность тела)

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \frac{1}{2\lambda}\Delta\mathbf{u}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}|_S = \mathbf{u}_0, \quad \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty = (1, 0, 0)$$

Для скорости возмущений $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty$ получается следующая краевая задача:

$$\Delta\mathbf{v} - 2\lambda\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_1} - 2\lambda\operatorname{grad} p = 2\lambda\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{v}|_S = \mathbf{v}_0, \quad \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \mathbf{v} = 0$$

Известно [1], что если поверхность S и функция $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\infty$ удовлетворяют некоторым условиям гладкости, то решение рассматриваемой краевой задачи существует при любых числах Рейнольдса в классе функций с ограниченным интегралом Дирихле

$$\int_D |\nabla\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} < C, \quad D = R^3 \setminus B$$

В дальнейшем используются две следующие теоремы К. И. Бабенко [2].

Теорема 1. Если $S \in C^{2+\delta}$, $\delta > 0$, $\mathbf{v}_0 \in C^2[S]$, то существует такое число Рейнольдса Re_*, что решение краевой задачи (1.1) дается рядами

$$(1.3)\qquad \mathbf{v}(\mathbf{x},\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(2\lambda)^k\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x},\lambda),\quad p(\mathbf{x},\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(2\lambda)^k p^{(k)}(\mathbf{x},\lambda)$$

сходящимися при $2\lambda<\mathrm{Re}_*$.

Если S и $\mathbf{v}_0$ входят в компактные семейства, то $\inf \mathrm{Re}_*>0$, где нижняя грань берется по этим семействам.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует число Рейнольдса Re_u $(0<\mathrm{Re}_u<\infty)$, такое, что при $2\lambda<\mathrm{Re}_u$ решение краевой задачи (1.1) с ограниченным интегралом Дирихле единственно.

В формулах (1.3) функции $\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{x},\lambda)$, $p^{(0)}(\mathbf{x},\lambda)$ — решение краевой задачи для однородной системы уравнений Озеена (которая получается из системы (1.2) путем отбрасывания нелинейного члена $2\lambda\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$) с неоднородными граничными условиями из (1.2), а $\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x},\lambda)$, $p^{(k)}(\mathbf{x},\lambda)$ $(k\geqslant 1)$ — решение неоднородной системы Озеена

$$(1.4)\qquad \begin{gathered}\Delta\mathbf{v}^{(k)}-2\lambda\frac{\partial\mathbf{v}^{(k)}}{\partial x_1}-2\lambda\,\mathrm{grad}\,p^{(k)}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{k-1}v_i^{(j)}\frac{\partial\mathbf{v}^{(k-1-j)}}{\partial x_i}\\ \mathrm{div}\,\mathbf{v}^{(k)}=0\end{gathered}$$

с однородными граничными условиями.

Разложение вида (1.3) было ранее использовано в работе [3] при доказательстве существования решения задачи обтекания при малых числах Рейнольдса в классе функций, удовлетворяющих условию $\mathbf{v}=O(|\mathbf{x}|^{-1})$.

2. Для получения асимптотического представления скорости при малых числах Рейнольдса вида

$$(2.1)\qquad \mathbf{v}(\mathbf{x},\lambda)=\sum_{n=0}^{N}\alpha_n(\lambda)\,\mathbf{U}^{(n)}(\mathbf{x})+O[\alpha_{N+1}(\lambda)]$$

где $\{\alpha_n(\lambda)\}$ — асимптотическая последовательность при $\lambda\to 0$, нужно разложить по λ коэффициенты $\mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x},\lambda)$ в первой из формул (1.3). Однако для всей области D разложения вида (2.1) получить нельзя, а можно построить лишь отдельные разложения в области $\{\mathbf{x}\colon|\mathbf{x}|\ll\lambda^{-1}\}\cap D$, в области $\{\mathbf{x}\colon|\mathbf{x}|\gg\lambda^{-1}\}$ и в промежуточной области. Асимптотическая формула для скорости вдали от тела, справедливая при любых числах Рейнольдса, получена в работах [4,5].

