

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЗАРЯЖЕННОЙ КОМПОНЕНТЫ ВМЕСТО ЗАКОНА ОМА

В. В. Гогосов, В. М. Коровин, В. А. Полянски й

(Москва)

Исследуется структура электрогидродинамических ударных волн с использованием самой общей формы закона Ома — полного уравнения импульсов заряженной компоненты. Считается при этом, что в областях течения вне структуры волны параметры связаны обычным законом Ома. Получены дополнительные соотношения, замыкающие систему соотношений на электрогидродинамическом разрыве. Исследуются различные механизмы образования поверхностного заряда на фронте волны. Показано, что конвективный член и градиент давления ионов не дают вклада в образование поверхностного заряда. Учет в уравнении импульсов заряженной компоненты термодиффузионного члена и члена, описывающего влияние вязкого переноса импульса смеси на диффузию ионов в электрическом поле, приводит к новым дополнительным соотношениям на фронте волны, которые отличаются от полученных в работах [1, 2].

1. Постановка задачи. Структура электрогидродинамических ударных волн исследовалась в работах [1, 2] с целью получения дополнительного соотношения, замыкающего систему соотношений на разрыве в случае, когда на волне отсутствует поверхностный ток. При этом существенно использовалась модель среды с законом Ома в виде

$$(1.1) \quad \mathbf{j}^* = q^* (\mathbf{u}^* + b\mathbf{E}^*)$$

Здесь \mathbf{j}^* — плотность электрического тока, q^* — плотность объемного заряда (будем считать для определенности, что имеется один сорт положительно заряженных частиц — ионов, так что $q^* > 0$), \mathbf{u}^* — скорость среды, b — коэффициент подвижности ионов, \mathbf{E}^* — вектор напряженности электрического поля.

Уравнение (1.1) следует из уравнения движения для ионной компоненты [3]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_i^* v^* + \nabla p_i^* + \operatorname{div} [\rho_i^* v^* v^* + \pi_i^* - \rho_i^* (v^* - u^*)(v^* - u^*)] - \\ - q^* \mathbf{E}^* = \mathbf{R}_i^{(1)} \\ \mathbf{R}_i^{(1)} = b^{-1} [q^* \mathbf{u}^* - \mathbf{j}^* - q^* D_t \nabla T^* + q^* D_p \mathbf{E}^* W^*] \\ W_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^*}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s^*}{\partial x_r} \right) - \frac{1}{3} \delta_{rs} \operatorname{div} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{j}^* = q^* \mathbf{v}^*, \quad p_i^* = e^{-1} k q^* T^* \end{aligned}$$

Здесь ρ_i^* , v^* , p_i^* , π_i^* — плотность, скорость, давление и тензор вязких напряжений ионной компоненты, e — заряд иона, T^* — температура, W_{rs}^* — компоненты тензора скоростей деформаций смеси, k — постоянная Больцмана.

Уравнение (1.2) получено из кинетического уравнения Больцмана для ионной компоненты; температура, давление и тензор вязких напряжений ионов введены по хаотической скорости частиц, определенной по средней скорости смеси. Коэффициенты b , D_t , D_φ , а также все остальные коэффициенты переноса, используемые в дальнейшем, вычисляются методом Грэда в тринадцатимомментном приближении и приведены в работе [3].

В данной работе исследуется структура ударной волны с использованием уравнения (1.2) вместо обычного закона Ома (1.1).

Рассмотрим стационарное течение среды в электрическом поле и выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена вниз по потоку. Будем считать, что все величины зависят только от x и что скорость среды, скорость ионов и электрическое поле имеют составляющие лишь вдоль оси x . Уравнения, описывающие такое течение, с учетом вязкости и теплопроводности среды в безразмерной форме имеют вид

$$(1.3) \quad \frac{4}{3} \varepsilon \frac{du}{d\zeta} = u + \frac{1}{\gamma M_1^2} \frac{T}{u} - SE^2 - \Pi_*$$

$$(1.4) \quad \frac{\varepsilon}{(\gamma-1)M_1^2 \text{Pr}} \frac{dT}{d\zeta} + \frac{4}{3} \varepsilon u \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{(\gamma-1)M_1^2} T + \frac{1}{2} u^2 + 2SJ(\varphi - \varphi_1) - \Sigma_*$$

$$(1.5) \quad dE/d\zeta = q, \quad d\varphi/d\zeta = -E$$

$$(1.6) \quad \mu \left(T - \frac{\gamma M_1^2}{q^2} \right) \frac{dq}{d\zeta} = -J + q(u + E) + \frac{2}{3} \varepsilon a_v q E \frac{du}{d\zeta} - q(\mu + \varepsilon a_t) \frac{dT}{d\zeta}$$

$$(1.7) \quad p = \rho T, \quad \rho u = 1$$

$$(1.8) \quad \Pi_* = \Pi - \varepsilon \omega_u, \quad \Sigma_* = \Sigma - \varepsilon \omega_t$$

$$\omega_u = \frac{4}{3} \frac{du}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_1}, \quad \omega_t = \omega_u + \frac{1}{(\gamma-1)M_1^2 \text{Pr}} \frac{dT}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_1}$$

$$\Pi = 1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} - SE_1^2, \quad \Sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_1^2}$$

Уравнение движения ионов (1.6) преобразовано здесь с использованием предпоследнего соотношения (1.2); кроме того, пренебрегается тензорами вязких и диффузионных напряжений ионной компоненты.

Безразмерные параметры в этих уравнениях определяются формулами

$$(1.9) \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_1^*}, \quad u = \frac{u^*}{u_1^*}, \quad p = \frac{p^*}{p_1^*}, \quad T = \frac{T^*}{T_1^*}, \quad E = \frac{bE^*}{u_1^*},$$

$$\varphi = \frac{b\varphi^*}{u_1^* L}$$

$$q = \frac{q^* u_1^*}{|j^*|}, \quad M_1^2 = \frac{\rho_1^* u_1^{*2}}{\gamma p_1^*}, \quad S = \frac{1}{8\pi \rho_1^* b^{*2}}, \quad J = \frac{j^*}{|j_1^*|},$$

$$\text{Pr} = \frac{c_p \eta}{\lambda}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad \zeta = \frac{x}{L}, \quad a_v = \frac{D_v u_1^*}{bl}, \quad a_t = \frac{D_t T_1^*}{u_1^* l}$$

$$\varepsilon = \frac{l}{L}, \quad \mu = \frac{l_d}{L}$$

При этом

$$(1.10) \quad l = \frac{\eta}{\rho_1^* u_1^*}, \quad l_d = \frac{kT_1^* b}{eu_1^*}, \quad L = \frac{u_1^{*2}}{4\pi b |j^*|}$$

Здесь p^* , ρ^* — давление и плотность среды, φ^* — электрический потенциал, c_p , c_v — удельные теплоемкости, η , λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности среды. В рассматриваемом случае из уравнения неразрывности для ионов следует, что $j^* = \text{const}$. Величины Π и Σ в уравнениях (1.3), (1.4) — постоянные интегрирования, определяемые параметрами течения в некоторой точке $\zeta = \zeta_1$. Значения параметров в этой точке отмечаются индексом 1. В дальнейшем будем рассматривать течения слабоионизованного газа ($\rho_i^* / \rho^* \ll 1$).

Выпишем соотношения для величин a_v и a_t в этом случае, используя результаты работы [3]

$$(1.11) \quad a_v = \frac{6\gamma b_1^* c_1 M_2^1}{c_1^*} \left(1 + \frac{0.3 A_{aa}^* Q_{aa}}{c_1 Q_{ia}} \right), \quad a_t = \frac{72 b_1^*}{f_1^*} \left(A_{ia}^* - A_{aa}^* \frac{Q_{aa}}{Q_{ia}} \right)$$

$$b_1^* = 0.25 (1.2 C_{ia}^* - 1), \quad c_1 = 0.25 (1 - 0.6 A_{ia}^*), \quad c_1^* = 1 + 0.6 A_{ia}^*$$

$$f_1^* = 5.5 + 1.6 A_{ia}^* - 1.2 B_{ia}^*$$

Здесь Q_{aa} и Q_{ia} — транспортные сечения упругих столкновений нейтральных частиц между собой и заряженных частиц с нейтральными. Выражения для $Q_{\alpha\beta}$, а также для величин $A_{\alpha\beta}^*$, $B_{\alpha\beta}^*$ и $C_{\alpha\beta}^*$ через стандартные интегралы столкновений приведены в работе [3]. Для частиц, взаимодействующих одна с другой как твердые упругие шарики, величины $A_{\alpha\beta}^*$, $B_{\alpha\beta}^*$, $C_{\alpha\beta}^*$ равны единице. Для других законов взаимодействия эти величины вычислены в работах [4, 5] для ряда газовых смесей¹. Для молекул с максвелловским потенциалом взаимодействия величина $C_{ia}^* = 5/6$, так что $a_t = a_v = 0$.

Задачу о структуре электрогидродинамической ударной волны будем решать в постановке работ [2, 6, 7]. Вследствие первого уравнения (1.5) при $q \neq 0$ изучаемое течение всюду неоднородное. Предполагается, что в области течения имеется зона $\Gamma \{ \zeta_2 \leq \zeta \leq \zeta_3 \}$ больших градиентов параметров течения по сравнению с градиентами вне этой зоны. Изменение параметров в зоне больших градиентов называется структурой ударной волны. В рассматриваемой одномерной задаче можно из характерных величин составить несколько комбинаций (1.10), имеющих размерность длины. В работах [2, 6] при исследовании структуры волны, обусловленной вязкостью и теплопроводностью среды, показано, что характерный размер зоны структуры порядка длины l , а характерный размер неоднородности параметров течения вне этой зоны порядка длины L . Выясним физический смысл длины l_d . Используя выражение для коэффициента подвижности из работы [3], можно записать для случая слабоионизованного газа

$$(1.12) \quad l_d = \frac{kT_1^*}{m} \frac{\tau_{ia}}{u_1^*} = \frac{v_i^*}{u_1^*} l_i \sim l_i, \quad v_i^* = \left(\frac{kT_1^*}{m} \right)^{1/2}, \quad l_i = v_i^* \tau_{ia}$$

¹ См. также работу Беляева Ю. Н., Полянского В. А., Ромашина К. В., Шапиро Е. Г. Явления переноса в газах и газовых смесях, ч. 1. Интегралы столкновений. Отчет Ин-та механики МГУ, № 1802, 1976.

Здесь m — масса иона, τ_{ia} — эффективное время свободного пробега ионов, v_i^* — тепловая скорость иона. Из (1.12) видно, что длина l_d порядка длины l_i свободного пробега заряженных частиц.

Отношение длин l_d/l (число, обратное числу Шмидта) зависит от сечений столкновений частиц и в рассматриваемом случае равно

$$(1.13) \quad \frac{l_d}{l} = \frac{\mu}{\varepsilon} = \frac{0.9A_{aa}^* Q_{aa}}{Q_{ia}}, \quad \delta = \frac{\mu}{\varepsilon}$$

Для многих газовых смесей это отношение мало из-за большой разницы в сечениях столкновений.

