

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ С САМОИНДУЦИРОВАННЫМ ДАВЛЕНИЕМ

О. С. Рыжов, Е. Д. Терентьев

(Москва)

Выводятся асимптотические уравнения, которым подчиняются нестационарные процессы в пограничном слое с самоиндуцированным давлением. Градиент давления вычисляется не по решению внешней задачи обтекания, а полагается обусловленным ростом толщины вытеснения струек, расположенных вблизи поверхности тела. В асимптотических последовательностях удерживаются не только главные члены, но и члены второго порядка малости. Построено решение, удовлетворяющее линеаризованной системе уравнений для главных членов разложений. Указана связь между рассмотренными нестационарными явлениями и устойчивостью пограничного слоя.

Проведенные в 1946 г. эксперименты привели к открытию замечательного явления: ударная волна вызывает отрыв сверхзвукового пограничного слоя на некотором расстоянии вверх по потоку от ее фронта [1,2]. Качественное объяснение этого явления предложено в работе [3]. Еще раньше для количественного описания в рамках линейной теории была введена концепция, согласно которой давление индуцируется самим пограничным слоем благодаря резкому возрастанию ширины струек, находящихся в тонкой пристеночной области [4]. Полная теория возмущений имеет существенно нелинейный характер. Эта теория, развитая в работах [5-9], позволяет изучить структуру поля скоростей в окрестности и за точкой отрыва.

1. Асимптотические уравнения. Будем считать, что при свободном взаимодействии нестационарного пограничного слоя с внешним потоком образуются три области с существенно различными свойствами [5-9]. В верхней области I эффекты вязкости и теплопроводности малы, вихри в течении отсутствуют. В средней области II влиянием диссипативных факторов также можно пренебречь, но поле скоростей является завихренным. В формировании потока в тонкой пристеночной области III вязкость играет определяющую роль; что касается теплопроводности, то ее роль второстепенна, так как при малых скоростях сжимаемость газа практически не проявляется, если его температура варьируется в достаточно узких пределах.

Обозначим через t время, через x и y декартовы координаты, через v_x и v_y составляющие вектора скорости вдоль этих осей, ρ — плотность, p — давление, λ_1 — первый коэффициент вязкости. Параметры газа в невозмущенном стационарном состоянии отметим индексом ∞ . Для простоты примем, что газ течет вдоль пластинки со скоростью U_∞ , а число Маха M_∞ отлично от единицы на конечную величину. Введем малый параметр $\varepsilon = Re_1^{-1/2}$, причем число Рейнольдса Re_1 будем вычислять по первому коэффициенту вязкости и расстоянию L от носка пластинки.

Начнем анализ с внешней области I, в которой течение обладает безвихревым полем скоростей. Положим здесь

$$(1.1) \quad t = \frac{L}{U_\infty} (t_0 + \varepsilon^2 t_1), \quad x = L(1 + \varepsilon^3 x_1), \quad y = \varepsilon^3 L y_1$$

а искомые функции разложим в асимптотические ряды

$$(1.2) \quad \begin{aligned} v_x &= U_\infty [1 + \varepsilon^2 u_{11}(t_1, x_1, y_1) + \varepsilon^3 u_{12}(t_1, x_1, y_1) + \dots] \\ v_y &= U_\infty [\varepsilon^2 v_{11}(t_1, x_1, y_1) + \varepsilon^3 v_{12}(t_1, x_1, y_1) + \dots] \\ \rho &= \rho_\infty [1 + \varepsilon^2 \rho_{11}(t_1, x_1, y_1) + \varepsilon^3 \rho_{12}(t_1, x_1, y_1) + \dots] \\ p &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 [\varepsilon^2 p_{11}(t_1, x_1, y_1) + \varepsilon^3 p_{12}(t_1, x_1, y_1) + \dots] \end{aligned}$$

Подставим формулы (1.1) и разложения (1.2) в систему уравнений Навье — Стокса и соберем члены при одинаковых степенях ε . Для функций первого приближения находим

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} &= 0, \quad \frac{\partial u_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial v_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{11}}{\partial y_1} &= 0, \quad M_\infty^2 \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho_{11}}{\partial x_1} = 0 \end{aligned}$$

Существенно, что все уравнения, образующие систему (1.3), не содержат производных по времени. Это означает, что внешний невязкий поток ведет себя инертно, успевая мгновенно подстраиваться под те возмущения, которые возникают, как будет видно в дальнейшем, в пристеночной области III. Функции второго приближения удовлетворяют неоднородной системе линейных уравнений

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{12}}{\partial y_1} &= -\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial u_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_{11}}{\partial t_1} \\ \frac{\partial v_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y_1} &= -\frac{\partial v_{11}}{\partial t_1}, \quad M_\infty^2 \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho_{12}}{\partial x_1} = 0 \end{aligned}$$

Соответствующая ей однородная система совпадает с системой (1.3). Время входит лишь в правые части уравнений (1.4), в их решениях оно будет содержаться тоже в качестве параметра.