Согласно первой из формул (1.3)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},\lambda)=\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{x},\lambda)+2\lambda\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x},\lambda)+O(\lambda^2)$$

Получим разложение по λ функции

$$(2.2)\qquad \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x},\lambda)=\int_D\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)\,v_k^{(0)}(\mathbf{y},\lambda)\frac{\partial\mathbf{v}^{(0)}}{\partial y_k}(\mathbf{y},\lambda)\,d\mathbf{y}$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)$ — матрица Грина. Здесь и в дальнейшем предполагается, что по дважды повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. Полагая $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)=\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)+\mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)$, где $\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)$ — матрица фундаментальных решений уравнений Озеена, будем искать регулярную часть матрицы Грина $\mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)$ в виде потенциала двойного слоя. Заметив, что при замене $\mathbf{u}_\infty$ на $-\mathbf{u}_\infty$ система уравнений Озеена переходит в сопряженную систему, можно написать ($\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S)

$$V_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda, \mathbf{u}_\infty) = V_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \lambda, -\mathbf{u}_\infty) = \tag{2.3}$$

$$= \int_S K_{il}(\mathbf{y}, \mathbf{z}; \lambda, -\mathbf{u}_\infty)\, \varphi_{lj}(\mathbf{z}, \mathbf{x})\, d\sigma_z \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$K_{il} = \left(\frac{\partial H_{il}}{\partial z_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial z_l} + 2\lambda\delta_{kl}q_i\right) n_i + \lambda n_1 H_{il} - H_{il}$$

$$H_{il} = \delta_{il}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_i\, \partial y_l}, \quad \Phi = -\frac{1}{8\pi\lambda}\int_0^{\lambda s} \frac{1 - e^{-t}}{t}\, dt$$

$$s = |\mathbf{y} - \mathbf{z}| - y_1 + z_1, \quad q_i = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{y} - \mathbf{z}|}\right)$$

Здесь использована конструкция потенциала, предложенная К. И. Бабенко[1]. Такая конструкция делает однозначно разрешимым при $\lambda = 0$ интегральное уравнение для определения плотности потенциала

$$\frac{1}{2}\varphi_{lj}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \int_S K_{lm}(\mathbf{z}, \zeta)\, \varphi_{mj}(\mathbf{x}, \zeta)\, d\sigma_\zeta = -H_{lj}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \tag{2.4}$$

3. Интеграл (2.2) можно представить в виде суммы следующих двух интегралов:

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{x}, \lambda) = \int_D \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda)\, v_k^{(0)}(\mathbf{y}, \lambda)\, \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial y_k}(\mathbf{y}, \lambda)\, d\mathbf{y}$$

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{x}, \lambda) = \int_D \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda)\, v_k^{(0)}(\mathbf{y}, \lambda)\, \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial y_k}(\mathbf{y}, \lambda)\, d\mathbf{y}$$

Известно, что $\mathbf{v}^{(0)}$ и $\partial\mathbf{v}^{(0)}/\partial y_k$ — аналитические функции λ при $\lambda = 0$. Это вытекает из того, что если $\mathbf{v}^{(0)}$ представить в виде потенциала двойного слоя

$$\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{y}) = \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{z}; \lambda)\, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z})\, d\sigma_z \tag{3.1}$$

то для определения плотности потенциала $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{z})$ получится линейное интегральное уравнение, в котором ядро и правая часть — аналитические функции λ при $\lambda = 0$, причем соответствующее однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение. Аналогично получается аналитичность функции $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda)$ при $\lambda = 0$, которая будет использована при определении асимптотики интеграла $\mathbf{I}_2(\mathbf{x}, \lambda)$.

Представим область интегрирования в виде объединения следующих областей: $D_1 = \{\mathbf{y}: |\mathbf{y}| \leqslant 2a\} \cap D$ ($2a$ — диаметр тела B), $D_2 = \{\mathbf{y}: 2a \leqslant |\mathbf{y}| \leqslant \lambda^{-1}\}$ и $D_3 = \{\mathbf{y}: |\mathbf{y}| \geqslant \lambda^{-1}\}$. Пользуясь аналитич-

---

[1] *Бабенко К. И.* Теория возмущений стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1975, № 79.