Будем считать, что параметры $\varepsilon \ll 1$, $\mu \ll 1$. Выберем точки ζ_1 и ζ_4 вне зоны Γ вблизи соответственно точек ζ_2 и ζ_3 . Из уравнений (1.3), (1.4), (1.6) видно, что в областях течения $\zeta \leq \zeta_1$ и $\zeta \geq \zeta_4$, где производные скорости, температуры и плотности заряда порядка единицы, макроскопические параметры связаны с точностью до величин порядка ε и μ соотношением (1.1) и интегралами идеального течения, которые следуют из (1.3) и (1.4), если правые части этих уравнений приравнять нулю, положив при этом $\Pi_* = \Pi$, $\Sigma_* = \Sigma$. Задача о структуре электрогидродинамической волны состоит в отыскании интегральных кривых системы (1.3) — (1.7), соединяющих области $\zeta \leq \zeta_1$ и $\zeta \geq \zeta_4$ идеального течения.

Ниже проводится качественный анализ поведения таких интегральных кривых с последовательным учетом членов, входящих в уравнение (1.6). Рассматривается случай, когда заряженные частицы движутся вниз по потоку ($j^* > 0$), следовательно $J = 1$). При этом считается, что параметр электрогидродинамического взаимодействия мал ($S \ll 1$) — электрическое поле слабо влияет на движение смеси, а число Шмидта $\delta^{-1} \gg 1$. Примем также, что число Прандтля $Pr = 0.75$. Тогда, как известно [8], уравнение (1.4) можно проинтегрировать и записать для задачи о структуре волны при малых S вместо (1.3), (1.4), (1.6) соотношения

$$(1.14) \quad T = 1 + \frac{(\gamma - 1)M_1^2}{2}(1 - u^2), \quad \varepsilon \frac{du}{d\zeta} = L_2,$$

$$L_2 = \frac{3(\gamma + 1)(u - 1)(u - \beta)}{8\gamma u}$$

$$\beta = (\gamma - 1 + 2M_1^{-2})(\gamma - 1)^{-1}$$

$$(1.15) \quad \mu \frac{dq}{d\zeta} = \frac{L_1}{L_3}, \quad L_1 = -1 + q(u + E) + \frac{2}{3}a_v q E L_2 + \\ + (\gamma - 1)M_1^2 q u (a_t + \delta) L_2, \quad L_3 = 1 + 0.5(\gamma - 1)M_1^2(1 - u^2) - \\ - \gamma M_1^2 q^{-2}$$

Очевидно, что соотношение $L_2 = 0$ следует из интегралов идеального течения.

Второе уравнение (1.14), первое уравнение (1.15) и первое уравнение (1.5) образуют замкнутую систему уравнений для величин u , E , q . Независимая переменная явно не входит в правые части этих уравнений, поэтому удобно анализировать поведение интегральных кривых уравнений в пространстве uEq . Исключая из уравнений переменную ζ , получим

$$(1.16) \quad dq/du = f_1, \quad f_1 = L_1 / \delta L_2 L_3$$

$$(1.17) \quad dE / du = f_2, \quad f_2 = \varepsilon q / L_2$$

$$(1.18) \quad dE / dq = \mu q L_3 / L_1$$

По предположению $q^* > 0$, $u^* > 0$, поэтому имеющие физический смысл интегральные кривые системы уравнений (1.16) — (1.18) будут лежать в области $q > 0$, $u > 0$ пространства uEq , кроме того, из решения задачи о структуре газодинамической ударной волны при малых S следует, что скорость газа может изменяться в пределах $\beta \leq u \leq 1$.

В уравнении движения ионов (1.2) используется сила трения $R_i^{(1)}$ между ионной и нейтральной компонентами, вычисленная методом Грэда в линейном по потокам приближении [3]. Линейное приближение справедливо в условиях, когда характерные длины изменения макроскопических параметров превышают длину свободного пробега частиц. В задаче о структуре ударной волны такие условия могут не выполняться. Заметим, однако, что исследование структуры обычных газодинамических ударных волн, проведенное в рамках уравнений Навье — Стокса, дает для ударных волн слабой интенсивности результаты, достаточно хорошо согласующиеся с данными, полученными методами кинетической теории. Поэтому можно считать, что использование уравнения (1.2) для описания процессов внутри структуры волны справедливо, по крайней мере, для ударных волн слабой интенсивности.

2. Структура ударной волны с учетом в уравнении движения заряженной компоненты градиента давления ионов и конвективного члена. Исследуем структуру ударной волны в газе из максвелловских молекул ($a_v = a_t = 0$). Величина $|L_2| \lesssim 1$ в той области пространства uEq , где расположены интегральные кривые уравнений (1.16) — (1.18), имеющие физический смысл, поэтому членом с δL_2 в выражении для L_1 можно пренебречь по сравнению с единицей.

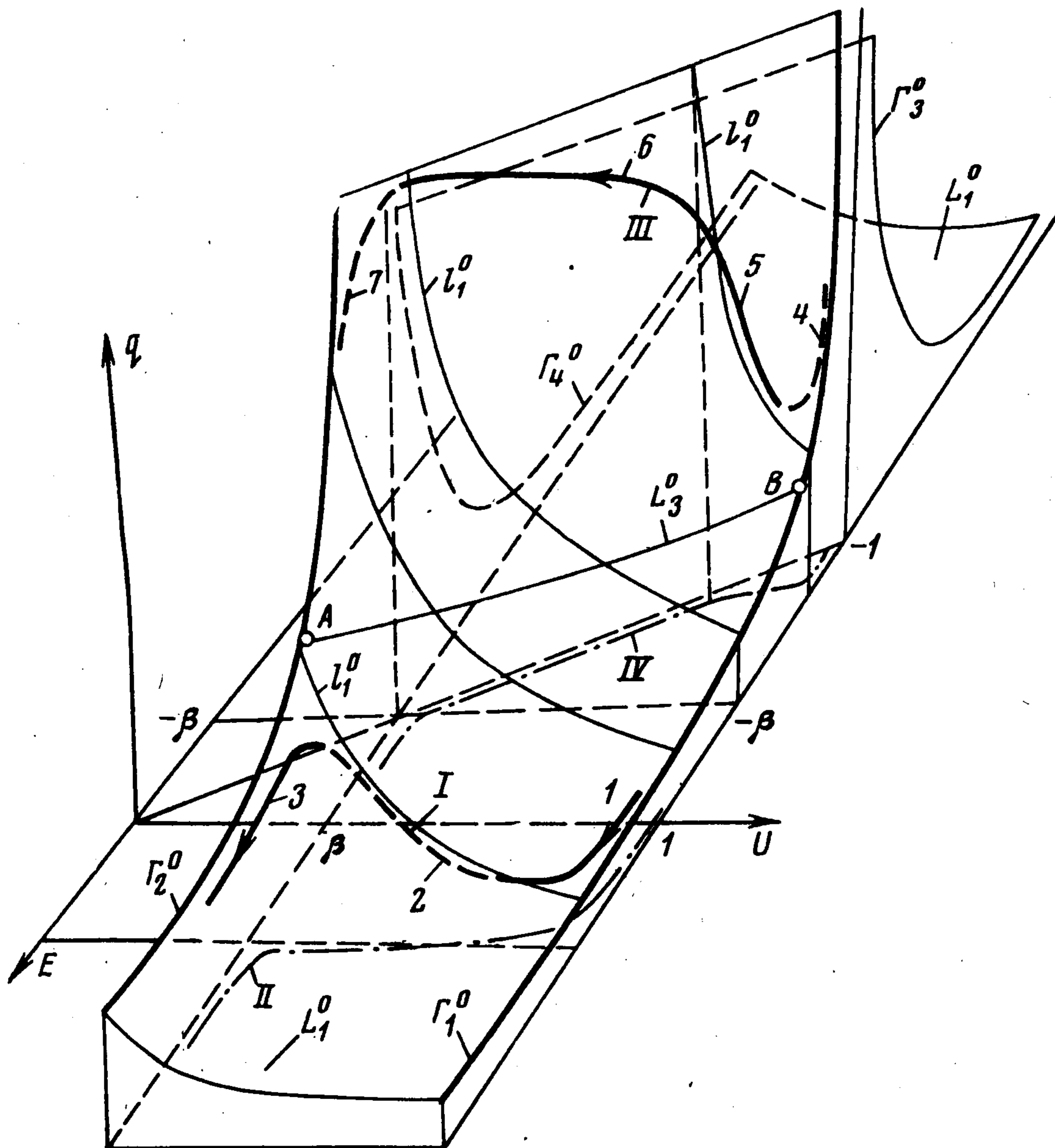
Построим в пространстве uEq плоскости $u = 1$, $u = \beta$ (фиг. 1), обозначив их L_2° . Проведем в этих плоскостях гиперболы Γ_i° ($i = 1, 2, 3, 4$), уравнения которых

$$q = \pm (1 + E)^{-1}, \quad q = \pm (\beta + E)^{-1}$$

с вертикальными асимптотами $E = -1$, $E = -\beta$, расположенными в плоскости $E = -u$. Гиперболы Γ_1° и Γ_2° лежат в части пространства uEq , в которой электрический ток $j^* > 0$ для областей физического пространства вне зоны Γ больших градиентов, гиперболы Γ_3° и Γ_4° , соответственно в части, где $j^* < 0$ ($J = -1$).

Построим в пространстве между плоскостями $u = 1$, $u = \beta$ поверхность L_1° , уравнение которой $L_1 \equiv -1 + q(u + E) = 0$. Эта поверхность пересекает плоскости $u = 1$, $u = \beta$ по гиперболам Γ_i° . Сечения поверхности L_1° плоскостями $E = \text{const}$ представляют гиперболы l_1° , уравнения которых $q = (u + E)^{-1}$, $E = \text{const}$. Вертикальные асимптоты этих гипербол при $E > -\beta$ расположены в области $u < \beta$, а при $-1 \leq E \leq -\beta$ — в области $\beta \leq u \leq 1$. Видно, что все эти асимптоты проходят в плоскости $u = -E$. Плоскость $u = -E$ разделяет части поверхности L_1 , соответствующие положительному ($u + E > 0$) и отрицательному ($u + E < 0$) электрическому току в областях физического пространства вне зоны Γ . Выше поверхности L_1° величина $L_1 > 0$, ниже поверхности —

$L_1 < 0$. Из уравнений (1.16), (1.17) видно, что интегральные кривые пересекают поверхность L_1^0 в плоскостях $q = \text{const}$. Плоскость $u = \beta^{1/2}$ разделяет рассматриваемую область на части, соответствующие сверхзвуковому ($u > \beta^{1/2}$) и дозвуковому ($u < \beta^{1/2}$) течениям. Взаимное расположение поверхности L_1^0 и цилиндрической поверхности L_3^0 (уравнение



Фиг. 1

последней $L_3 = 0$) с образующей, параллельной оси E , может быть различным в зависимости от числа M_1 . Обозначим l_3^0 линию пересечения поверхности L_3^0 с какой-либо плоскостью $E = E_1 = \text{const}$. Поверхности L_3^0 и L_1^0 пересекаются в области $\beta \leq u \leq 1$ по линии AB (фиг. 1). Координаты точек A и B равны

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_A &= \beta, \quad E_A = q_A^{-1} - \beta, \quad q_A = \gamma^{1/2} M_1 [1 + 1/2(\gamma - 1) \times \\ &\quad \times M_1^2 (1 - \beta^2)]^{-1/2} \\ u_B &= 1, \quad E_B = -1 + \gamma^{-1/2} M_1^{-1}, \quad q_B = \gamma^{1/2} M_1 \end{aligned}$$

На части поверхности L_1^0 , расположенной ниже линии AB , величина $L_3 < 0$. Соответственно в точках L_1^0 выше линии AB величина $L_3 > 0$. Если $E_1 > E_A$ или $E_1 < E_B$, то линии l_1^0 и l_3^0 не пересекаются в области

$\beta < u < 1$, при этом в первом случае L_1° лежит в области, где $L_3 < 0$, во втором случае в точках L_1° величина $L_3 > 0$. В точках, не лежащих на линии AB , интегральные кривые пересекают поверхность L_3° с касательным вектором, направленным вдоль оси q .