Произведем частичное интегрирование систем уравнений (1.3) и (1.4) при условии, что значения всех искомых функций стремятся к нулю при $x_1 \rightarrow -\infty$, $y_1 = \text{const}$ и $y_1 \rightarrow +\infty$, $x_1 = \text{const}$. Первая из названных систем дает

$$\begin{aligned} u_{11} + p_{11} &= 0, \quad \rho_{11} - M_\infty^2 p_{11} = 0 \\ \frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} + (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial v_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{11}}{\partial y_1} = 0 \end{aligned}$$

Легко видеть, что для сверхзвукового потока с $M_\infty > 1$ каждая из функций p_{11} и v_{11} удовлетворяет волновому уравнению. Отсюда имеем связь

$$(1.5) \quad p_{11}(t_1, x_1, 0) = (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} v_{11}(t_1, x_1, 0)$$

между возмущенным давлением и вертикальной составляющей вектора скорости при $y_1 = 0$. Для дозвукового набегающего потока получается

задача Неймана для уравнения Лапласа, решение которой ищется в полуплоскости $y_1 > 0$. Поэтому при $M_\infty < 1$ находим

$$(1.6) \quad p_{11}(t_1, x_1, 0) = -\frac{1}{\pi} (1 - M_\infty^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_{11}(t_1, X_1, 0)}{x_1 - X_1'} dX_1$$

Результат частичного интегрирования системы уравнений для функций второго приближения дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} &= \frac{\partial p_{11}}{\partial t_1}, \quad \rho_{12} - M_\infty^2 p_{12} = 0 \\ \frac{\partial v_{12}}{\partial y_1} + (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} &= -(M_\infty^2 + 1) \frac{\partial p_{11}}{\partial t_1} \\ \frac{\partial v_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y_1} &= -\frac{\partial v_{11}}{\partial t_1} \end{aligned}$$

Если поток сверхзвуковой, то обе функции p_{12} и v_{12} являются решениями волнового уравнения с правой частью. При $y_1 = 0$ их связывает зависимость

$$(1.7) \quad p_{12}(t_1, x_1, 0) = (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} \left[v_{12}(t_1, x_1, 0) - (M_\infty^2 - 1)^{-1} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial v_{11}(t_1, X_1, 0)}{\partial t_1} dX_1 \right]$$

Для дозвукового потока можно сформулировать задачу Неймана для уравнения Пуассона, решение которой подлежит определению в верхней полуплоскости $y_1 > 0$. Несложные преобразования показывают, что в этом случае

$$(1.8) \quad p_{12}(t_1, x_1, 0) = -\frac{1}{\pi} (1 - M_\infty^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{v_{12}(t_1, X_1, 0)}{x_1 - X_1} - \frac{\partial v_{11}(t_1, X_1, 0)}{\partial t_1} \ln \frac{1}{|x_1 - X_1|} \right] dX_1 + \frac{1}{\pi} \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 p_{11}(t_1, X_1, Y_1)}{\partial t_1 \partial X_1'} \left\{ -\ln \frac{1}{\sqrt{(x_1 - X_1)^2 + Y_1^2}} + \frac{1}{\pi} \left[\arccos \left(\frac{-x_1 + X_1}{\sqrt{(x_1 - X_1)^2 + Y_1^2}} \right) \ln \sqrt{(x_1 - X_1)^2 + Y_1^2} + \arccos \left(\frac{-x_1 - X_1}{\sqrt{(x_1 + X_1)^2 + Y_1^2}} \right) \ln \sqrt{(x_1 + X_1)^2 + Y_1^2} \right] \right\} dX_1 dY_1$$

Перейдем к изучению промежуточной области II, занимающей основную часть пограничного слоя. Несмотря на возможность пренебречь вязкими напряжениями и потоком тепла, течение в этой области уже в первом приближении следует считать вихревым. Масштабы времени и координат задаются формулами

$$(1.9) \quad t = \frac{L}{U_\infty} (t_0 + \varepsilon^2 t_2), \quad x = L(1 + \varepsilon^3 x_2), \quad y = \varepsilon^4 L y_2$$