ностью $\mathbf{v}^{(0)}$ и $\partial \mathbf{v}^{(0)}/\partial y_k$, можно показать, что

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{x}, \lambda) = \int_{D_1} \mathbf{H}(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla \mathbf{v}^{(0)})\, d\mathbf{y} = \mathbf{J}_1(\mathbf{x}, 0) + O(\lambda)$$

Рассмотрим интеграл

$$\mathbf{J}_4 = \int_{D_4} \mathbf{H}(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla \mathbf{v}^{(0)})\, d\mathbf{y}, \quad D_4 = D_2 \cup D_3 \tag{3.2}$$

Для вычисления его асимптотики разложим ядро $\mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{z}; \lambda)$ в формуле (3.1) в ряд по переменной $\mathbf{z}$ и, проинтегрировав по $\mathbf{z}$, получим

$$v_i^{(0)}(\mathbf{y}) = A_j H_{ij}(\mathbf{y}) + A \frac{y_i}{|\mathbf{y}|^3} + A_{jk} \frac{\partial H_{ij}}{\partial y_k}(\mathbf{y}) + \ldots, \quad A_j = 2\lambda F_j^{(0)} \tag{3.3}$$

Здесь $F_j^{(0)}$—j-я координата вектора силы, действующей на тело B, в приближении Озеена. Подстановка разложения (3.3) в формулу (3.2) дает

$$\mathbf{J}_4(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{j}_4(\mathbf{x}, \lambda) + \mathbf{l}_4(\mathbf{x}, \lambda)$$

$$j_{4i}(\mathbf{x}, \lambda) = A_l A_m \int_{D_4} H_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, H_{kl}(\mathbf{y}) \frac{\partial H_{jm}}{\partial y_k}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

$$l_{4i}(\mathbf{x}, \lambda) = l_{4i}(\mathbf{x}, 0) + O(\lambda)$$

Представим интеграл $\mathbf{j}_4$ в виде суммы двух интегралов $\mathbf{j}_2$ и $\mathbf{j}_3$ соответственно по областям D_2 и D_3.

Так как

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geqslant |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| \geqslant |\mathbf{y}| - h\lambda^{-1} \geqslant (1 - h)|\mathbf{y}| \quad (0 \leqslant h \leqslant 1)$$

то, пользуясь равномерными по λ оценками фундаментального решения

$$|H_{ij}(\mathbf{x})| \leqslant C|\mathbf{x}|^{-1}, \quad |\nabla H_{ij}(\mathbf{x})| \leqslant C|\mathbf{x}|^{-3/2}[s(\mathbf{x}) + 1]^{-1/2}$$

можно заключить, что

$$|\mathbf{j}_3| \leqslant C_1 \int_{D_3} |\mathbf{y}|^{-7/2}[s(\mathbf{y}) + 1]^{-1/2} d\mathbf{y} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int_{\lambda^{-1}}^{\infty} \rho^{-3/2} d\rho \int_0^{\pi} [\rho(1 - \cos\theta) + 1]^{-1/2} \sin\theta\, d\theta \leqslant C\lambda$$

В последнем неравенстве осуществлен переход к сферическим координатам.

Рассмотрим теперь интеграл $\mathbf{j}_2$. Применяя разложения

$$H_{kl}(\mathbf{x}, \lambda) = H_{kl}(\mathbf{x}, 0) + \lambda \frac{\partial H_{kl}}{\partial \lambda}(\mathbf{x}, 0) + \lambda^2 \Psi_{kl}(\mathbf{x}, \lambda)$$

$$\frac{\partial H_{jl}}{\partial x_k}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}, 0) + \lambda \frac{\partial^2 H_{ij}}{\partial \lambda\, \partial x_k}(x, 0) + \lambda^2 \Psi_{ijk}(\mathbf{x}, \lambda)$$

$$\Psi_{kl}(\mathbf{x}, \lambda) = O(|\mathbf{x}|), \quad \Psi_{ijk}(\mathbf{x}, \lambda) = O(1)$$