Пусть $ds^2 = du^2 + dE^2 + dq^2$ — квадрат элемента дуги вдоль интегральной кривой. Направляющие косинусы касательного вектора τ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) к интегральной кривой имеют вид

$$(2.2) \quad \alpha_1 = du/ds = \pm (1 + f_1^2 + f_2^2)^{-1/2}, \quad \alpha_2 = dE/ds = \alpha_1 f_2 \\ \alpha_3 = dq/ds = \alpha_1 f_1$$

Знак α_1 зависит от направления движения вдоль интегральной кривой. Условимся считать положительным ($\alpha_1 > 0$) направление движения в сторону увеличения u . Чтобы получить более полное представление о поведении интегральных кривых, будем также анализировать порядок по параметрам ε и μ величины кручения χ интегральных кривых, используя выражения [9]

$$(2.3) \quad \chi = \Delta_1^{-1} \Delta_2, \quad \Delta_1 = (u^{(2)} q^{(1)} - u^{(1)} q^{(2)})^2 + (E^{(2)} u^{(1)} - E^{(1)} u^{(2)})^2 + \\ + (E^{(2)} q^{(1)} - E^{(1)} q^{(2)})^2, \quad A^{(n)} = d^n A / d\zeta^n$$

Величина Δ_2 — определитель третьего порядка, строки которого имеют вид $(u^{(n)}, E^{(n)}, q^{(n)})$, $n = 1, 2, 3$. В области, где $q < \varepsilon^{-1}$, а величина L_1 заключена в пределах $\delta < |L_1| < \varepsilon^{-1}$, из (2.3) можно получить оценку

$$(2.4) \quad \chi \sim \varepsilon |L_2| (\varepsilon^2 q^2 + L_2^2)^{-1}$$

Если величина $L_1 = O(\mu)$, то из (2.3) следует

$$(2.5) \quad \chi \sim \varepsilon |L_2| (\varepsilon^2 q^2 + L_2^2)^{-1} (\varepsilon q + |L_2|)^{-1}$$

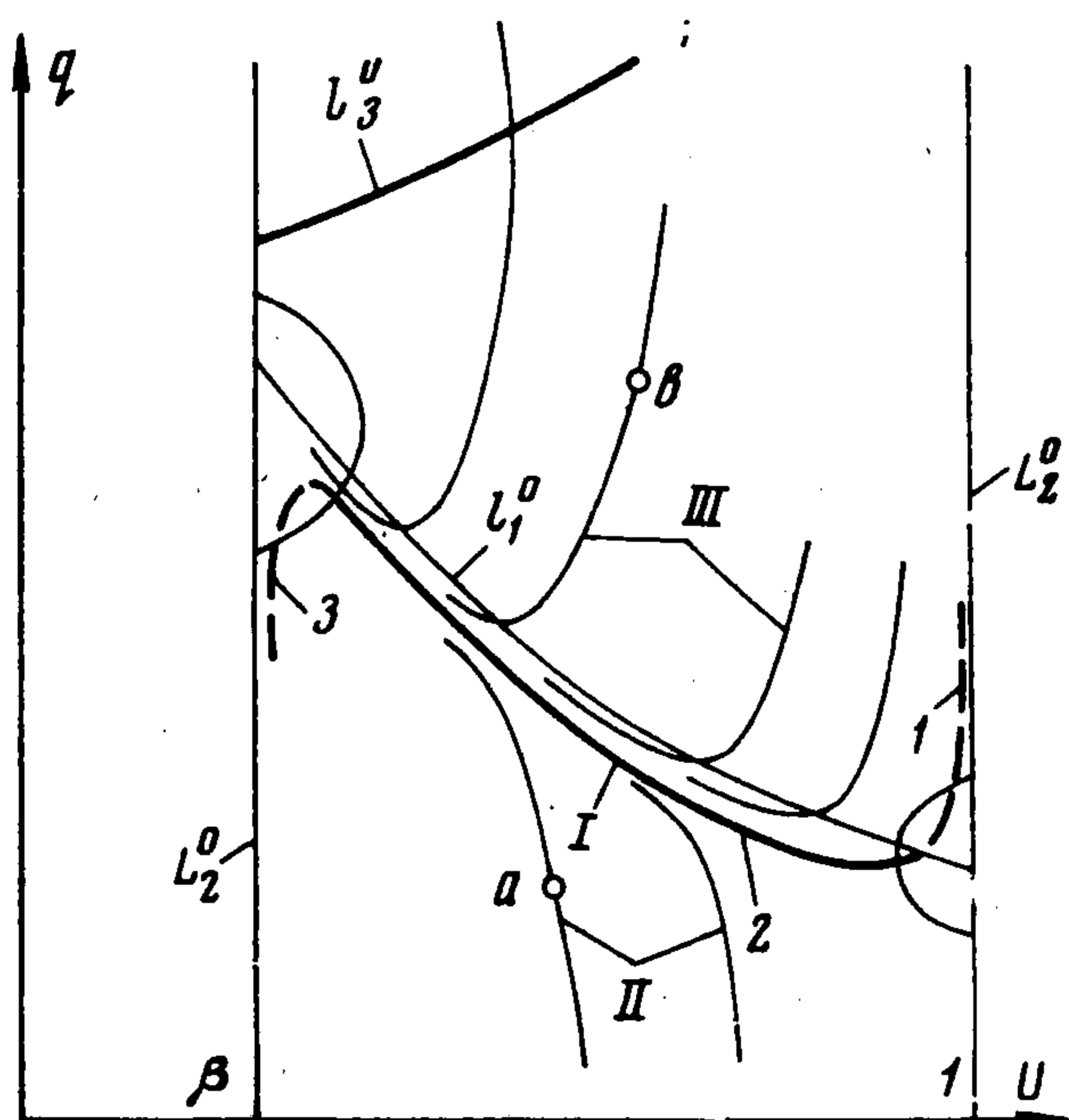
Видно, что участки интегральных кривых, расположенные в областях, где $q < \varepsilon^{-1}$, $L_2 = O(1)$, плоские, так как здесь $\chi \sim \varepsilon$.

Выясним направление вектора τ в произвольной точке вдали от поверхности L_1° . При $q \ll \varepsilon^{-1}$, $|L_2| \gg \varepsilon$ имеем $f_1 = O(\delta^{-1})$, $f_2 \gg \varepsilon$. Из соотношений (2.2) видно, что $\alpha_1 = O(\delta)$, $\alpha_2 = O(\varepsilon\delta)$, $\alpha_3 = O(1)$ — касательный вектор направлен вдоль оси q , поэтому вдали от поверхности L_1° наклон интегральных кривых близок к вертикальному. В точках поверхности L_1° вдали от L_2° величины $\alpha_1 = O(1)$, $\alpha_2 = O(\varepsilon)$, $\alpha_3 = 0$ — интегральные кривые пересекают поверхность L_1° с касательным вектором, направленным вдоль оси u .

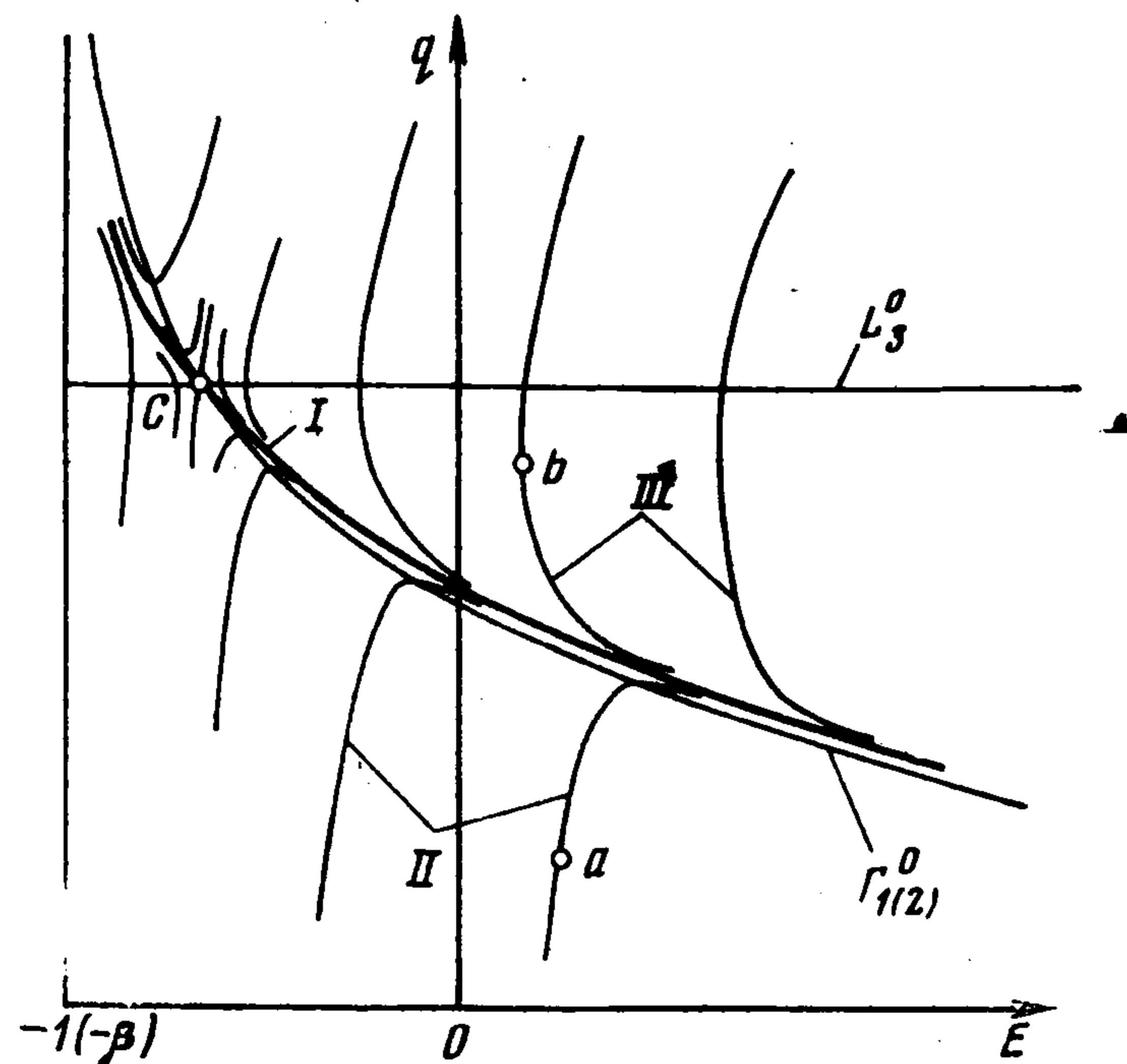
Рассмотрим поведение интегральных кривых в области $\beta < u < 1$, $E + \beta \gg \varepsilon$. Из (2.2) следует, что вдали от поверхности L_2° при $q \ll \varepsilon^{-1}$ величина $f_2 = O(\varepsilon)$, поэтому вдоль интегральных кривых $dE/ds = O(\varepsilon)$ — электрическое поле в указанных областях меняется слабо, каждая интегральная кривая располагается в малой окрестности соответствующей плоскости $E = \text{const}$.

Построим проекцию поля плоских интегральных кривых на какую-либо плоскость $E = E_1$ в области $\beta < u < 1$ (фиг. 2). Выше поверхности L_1° под поверхностью L_3° величина $f_1 > 0$. Наклон к оси u интегральных кривых положителен. В точках поверхности L_3° происходит изменение знака наклона. Ниже поверхности L_1° величина $f_1 < 0$, наклон интегральных кривых к оси u отрицателен. Как было показано, при малых δ вдали от поверхности L_1° наклон интегральных кривых близок к вертикальному.

Рассмотрим интегральную кривую, проходящую через произвольную точку a , лежащую под кривой l_1^0 вдали от нее (интегральная кривая типа II). В точке a наклон к оси u отрицателен и близок к вертикальному. Интегральная кривая приближается к кривой l_1^0 снизу, но не может пересечь эту кривую, так как такое пересечение возможно только с гори-



Фиг. 2



Фиг. 3

зонтальным наклоном, а для этого необходимо, чтобы величина f_1 изменила знак в области ниже l_1^0 . Поэтому интегральная кривая поворачивает и идет с конечным отрицательным наклоном в малой окрестности вдоль кривой l_1^0 .

Интегральная кривая типа III, проходящая через точку b , лежащую вдали от кривой l_1^0 над ней, имеет в этой точке положительный наклон к оси u , близкий к вертикальному. В отличие от кривых типа II интегральная кривая типа III пересекает кривую l_1^0 с горизонтальным наклоном, после чего наклон становится отрицательным и интегральная кривая идет в малой окрестности кривой l_1^0 вдоль нее. Так как через каждую точку проходит единственная интегральная кривая уравнений (1.16), (1.17), в рассматриваемой области существует интегральная кривая (сепаратриса), проходящая в δ -окрестности линии l_1^0 и разделяющая эти два семейства интегральных кривых (кривая I на фиг. 1,2). Сепаратриса и близкие к ней интегральные кривые соединяют окрестности линий $u = 1$ и $u = \beta$, отмеченные на фиг. 2 дугами окружностей.

Рассмотрим малые окрестности плоскостей $u = 1$, $u = \beta$ в области $\beta < u < 1$. Если $|L_1| \gtrsim \mu$, $L_2 = O(\varepsilon^3)$, то из (2.2) видно, что $du/ds \lesssim \varepsilon^2$. Оценки (2.4), (2.5) показывают, что при этом величина $\chi \lesssim \varepsilon$. Следовательно, в малых окрестностях плоскостей $u = 1$, $u = \beta$ расположены плоские участки интегральных кривых, идущие вдоль этих плоскостей. Чтобы установить качественный характер поведения таких плоских интегральных кривых, построим вначале проекции этих кривых на плоскостях $u = 1$, $u = \beta$ (фиг. 3). Эти интегральные кривые описываются уравнениями, которые следует из (1.18), если в выражения для L_1 и L_3 подставить последовательно $u = 1$ и $u = \beta$. Очевидно, гиперболы $\Gamma_{1,2}^0$ — изоклины горизонтального наклона, а

линии пересечения поверхности L_3° с плоскостями $u = 1$, $u = \beta$ — изоклины вертикального наклона интегральных кривых этих уравнений. При $q \ll \varepsilon^{-1}$ вдали от линии $\Gamma_{1(2)}^\circ$ наклон интегральных кривых близок к вертикальному в силу того, что $\mu \ll 1$.

Выше гиперболы $\Gamma_{1(2)}^\circ$ в ее μ -окрестности имеется два семейства интегральных кривых, разделенных сепаратрисой. Интегральные кривые одного семейства (II) с уменьшением E идут вдоль гиперболы $\Gamma_{1(2)}^\circ$, пересекают ее и уходят вниз; кривые другого семейства (III), не пересекая $\Gamma_{1(2)}^\circ$, уходят вверх. Сепаратриса, идущая вдоль гиперболы $\Gamma_{1(2)}^\circ$ в μ -окрестности над ней, выделена на фиг. 3 жирной линией (кривая I). Точка c , где $L_3 = 0$ и $L_1 = 0$, является особой точкой уравнения (1.18). Анализ показывает, что эта точка типа седла, причем сепаратриса I — одно из особых решений. Левее точки c сепаратриса расположена ниже гиперболы $\Gamma_{1(2)}^\circ$.

Интегральные кривые, проходящие через точки, лежащие в μ -окрестности линий $\Gamma_{1(2)}^\circ$ выше поверхности L_1° в области $\beta < u < 1$ вблизи плоскостей L_2° в их ε^3 -окрестности, ведут себя аналогично, образуя в этой области пучок вокруг $\Gamma_{1(2)}^\circ$, из которого внутрь области $\beta < u < 1$ отходят интегральные кривые.

На фигурах стрелки указывают направление движения вдоль интегральных кривых, соответствующее в физической плоскости движению вниз по потоку. Это направление устанавливается из первого уравнения (1.5), из которого следует, что при $q > 0$ электрическое поле всегда растет вниз по потоку, и из второго уравнения (1.14), согласно которому скорость в области $\beta < u < 1$ вниз по потоку падает.

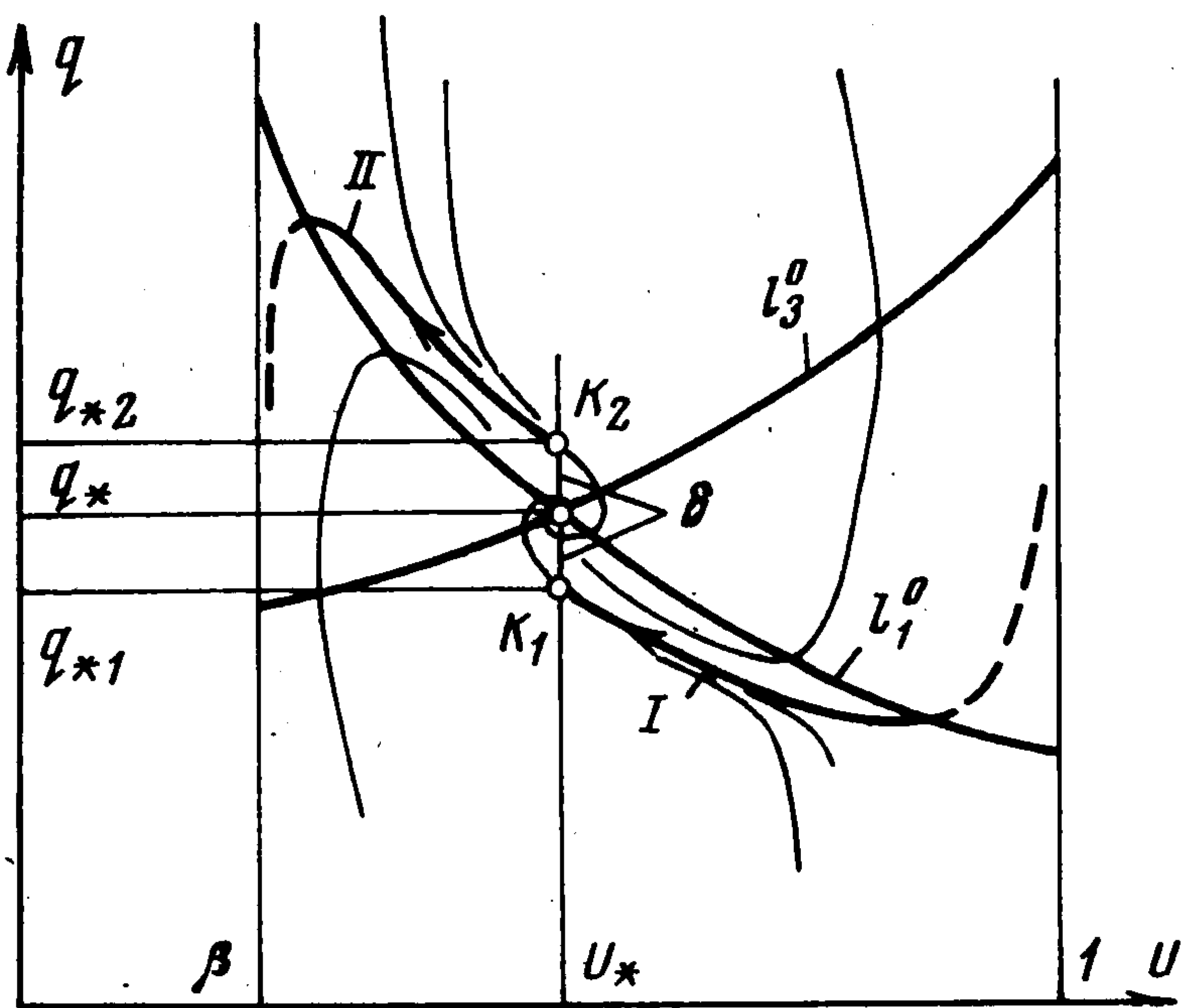
Рассмотрим одну из интегральных кривых, отходящих от плоскости $u = 1$ внутрь области $\beta < u < 1$ при некотором значении электрического поля $E_1 > -\beta$ (кривая I на фиг. 4). Из (2.5) видно, что с увеличением L_2 величина χ вначале быстро увеличивается (при $|L_2| \sim \varepsilon$ величина $\chi \sim \varepsilon^{-1}$), затем снова падает (если $|L_2| > \varepsilon$, то $\chi \sim \varepsilon$). В соответствии со сказанным выше это означает, что интегральная кривая переходит из плоскости $u = \text{const}$ в плоскость $E = \text{const}$, причем такому переходу соответствует достаточно малое изменение u . Рассмотрим характер изменения параметров вдоль интегральной кривой. Из (2.2) следует, что при движении в сторону уменьшения u ($\alpha_1 < 0$) величина q должна падать в области, где $L_1 > 0$ (выше L_1°), $L_2 < 0$ (левее $u = 1$), $L_3 < 0$ (ниже L_3°). Так как при движении вдоль поверхности L_1° в плоскости $E = \text{const}$ в сторону уменьшения u величина q растет, то отсюда следует, что интегральная кривая должна пересечь поверхность L_1° в некоторой точке вблизи плоскости $u = 1$.