получим

$$j_{2i} = A_l A_m \int_{D_2} H_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0)\, H_{kl}(\mathbf{y}, 0) \frac{\partial H_{jm}}{\partial y_k}(\mathbf{y}, 0)\, d\mathbf{y} + \tag{3.4}$$

$$+ B_i \lambda \ln \frac{1}{\lambda} + O(\lambda), \quad B_i = \frac{A_l A_m}{30(8\pi)^2}(7\delta_{1i}\delta_{lm} + 17\delta_{1m}\delta_{il} - 48\delta_{1l}\delta_{im})$$

Заметим, что если в первом слагаемом выражения (3.4) заменить область интегрирования D_2 на D_4, то при этом будет совершена ошибка $O(\lambda)$ и полученный интеграл не будет зависеть от λ. Следовательно

$$j_{2i} = A_l A_m \int\limits_{D_4} H_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, 0) H_{kl}(\mathbf{y}, 0) \frac{\partial H_{jm}}{\partial y_k}(\mathbf{y}, 0)\, d\mathbf{y} + + B_i \lambda \ln \frac{1}{\lambda} + O(\lambda)$$

Таким образом

$$I_{1i}(x, \lambda) = I_{1i}(x, 0) + B_i \lambda \ln \frac{1}{\lambda} + O(\lambda) \tag{3.5}$$

Выразим $I_{1i}(\mathbf{x}, 0)$ через скорость течения $\mathbf{v}^{(s)}$ в приближении Стокса, т. е. через решение системы уравнений

$$\Delta \mathbf{V} - 2\lambda \operatorname{grad} p = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

с граничными условиями из (1.2).

Пользуясь формулами [1]

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}^{(S)} + O(\lambda), \quad \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial y_k} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(S)}}{\partial y_k} + O\{\lambda \,|\, \mathbf{y} \,|^{-1/2} [s(\mathbf{y}) + 1]^{-1/2}\} \tag{3.6}$$

можно показать, что

$$I_{1i}(x, \lambda) = \int\limits_D H_{ij}(x-y, 0) v_k^{(S)} \frac{\partial v_j^{(S)}}{\partial y_k} dy + O\left(\lambda \ln \frac{1}{\lambda}\right)$$

Следовательно

$$I_{1i}(\mathbf{x}, 0) = \int\limits_D H_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, 0) v_k^{(S)} \frac{\partial v_j^{(S)}}{\partial y_k} d\mathbf{y} \tag{3.7}$$

4. Рассмотрим интеграл

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{x}, \lambda) = \int\limits_D \mathbf{V}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \lambda, -\mathbf{u}_\infty) v_k^{(0)} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial y_k} d\mathbf{y}$$

Для определения его асимптотики применим прием, использованный в работе [2] при определении силы, действующей на тело. Из формул (7) и (8) вытекает, что $\mathbf{V}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \lambda, -\mathbf{u}_\infty)$ — линейный оператор $\mathbf{L}$ от функции $-\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{u}_\infty)$, рассматриваемой как функция $\mathbf{z}$, т. е.

$$\mathbf{V}(\mathbf{y}, \mathbf{z}; \lambda, -\mathbf{u}_\infty) = \mathbf{L}[\mathbf{y}; -\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{u}_\infty, \lambda)] = = \mathbf{L}[\mathbf{x}; -\mathbf{H}(\mathbf{y}, \mathbf{z}; -\mathbf{u}_\infty, \lambda)] = \mathbf{L}[\mathbf{x}; -\mathbf{H}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \mathbf{u}_\infty, \lambda)]$$

Отсюда, следует, что

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{x}, \lambda) = \int\limits_D \mathbf{L}[\mathbf{x}; -\mathbf{H}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \mathbf{u}_\infty, \lambda)] (\mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla \mathbf{v}^{(0)})\, d\mathbf{y} = = \mathbf{L}[\mathbf{x}; -\mathbf{I}_0(\mathbf{z}, \lambda)], \quad \mathbf{I}_0(\mathbf{z}, \lambda) = \int\limits_D \mathbf{H}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; \mathbf{u}_\infty, \lambda) (\mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla \mathbf{v}^{(0)})\, d\mathbf{y} \tag{4.1}$$

---

[1] См. сноску на стр. 1074.