Поведение интегральной кривой в плоскости $E = \text{const}$ обсуждалось выше — кривая идет в δ -окрестности линии l_1° в области, где $L_1 < 0$ (участок 2 кривой I на фиг. 2,4). При приближении к плоскости $u = \beta$, когда величина L_2 уменьшается, величина χ начинает расти. Из (2.4) видно, что при $|L_2| \sim \varepsilon$ кручение χ становится порядка единицы — интегральная кривая отклоняется от плоскости $E = \text{const}$ в сторону увеличения E , как это видно из второго уравнения (2.2). При дальнейшем приближении к плоскости $u = \beta$ величина χ снова становится малой — кривая переходит из окрестности плоскости $E = \text{const}$ в окрестность плоскости $u = \text{const}$. Однако движение в сторону больших E (и меньших u , $\alpha_1 < 0$) под поверхностью L_1° невозможно, так как при $L_1 < 0$ производная $dq/ds > 0$, а на поверхности L_1° при $u = \text{const}$ величина q падает, когда E растет. Следовательно, интегральная кривая должна пересечь

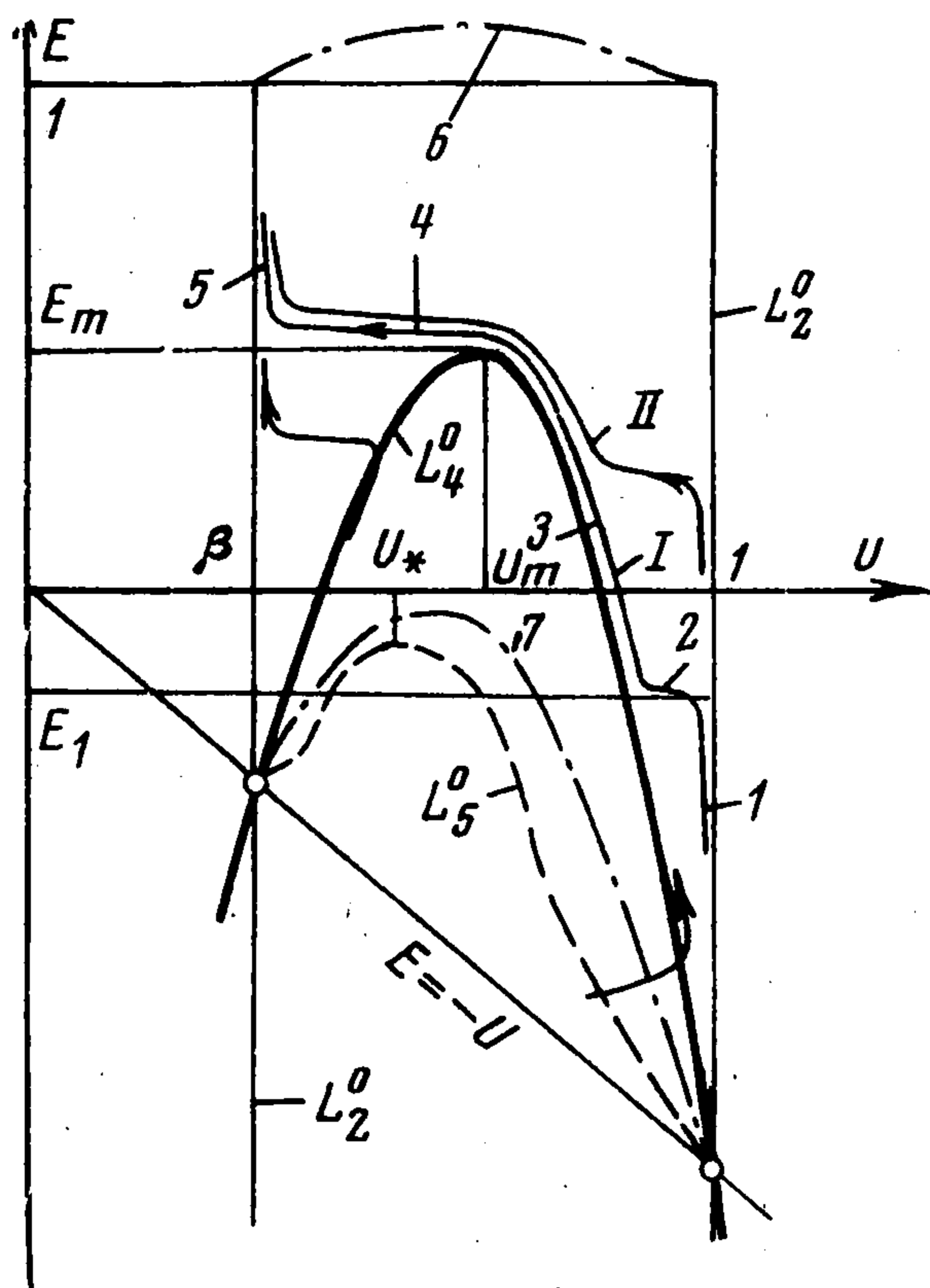
идеального течения и описывает структуру ударной волны, на которой электрическое поле постоянно

$$(2.6) \quad E = E_1 = \text{const}$$

До сих пор рассматривался случай, когда линия l_1^0 , в δ -окрестности которой проходит интегральная кривая, не пересекается в области $\beta < u < 1$ с линией l_3^0 пересечения поверхности L_3^0 с плоскостью $E = E_1$. Условие на величину E_1 электрического поля перед фронтом волны, когда реализуется противоположный случай, имеет вид $E_B < E_1 < E_A$. Обозначим u_* и q_* значения скорости и плотности заряда в точке пересечения кривых l_1^0 и l_3^0 при соответствующем значении E_1 электрического поля. Величина $q_* \ll \epsilon^{-1}$, поэтому, если $|L_2(u_*)| \gg \epsilon$, то в окрестности точки пересечения



Фиг. 5



Фиг. 6

(u_*, E_1, q_*) поле интегральных кривых является плоским. Точка (u_*, E_1, q_*) — особая точка типа фокуса уравнения (1.16) (фиг. 5).

Способом, изложенным выше, можно показать, что в области $u < u_*$ выше линии l_1^0 существует сепаратриса II, которая разделяет интегральные кривые, уходящие вверх, и кривые, пересекающие линию l_1^0 и уходящие вниз. Интегральная кривая II, приближаясь к плоскости $u = \beta$, отклоняется от плоскости $E = E_1$ в сторону больших E , пересекает поверхность L_1^0 и идет под этой поверхностью в u -окрестности линии Γ_2^0 в сторону возрастания E . Интегральная кривая I — сепаратриса в области $u > u_*$. Обе сепаратрисы закручиваются вокруг особой точки. Таким образом, в случае, когда $E_B < E_1 < E_A$, не существует непрерывной кривой, соединяющей области сверхзвукового и дозвукового идеального течения. Можно, однако, построить решение, дающее структуру волны, поместив внутри структуры скачок плотности объемного заряда при постоянных значениях скорости и электрического поля из точки $k_1(u_*, E_1, q_{*1})$ на интегральной кривой I в точку $k_2(u_*, E_1, q_{*2})$ на интегральной кривой II. Структуру такого скачка можно получить, введя в рассмотрение еще один диссипативный механизм — вязкость заряженных частиц. В рассматриваемом случае малых δ интенсивность этого скачка мала.

Рассмотрим теперь случай, когда начальное значение поля перед фронтом волны удовлетворяет условию $-\beta > E_1 > -1$. Пусть, кроме

того, $E_1 < E_\beta$ (кривые l_1° и l_3° не пересекаются в области $\beta < u < 1$). Исследуем поведение интегральной кривой III (фиг. 1), которая идет в μ -окрестности линии Γ_1° под поверхностью L_1° (так как в рассматриваемом случае величина $L_3 > 0$) и отходит от плоскости $u = 1$ при начальном значении поля $E = E_1$. Эта кривая пересекает поверхность L_1° в ε -окрестности плоскости $u = 1$ с касательным вектором, расположенным в плоскости $q = \text{const}$, затем идет вдоль линии l_1° в ее δ -окрестности над поверхностью L_1° в сторону меньших значений u . В рассматриваемом интервале начальных значений поля ($-1 < E_1 < -\beta$) вертикальная асимптота линии l_1° , лежащая в плоскости $u + E = 0$, расположена внутри области $\beta < u < 1$. Ввиду этого, линии l_1° и Γ_2° не пересекаются и при $E_1 < -\beta$ интегральная кривая III, проходя вдоль l_1° , не может приблизиться к линии Γ_2° так, чтобы величина L_2 стала порядка ε . Однако, когда интегральная кривая идет вдоль l_1° , она приближается к плоскости $u + E = 0$, при этом, очевидно, величина q растет.

Выясним направление касательного вектора к интегральной кривой, когда величина q становится порядка ε^{-1} . Из (1.16), (1.17) имеем: $f_1 = O(1)$, $f_2 = O(1)$. Следовательно, все α_i одного порядка, так как из (2.2) видно, что $\alpha_1 = O(1)$. Оценка (2.4) показывает, что величина кручения χ остается малой. Интегральная кривая, проходя вдоль l_1° , приближается к плоскости $u + E = 0$, постепенно отклоняясь от плоскости $E = E_1$ в сторону больших значений E (фиг. 1). Точки поверхности L_1° , в которых $q \sim \varepsilon^{-1}$, расположены в ε -окрестности плоскости $u + E = 0$. Поэтому интегральная кривая, проходящая при таких значениях q вдоль поверхности L_1° , идет тем самым вдоль плоскости $u + E = 0$ и имеет возможность подойти к плоскости $u = \beta$ так, чтобы величина L_2 стала порядка ε . При $|L_2| \sim \varepsilon$, $q \sim \varepsilon^{-1}$ компоненты α_2 и α_3 касательного вектора имеют одинаковый порядок, а $\alpha_1 = O(\varepsilon)$ — касательный вектор коллинеарен плоскости $u = \beta$. Интегральная кривая пересекает поверхность L_1° вблизи линии пересечения плоскостей $u + E = 0$ и $u = \beta$ и идет далее вдоль плоскости $u = \beta$ под поверхностью L_1° вблизи линии Γ_2° в сторону больших значений E .

Аналогично предыдущему можно показать, что участки 4 и 7 интегральной кривой III соответствуют в физической плоскости сверхзвуковому и дозвуковому идеальным течениям с законом Ома в форме (1.1). Участок 5, где $q \sim 1$, $L_1 \sim \delta$, дает в физической плоскости узкую область сильного изменения величин u , q и остальных газодинамических параметров при малом изменении электрического поля. На участке 6, где $q \sim \varepsilon^{-1}$, $L_1 \sim \delta$, величины $\Delta \zeta_u \sim \varepsilon$, $\Delta \zeta_E \sim \varepsilon$, $\Delta \zeta_q \sim \varepsilon$. Поэтому этот участок дает узкую область резкого изменения всех параметров течения. Проекция интегральной кривой III на плоскость $q = 0$ показана на фиг. 1 штрихпунктирной линией (кривая IV).

Таким образом, если начальное значение электрического поля перед фронтом волны удовлетворяет условию

$$(2.7) \quad -1 < E_1 < E_B$$

то можно построить непрерывную интегральную кривую, соединяющую области $\zeta \leq \zeta_1$ сверхзвукового и $\zeta \geq \zeta_4$ дозвукового идеальных течений и дающую структуру ударной волны с переменным электрическим полем. При этом значение поля E_2 за фронтом волны связано со значением ско-

рости соотношением

$$(2.8) \quad u_2 + E_2 = 0$$

Если начальное значение поля

$$(2.9) \quad E_B < E_1 < -\beta$$

то непрерывной структуры в рамках рассматриваемой модели построить нельзя, так как внутри области $\beta < u < 1$ имеется точка пересечения кривых l_1° и l_3° , расположенная при конечных значениях q и служащая особой точкой типа фокуса для интегральных кривых, проходящих здесь вблизи плоскости $E = E_1 = \text{const}$. Ситуация здесь аналогична рассмотренной выше. Можно построить структуру, поместив в окрестности особой точки скачок q при постоянных значениях скорости и электрического поля. Этот скачок можно сгладить, усложняя модель среды введением вязкости заряженных частиц.

Таким образом, учет в законе Ома градиента давления заряженных частиц дает на фронте волны такие же соотношения для электрического поля и те же условия, при которых эти соотношения справедливы, как и в случае обычного закона Ома (1.1) [2]. Учет конвективного члена приводит к тому, что в некоторых случаях нельзя построить непрерывную структуру, однако соотношения на фронте волны остаются прежними.

3. Структура ударной волны при учете в законе Ома термодиффузионного члена. Соотношения нового типа для электрического поля на фронте волны получаются, если в соотношении для L_1 (вторая формула (1.15)) учесть члены с термодиффузией ($a_t \neq 0$). Положим вначале $\mu = 0$, $a_v = 0$. Исходная система уравнений сведется тогда к одному уравнению

$$(3.1) \quad \frac{dE}{du} = \frac{e}{L_2 L_4}, \quad L_4 = E + u + \alpha(u-1)(u-\beta)$$

$$\alpha = 3(\gamma^2 - 1) M_1^2 a_t / 8\gamma$$

Уравнение (3.1) будем исследовать в плоскости uE . Построим в области $u > 0$ линии L_2° и L_4° , уравнения которых соответственно $L_2 = 0$, $L_4 = 0$. Эти линии служат индикатрисами вертикальных направлений интегральных кривых уравнения (3.1). Линия L_4° — парабола, проходящая через точки пересечений линий $u = 1$, $u = \beta$ с линией $u + E = 0$. Вершина параболы имеет координаты

$$(3.2) \quad u_m = \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{1}{\gamma M_1^2} + 1 \right) - \frac{4\gamma}{3(\gamma^2-1) a_t M_1^2}$$

$$E_m = \frac{3(\gamma-1) a_t (M_1^2-1)^2}{8\gamma(\gamma+1) M_1^2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} \right) + \frac{2\gamma}{3(\gamma^2-1) a_t M_1^2}$$

Если число Маха M_1 перед фронтом волны удовлетворяет условию

$$(3.3) \quad M_1^2 > 1 + \frac{4\gamma}{3(\gamma-1) a_t}$$

то вершина параболы расположена правее линии $u = \beta$.

На фиг. 6 показана качественная картина поведения интегральных кривых уравнения (3.1) для случая, когда $\alpha > 0$ и выполняется неравенство (3.3).

Рассмотрим интегральную кривую I (фиг. 6), проходящую вблизи начальной точки $(1, E_1)$ при $E_1 < E_m$. Эта кривая имеет участок 1, который проходит в ε -окрестности линии $u = 1$ и соответствует в физической плоскости идеальному сверхзвуковому течению с постоянной скоростью и переменными E и q , удовлетворяющими закону Ома в форме (1.1). В ε -окрестности точки $(1, E_1)$ интегральная кривая I отходит от линии $u = 1$ и идет с малым отрицательным наклоном в сторону уменьшения u (участок 2). Приблизившись к линии L_4° , кривая поворачивает и идет вдоль этой линии в ее ε -окрестности в сторону больших E (участок 3), так как пересечь линию L_4° с вертикальным наклоном интегральная кривая не может без изменения знака наклона. Достигнув ε -окрестности вершины параболы (u_m, E_m) , интегральная кривая идет далее с малым отрицательным наклоном, приближаясь к линии $u = \beta$ (участок 4). Затем в ε -окрестности точки (β, E_m) наклон увеличивается и кривая идет вдоль линии $u = \beta$ в ее ε -окрестности (участок 5). Из уравнения $dE/d\zeta = L_4^{-1}$ и второго уравнения (1.14) видно, что на участках 2 и 4 характерные длины $\Delta\zeta_u \sim \varepsilon$, $\Delta\zeta_E \sim 1$, так как здесь величины $|L_2| \sim 1$, $L_4 \sim 1$, на участке 3 длины $\Delta\zeta_u < \varepsilon$, $\Delta\zeta_E \sim \varepsilon$, так как здесь $|L_2| \sim 1$, $L_4 \sim \varepsilon$. Следовательно, в физической плоскости участкам 2 и 4 соответствуют узкие области течения с сильным изменением скорости при почти постоянном электрическом поле, равном соответственно E_1 и E_m . Участок 3 дает узкую область резкого изменения скорости и электрического поля, причем величина E изменяется от значения, близкого к E_1 , до значения, близкого E_m . Участок 5 соответствует дозвуковому идеальному течению.

Таким образом, интегральная кривая I описывает изменение скорости и поля в структуре ударной волны, на фронте которой образовался за счет механизма термодиффузии поверхностный заряд. При этом величина поля за волной связана с параметрами течения перед фронтом волны соотношением

$$(3.4) \quad E_2 = E_m$$

где E_m выражается второй формулой (3.2). Величина поверхностного заряда $\sigma = (E_m - E_1) u_1^*/4\pi b$.

Из фиг. 6 видно, что поверхностный заряд за счет механизма термодиффузии может образоваться на фронте волны, когда число Маха перед волной удовлетворяет условию (3.3), а начальное значение поля $E_1 < E_m$. Из второй формулы (3.2) видно, что величина $E_m > 0$ при $M_1 > M_*$, где M_* — наибольший корень уравнения $E_m = 0$, биквадратного относительно величины M_1 , причем M_* удовлетворяет условию (3.3), так как при этом величина $\alpha > (1 - \beta^{1/2})^{-2}$. Это означает, что образование поверхностного заряда в рассматриваемом случае происходит не только когда ионы движутся в тормозящем электрическом поле ($E_1 < 0$), как это было установлено в работах [1,2], но и в условиях, когда поле ускоряет движение ионов ($E_1 > 0$). Положительному значению поля перед фронтом волны соответствует на фиг. 6 интегральная кривая II. Для модели частиц в виде твердых упругих шариков величина $a_t = 0.61$. Если принять $\gamma = 1.4$, то неравенство (3.3) справедливо при $M_1 > 2.94$, а величина $E_m > 0$ при $M_1 > 4.65$.

Отметим, что если начальное значение поля $E_1 < -\beta$, учет механизма термодиффузии при выполнении (3.3) приводит к образованию дополнительного поверхностного

Линии l_1° при $E_1 > E_m$ имеют максимум в точке $u = u_m$, при $E_1 \leq E_m$ линии l_1° имеют асимптоты, в качестве которых служат образующие параболического цилиндра

$$(4.2) \quad E = -u - \alpha(u - 1)(u - \beta)$$

Значения u_m , E_m даются формулами (3.2). Линия l_m суть линия пересечения поверхности L_1° с плоскостью $u = u_m$.

Интегральная кривая I, проходящая вблизи начальной точки $(1, E_1, q_1)$ при $E_1 > E_m$ в области, где $L_3 < 0$, идет над поверхностью L_1° в μ -окрестности линии Γ_1° (участок 1), затем отходит от плоскости $u = 1$, пересекая поверхность L_1° , и идет под этой поверхностью в ее δ -окрестности вблизи плоскости $E = E_1$ (участок 2). В точке (u_m, E_1, q_m) , где q_m определяется из (4.1) при значениях $u = u_m$, $E = E_1$, кривая пересекает поверхность L_1° и далее идет над ней в сторону уменьшения u (участок 3). Вблизи плоскости $u = \beta$ кривая поворачивает и, не пересекая L_1° , идет вдоль линии Γ_2° (участок 4). Описанный характер поведения интегральной кривой I можно установить способом, изложенным в п. 2. Эта интегральная кривая дает структуру ударной волны, на фронте которой поле непрерывно ($E_2 = E_1$). Видно, что внутри структуры плотность объемного заряда меняется немонотонно, если условия перед фронтом волны удовлетворяют неравенству (3.3). Величина q имеет максимум в той точке $\zeta = \zeta_m$, где скорость газа $u = u_m$.

Интегральная кривая II, проходящая через малую окрестность начальной точки $(1, E_1, q_1)$ при $E < E_m$, дает структуру ударной волны, на фронте которой электрическое поле меняется.

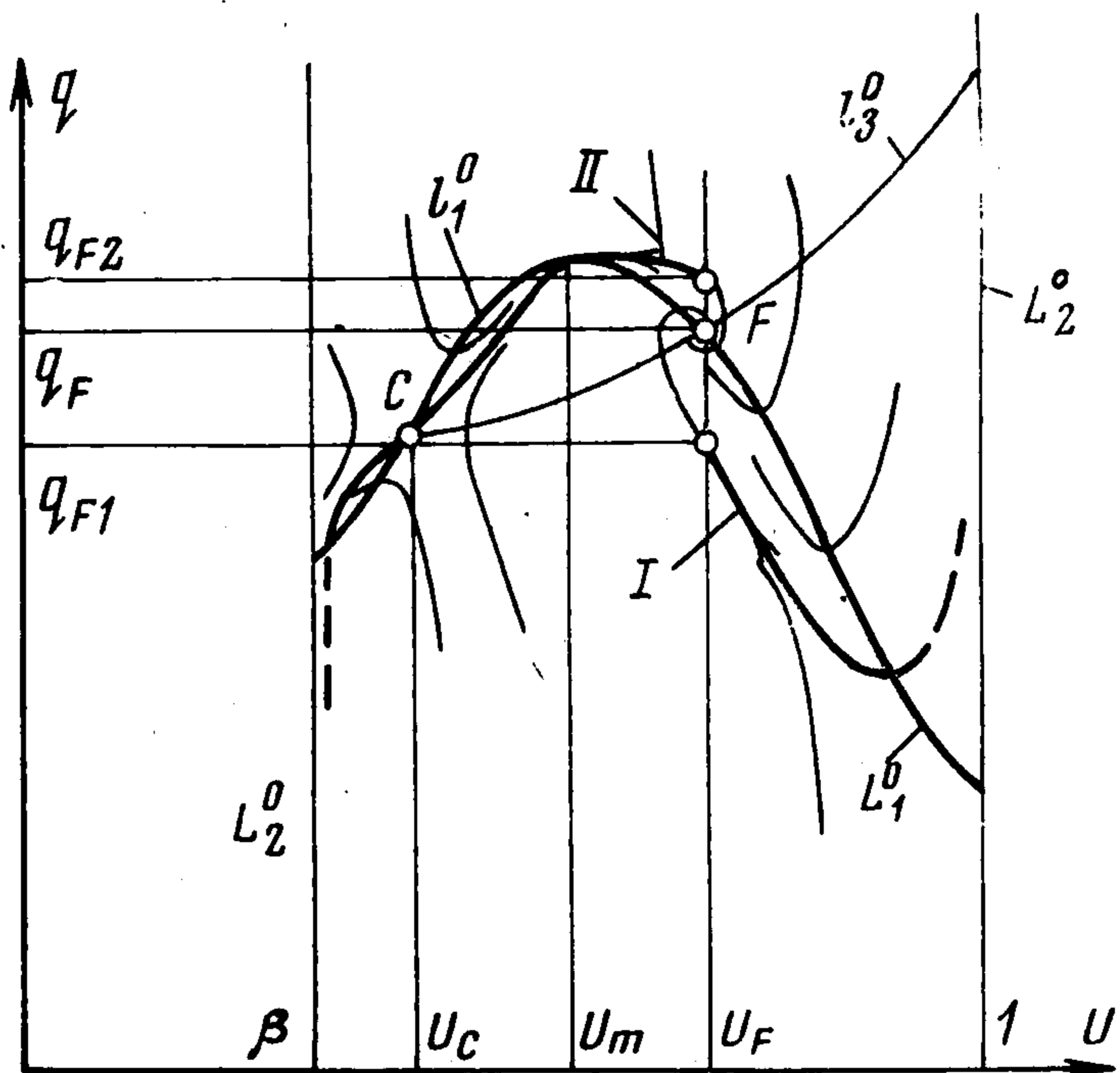
На фиг. 7 изображен случай, когда участки 5—9 интегральной кривой II расположены в области, где $L_3 > 0$, что возможно, если $E_1 < E_B$, $E_m < E_A$ (значения величин E_A и E_B даются формулами (2.1)).