Входящий в эту формулу интеграл $I_0(z, \lambda)$ имеет такую же асимптотику, как и интеграл I_1, т. е.

$$I_{0i}(\mathbf{z}, \lambda) = \int_D H_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y}; u_\infty, 0)\, v_k^{(0)} \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial y_k} d\mathbf{y} + B_i \lambda \ln \frac{1}{\lambda} + O(\lambda)$$

Подставляя это выражение в формулу (4.1), получим

$$I_{2i}(\mathbf{x}, \lambda) = f_i^{(0)}(\mathbf{x}) + g_i^{(0)}(\mathbf{x})\, \lambda \ln \frac{1}{\lambda} + O(\lambda) \tag{4.2}$$

где $f_i^{(0)}(\mathbf{x})$ и $g_i^{(0)}(\mathbf{x})$ — решения краевых задач для системы уравнений Озеена с граничными условиями

$$f_i^{(0)}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in S} = -\int_D H_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, 0)\, v_k^{(S)}(\mathbf{y}) \frac{\partial v_j^{(S)}}{\partial y_k}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} f_i^{(0)}(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_i^{(0)}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in S} = -B_i, \quad \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} g_i^{(0)}(\mathbf{x}) = 0$$

Учитывая первую из формул (3.6), можно заменить в формуле (4.2) решения краевых задач Озеена $f_i^{(0)}(\mathbf{x})$ и $g_i^{(0)}(\mathbf{x})$ соответствующими решениями краевых задач для уравнений Стокса $f_i^{(S)}(\mathbf{x})$ и $g_i^{(S)}(\mathbf{x})$.

Таким образом, объединяя формулы (3.5) и (4.2), получим

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{w}_0^{(S)}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_1^{(S)}(\mathbf{x})\, \lambda \ln \frac{1}{\lambda} + O(\lambda) \tag{4.3}$$

где $\mathbf{w}_0^{(S)}$ — решение неоднородной системы уравнений Стокса

$$\Delta \mathbf{v} - 2\lambda \operatorname{grad} p = v_k^{(S)} \frac{\partial \mathbf{v}^{(S)}}{\partial x_k}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{4.4}$$

с граничными условиями $\mathbf{v}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in S} = 0$, $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$; $\mathbf{w}_1^{(S)}(\mathbf{x})$ — решение однородной системы уравнений Стокса с граничными условиями

$$\mathbf{w}_1^{(S)}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in S} = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \mathbf{w}_1^{(S)}(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \tag{4.5}$$

Подставляя (4.3) в первую из формул (1.3), приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Если поверхность S тела B имеет кривизну, удовлетворяющую условию Гельдера, и функция $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируема, то при $|\mathbf{x}| \ll \lambda^{-1}$ и при достаточно малом λ решение краевой задачи (1.1) представляется асимптотической формулой

$$u_i(\mathbf{x}, \lambda) = u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \lambda) + 2\lambda w_{0i}^{(S)}(\mathbf{x}) + 2\lambda^2 \ln \frac{1}{\lambda}\, w_{1i}^{(S)}(\mathbf{x}) + O(\lambda^2) \tag{4.6}$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

где $u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \lambda)$ — решение краевой задачи для системы уравнений Озеена с граничными условиями из (1.1).

5. Задача обтекания шара вязкой жидкостью решалась Праудменом и Пирсоном [6] методом сращиваемых асимптотических разложений. Применение формулы (4.6) к этой задаче приводит к внутреннему разложению решения Праудмена и Пирсона. Таким образом, это внутреннее разложе-

ние получает строгое обоснование в рассматриваемых порядках по числу Рейнольдса.

В заключение автор выражает глубокую признательность К. И. Бабенко за ценные советы.

Поступила 25 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
2. *Бабенко К. И.* Теория возмущений стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 3.
3. *Finn R.* On the exterior stationary problem for the Navier — Stokes equations and associated perturbation problems. Arch. Ration. Mech. and Analys., 1965, vol. 19, No. 5, p. 363—406.
4. *Бабенко К. И., Васильев М. М.* Об асимптотическом поведении стационарного течения вязкой жидкости вдали от тела. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
5. *Васильев М. М.* Об асимптотическом поведении скорости и силах, действующих на тело, в стационарном потоке вязкой жидкости. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
6. *Proudman I.*, *Pearson J. R. A.* Expansion at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and circular cylinder. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt 3.