Кривая II идет вблизи Γ_1° под поверхностью L_1° (участок 5), затем в окрестности начальной точки отходит от плоскости $u = 1$ и после пересечения поверхности L_1° идет над ней вдоль линии l_1° вблизи плоскости $E = E_1$ (участок 6). Так как l_1° имеет вертикальную асимптоту, плотность заряда q растет при движении вдоль кривой II в сторону уменьшения u . Интегральная кривая с ростом q постепенно отклоняется от плоскости $E = E_1$ и при $q \sim \varepsilon^{-1}$ начинает идти вдоль параболического цилиндра (4.2) в его δ -окрестности в сторону увеличения E (участок 7), приближаясь к плоскости $u = u_m$. Далее кривая II пересекает поверхность L_1° в точке, расположенной на линии l_m . После пересечения производная dq/ds меняет знак и плотность заряда начинает падать при движении вдоль интегральной кривой в сторону уменьшения u . Так как знак производной dE/ds не изменился, интегральная кривая идет под поверхностью L_1° вдоль образующей параболического цилиндра (4.2), расположенной вблизи линии пересечения плоскостей $u = u_m$ и $E = E_m$ (участок 8). При этом кривая II выходит из δ -окрестности поверхности L_1° , оставаясь, однако, в некоторой ее δ^r -окрестности, где $0 < r < 1$. Из (1.16), (1.17) и (2.2) видно, что при $|L_1| \sim \delta^r$, $q \sim \varepsilon^{-1}$ величины α_1 и α_2 порядка δ^r , величина $\alpha_3 = O(1)$. Следовательно, на участке 8 наклон интегральной кривой близок к вертикальному, плотность заряда здесь быстро уменьшается при слабом изменении параметров u и E . Когда величина q становится порядка единицы, интегральная кривая входит в δ -окрестность поверхности L_1° и идет вблизи плоскости $E = E_m$, приближаясь к плоскости $u = \beta$, так как здесь производные du/ds и dq/ds

одного порядка, а производная dE / ds мала. Вблизи плоскости $u = \beta$ кривая II поворачивает в сторону больших E вдоль линии Γ_2° (участок 9).

Интерпретация различных участков интегральной кривой II в физической плоскости проводится так же, как и в п. 2, 3. Участки 5 и 9 соответствуют идеальному сверхзвуковому течению, а участки 6—8 дают изменение параметров течения внутри структуры. Из проекции кривой II на плоскость $q = 0$ (штрихпунктирная линия III) видно, что значение поля за фронтом волны $E_2 = E_m$.

Обозначим (u_m, E_D, q_D) координаты точки D пересечения линии l_m с линией AB пересечения поверхностей L_1° и L_3° . Значения E_D, q_D определяются из уравнений $L_1 = 0, L_3 = 0$ при $u = u_m$. Если $E_B < E_1 < E_D$, то линия l_1° пересечения плоскости $E = E_1$ с поверхностью L_1° может иметь либо одну, либо две точки пересечения с линией AB . В первом случае, когда $E_1 < E_A$, эта точка лежит в области $u > u_m$, во втором случае (при $E_A < E_1 < E_D$) точки расположены по обе стороны плоскости $u = u_m$. В обоих случаях в точках пересечения величина $q = 0$ (1). Эти точки пересечения являются особыми точками уравнения (1.16) в плоскости $E = \text{const}$. Анализ показывает, что точка, расположенная в области $u > u_m$, — фокус (точка F на фиг. 8); точка, расположенная в области $u < u_m$, — седло (точка C , фиг. 8). На фиг. 8 показана в проекции на плоскость $E = E_1$ качественная картина поведения интегральных кривых в случае, когда $E_1 > E_m$.



Фиг. 8

Решение, дающее структуру ударной волны, можно построить, используя две сепаратрисы: интегральную кривую I, которая накручивается на точку F , и интегральную кривую II, проходящую через точку C . Так же, как и в п. 2, внутри структуры при $u = u_F$ необходимо поместить скачок плотности заряда при постоянных остальных параметрах, чтобы перейти с кривой I на кривую II. Сгладить этот скачок можно, если учесть еще один диссипативный механизм — вязкость заряженных частиц. Интенсивность скачка при $\delta \ll 1$ мала.

5. Структура ударной волны в случае, когда $a_t \neq 0, a_v \neq 0, \mu = 0$. Совместный учет в законе Ома членов, связанных с термодиффузией и вязким переносом импульса смеси в электрическом поле, также дает при определенных условиях новое соотношение для параметров течения на фронте волны. Рассмотрим для простоты случай, когда $\mu = 0$. Исходная система уравнений сводится к уравнению

$$(5.1) \quad \frac{dE}{du} = \frac{\varepsilon}{L_2 L_5}, \quad L_5 = \frac{1}{u} E g_1 + g_2, \quad g_1 = u + c(u - 1)(u - \beta), \\ g_2 = u + \alpha(u - 1)(u - \beta), \quad c = a_v(\gamma + 1) / 4\gamma.$$

Поведение интегральных кривых уравнения (5.1) существенно зависит от расположения кривой L_5° , уравнение которой $L_5 = 0$, в области $\beta < u < 1$ плоскости uE . Эта кривая проходит через точки пересечения прямых $u = \beta, u = 1$ с линией $E = -u$ и служит индикатрисой вертикальных направлений интегральных кривых уравнения (5.1).

Рассмотрим вначале случай, когда в интервале $\beta < u < 1$ отсутствуют корни уравнения $g_1 = 0$. Соответствующее этому условию ограничение на параметры течения имеет вид $c < (1 - \beta^{1/2})^{-2}$. Пусть также величины $\alpha > c > 0$ и справедливо неравенство (3.3), при котором максимум (3.2) параболы $E = -g_2$ расположен в области $\beta < u < 1$. При этом значения E , определяемые равенством $E = ug_1^{-1}$, в интервале $\beta < u < 1$ больше единицы. Поэтому в области $E > 0$ кривая L_5° в интервале $0 < u < 1$ расположена выше параболы $E = -g_2$, а в области $E < 0$ — ниже этой параболы. На фиг. 6 штриховой линией изображена линия L_5° , штрихпунктирными кривыми 6 и 7 показаны соответственно линии $E = ug_1^{-1}$ и $E = -g_2$ для случая, когда точка (3.2) лежит в области $E < 0$.

Анализ поведения интегральных кривых уравнения (5.1) проводится так же, как в п. 3. При этом существенным является расположение максимумов кривой L_5° в интервале $\beta < u < 1$. Координаты этих максимумов определяются из уравнений

$$(5.2) \quad \begin{aligned} c(\beta - u^2)g_2 + ug_1(1 + 2\alpha u - \alpha - \alpha\beta) &= 0 \\ E &= -ug_2g_1^{-1} \end{aligned}$$

При указанных выше ограничениях на параметры и при выполнении неравенства $\alpha - c > (1 - \beta)^{-1}$ в интервале $\beta < u < 1$ имеется по крайней мере один максимум из двух возможных в общем случае. Обозначим (u_*, E_*) координаты наибольшего максимума кривой L_5° в интервале $\beta < u < 1$.

Анализ структуры показывает, что если значение поля перед фронтом волны $E_1 \geq E_*$ и при этом $E_* \geq -\beta$, то электрическое поле на фронте волны непрерывно ($E_2 = E_1$), поверхностный заряд отсутствует.

Если значение поля перед фронтом волны $E_1 < E_*$, то электрическое поле на фронте волны терпит разрыв, на волне за счет механизмов трения заряженных частиц с нейтральными, термодиффузии и влияния вязкого переноса импульса смеси на диффузию в электрическом поле образуется поверхностный заряд. При этом в случае, когда $E_* \geq -\beta$, значение поля за фронтом волны удовлетворяет соотношению

$$(5.3) \quad E_2 = E_*$$

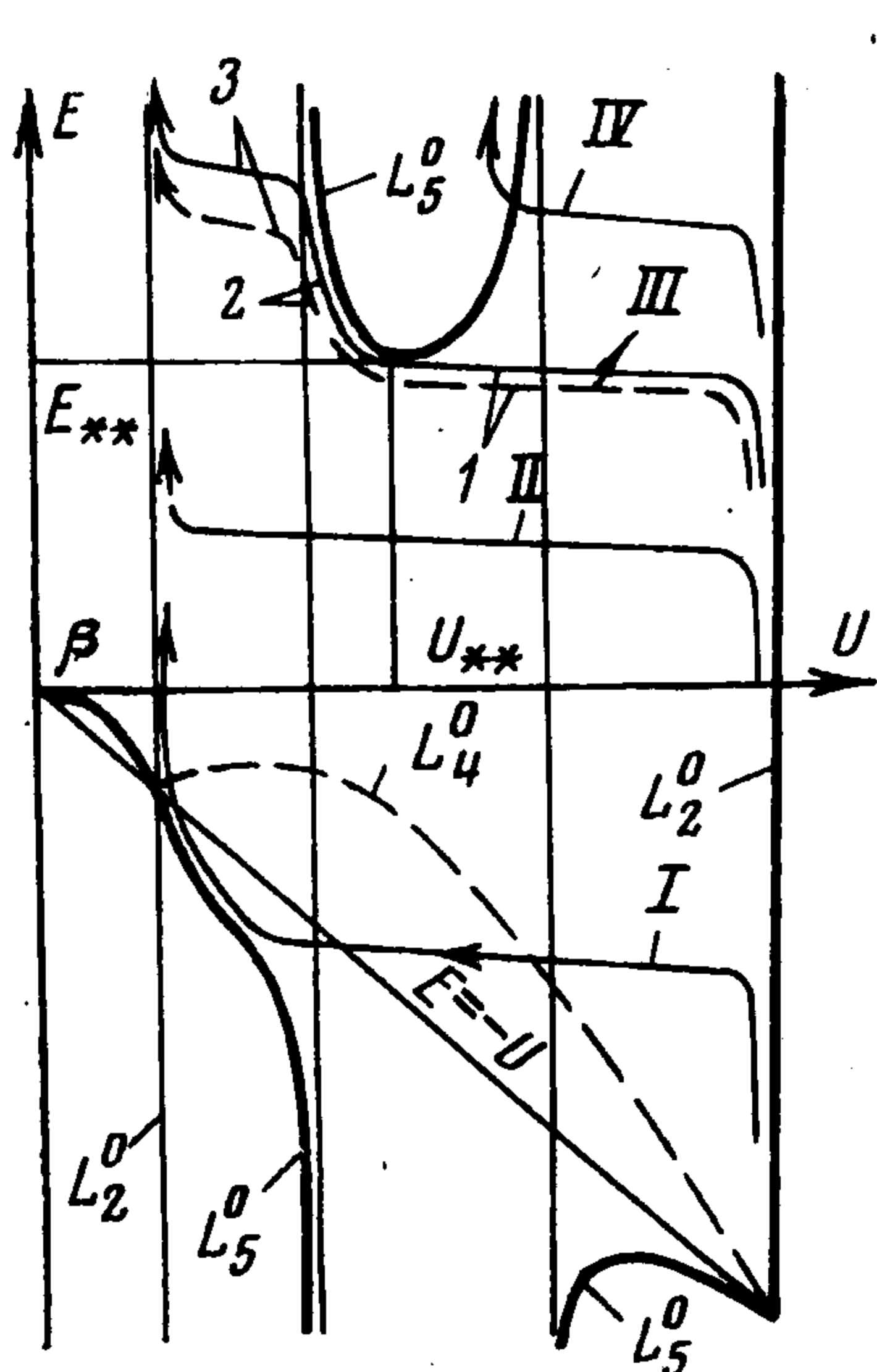
Если $E_* < -\beta$, то поле за фронтом волны $E_2 = -\beta$. В этом случае механизмы термодиффузии и вязкого переноса импульса смеси не дают вклада в образование поверхностного заряда. Отметим, что если значение $\alpha = (1 - \beta^{1/2})^{-2}$, то $u_* = \beta^{1/2}$, $E_* = 0$, следовательно, поле за фронтом $E_2 = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда параметры перед фронтом таковы, что $c > (1 - \beta^{1/2})^{-2}$. При этом уравнение $g_1 = 0$ имеет корни в интервале $\beta < u < 1$, поэтому линия L_5° имеет в этом интервале вертикальные асимптоты.

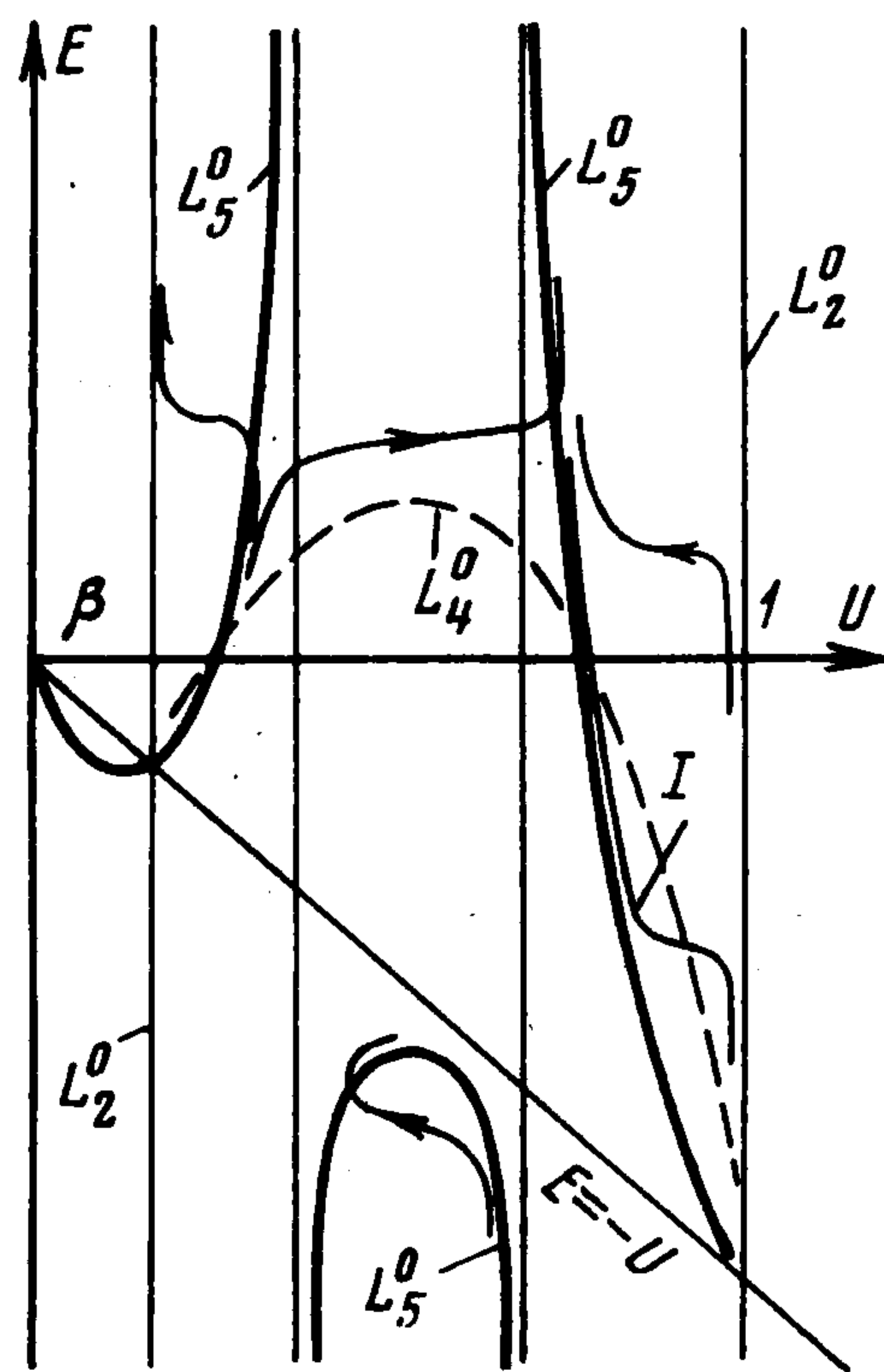
Пусть $\alpha < c$. Кривая L_5° состоит из трех ветвей (фиг. 9). Обозначим (u_{**}, E_{**}) координаты минимума центральной ветви, ордината которого наименьшая. Абсцисса u_{**} этого минимума расположена в интервале между корнями уравнения $g_1 = 0$ и является корнем первого уравнения

(5.2). Левая и правая ветви L_5^0 расположены в интервале $\beta < u < 1$ ниже прямой $E = -u$.

Из фиг. 9 видно, что если электрическое поле перед фронтом волны $E_1 < -\beta$, то на волне образуется поверхностный заряд, поле за фронтом удовлетворяет соотношению $E_2 = -\beta$. Структуру ударных волн с разрывным полем дают интегральные кривые типа I. Заметим, что величина поверхностного заряда такая же, как и в случае, когда учитывается только механизм трения между заряженной и нейтральной ком-



Фиг. 9



Фиг. 10

понентами, однако характер изменения параметров течения внутри структуры в рассматриваемом случае иной.

Если $-\beta < E_1 < E_{**}$, то из анализа структуры следует, что электрическое поле на фронте волны непрерывно, поверхностный заряд отсутствует (интегральная кривая типа II).

Рассмотрим интегральные кривые типа III, проходящие через окрестность начальной точки $(1, E_1)$ в случае, когда

$$(5.4) \quad E_1 = E_{**}$$

Каждая из этих интегральных кривых имеет почти горизонтальный участок 1, отходящий от сверхзвуковой ветви линии L_2^0 в окрестности точки $(1, E_1)$, который соответствует в физической плоскости области резкого изменения скорости при почти постоянном значении поля. Участок 2, идущий вдоль центральной ветви линии L_5^0 в малой ее окрестности, дает в физической плоскости узкую область резкого изменения скорости и электрического поля. Затем эти интегральные кривые отходят от линии L_5^0 при различных значениях электрического поля, ограниченных условием

$$(5.5) \quad E \geq E_{**}$$

и идут с малым горизонтальным наклоном в сторону дозвуковой ветви линии L_2^0 (участок 3). Рассматриваемые интегральные кривые описывают структуру ударных волн со скачком электрического поля на фронте волны. Параметры течения перед фронтом таких волн связаны дополнительным соотношением (5.4), а чтобы найти состояние за фронтом, один из параметров течения за фронтом нужно задать. В частности, величину электрического поля можно задавать в пределах (5.5). Электрогидродинамические волны аналогичного типа, соответствующие иной физической ситуации, рассматривались в работе [2]. В случае, когда начальное значение поля $E_1 > E_{**}$, ударные волны в рам-

ках рассматриваемой модели структуры не имеют. Это видно из того, что интегральные кривые типа IV, отходящие от линии $u = 1$ при $E_1 > E_{**}$, пересекают центральную ветвь линии L_5° , попадая в область отрицательного электрического тока, и идут далее в этой области вдоль линии L_5° с конечным положительным наклоном.

Пусть $\alpha > c$. Кривая L_5° в области $\beta < u < 1$ имеет три ветви, причем центральная ветвь лежит в области $E < 0$, а левая и правая ветви подходят к вертикальным асимптотам, имея соответственно положительный и отрицательный наклоны. В таком случае ударные волны структуры не имеют. Это видно из того, что ни одна из интегральных кривых, отходящих от сверхзвуковой ветви линии L_2° , не может пересечь правую ветвь линии L_5° , так как всюду в области, правее правой асимптоты, интегральные кривые подходят с отрицательным наклоном к участкам правой ветви линии L_5° , имеющим также отрицательный наклон, а пересечение возможно только с вертикальным наклоном (фиг. 10).

Рассмотрим кратко случай $c = (1 - \beta^{1/2})^{-2}$. Уравнение $g_1 = 0$ имеет при этом кратный корень, поэтому линия L_5° в интервале $\beta < u < 1$ состоит из двух ветвей, разделенных вертикальной асимптотой $u = \beta^{1/2}$. Если $\alpha < c$, то обе ветви расположены в области $E < 0$, $\beta < u < 1$ ниже прямой $E = -u$, и результаты исследования структуры такие же, как и в случае $\alpha = c = 0$. Если $\alpha > c$, то ударные волны структуры не имеют, так как обе ветви стремятся к асимптоте в области положительных E . Этот случай аналогичен случаю, когда $\alpha > c > (1 - \beta^{1/2})^{-2}$.

Если $\alpha < 0$, $c < 0$, то при $|\alpha| < |c|$ результаты аналогичны случаю, когда величины α и c положительны, а уравнения $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ не имеют корней в интервале $\beta < u < 1$. При $|\alpha| > |c|$ дополнительные соотношения те же, что и в случае, когда $\alpha = c = 0$.

Поступила 6 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А. Разрывы в электрогидродинамике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
2. Гогосов В. В., Полянский В. А. Структура электрогидродинамических ударных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
3. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
4. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
5. Мак-Даниель И., Мэзон Э. Подвижность и диффузия ионов в газах. М., «Мир», 1976.
6. Гогосов В. В., Коровин В. М., Полянский В. А., Шапошникова Г. А. Изотермические скачки в электрогидродинамике. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
7. Гогосов В. В., Полянский В. А. Электрогидродинамика: задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения. Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа, т. 10. М., ВИНТИ, 1976.
8. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
9. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1956.