Для параметров газа верны разложения

$$(1.10) \quad \begin{aligned} v_x &= U_\infty [U_0(y_2) + \varepsilon u_{21}(t_2, x_2, y_2) + \varepsilon^2 u_{22}(t_2, x_2, y_2) + \dots] \\ v_y &= U_\infty [\varepsilon^2 v_{21}(t_2, x_2, y_2) + \varepsilon^3 v_{22}(t_2, x_2, y_2) + \dots] \\ \rho &= \rho_\infty [R_0(y_2) + \varepsilon \rho_{21}(t_2, x_2, y_2) + \varepsilon^2 \rho_{22}(t_2, x_2, y_2) + \dots] \\ p &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 [\varepsilon^2 p_{21}(t_2, x_2, y_2) + \varepsilon^3 p_{22}(t_2, x_2, y_2) + \dots] \end{aligned}$$

Сравнение формул (1.1) и (1.9) показывает, прежде всего, что $t_1 = t_2$, $x_1 = x_2$, но $y_1 \neq y_2$. Роли декартовых координат в области II неравноправны, поскольку характерная длина в поперечном направлении выбрана равной толщине невозмущенного пограничного слоя на пластинке. Структура последнего находится из решения Блазиуса [10], сращивание с которым при $x_1 \rightarrow -\infty$ позволяет установить вид функций $U_0(y_2)$ и $R_0(y_2)$.

В результате подстановки формул (1.9) вместе с разложениями (1.10) в систему уравнений Навье — Стокса имеем для главных членов

$$(1.11) \quad \begin{aligned} R_0 \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + U_0 \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x_2} + R_0 \frac{\partial v_{21}}{\partial y_2} + v_{21} \frac{\partial R_0}{\partial y_2} &= 0 \\ U_0 \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + \frac{dU_0}{dy_2} &= 0, \quad \frac{\partial p_{21}}{\partial y_2} = 0 \quad U_0 \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{dR_0}{dy_2} = 0 \end{aligned}$$

Снова во всех уравнениях системы (1.11) отсутствуют производные по времени. В первом приближении колебания в основной части пограничного слоя передаются мгновенно от точки к точке. Существенно нестационарный характер течения может иметь только в тонкой пристеночной области. Для поправочных членов из разложений (1.10) система уравнений получается неоднородной

$$(1.12) \quad \begin{aligned} R_0 \frac{\partial u_{22}}{\partial x_2} + U_0 \frac{\partial \rho_{22}}{\partial x_2} + R_0 \frac{\partial v_{22}}{\partial y_2} + v_{22} \frac{dR_0}{dy_2} &= \\ = - \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t_2} - \frac{\partial \rho_{21} u_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho_{21} v_{21}}{\partial y_2} \\ R_0 U_0 \frac{\partial u_{22}}{\partial x_2} + R_0 v_{22} \frac{dU_0}{dy_2} &= - \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} - R_0 \frac{\partial u_{21}}{\partial t_2} - \\ - R_0 u_{21} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} - R_0 v_{21} \frac{\partial u_{21}}{\partial y_2} - \frac{\partial p_{22}}{\partial y_2} &= - R_0 U_0 \frac{\partial v_{21}}{\partial x_2} \\ U_0 \frac{\partial \rho_{22}}{\partial x_2} + v_{22} \frac{dR_0}{dy_2} &= - \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t_2} - u_{21} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x_2} - \\ - v_{21} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial y_2} - R_0 U_0 M_\infty^2 \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Соответствующая ей однородная система по форме совпадает с системой (1.11), но является линейной. Время входит только в члены, стоящие в правых частях уравнений (1.12), поэтому оно будет содержаться в их решениях как параметр. Таким образом, параметрическая зависимость от времени служит отличительной чертой разложений, задающих поле возмущенного потока как в верхней области I, так и в промежуточной области II.

Приступая к интегрированию двух последних систем уравнений, потребуем, чтобы возмущения в области II затухали на бесконечности вверх

по потоку. Для главных членов справедливы явные выражения

$$(1.13) \quad \begin{aligned} u_{21} &= A_1(t_2, x_2) \frac{dU_0}{dy_2}, & v_{21} &= -\frac{\partial A_1}{\partial x_2} U_0(y_2) \\ \rho_{21} &= A_1(t_2, x_2) \frac{dR_0}{dy_2}, & p_{21} &= p_{21}(t_2, x_2) \end{aligned}$$

Произвольная функция $A_1(t_2, x_2)$ удовлетворяет условию $A_1 \rightarrow 0$ при $x_2 \rightarrow -\infty$, $t_2 = \text{const}$. Смысл этого простого решения состоит в том, что линии тока в пограничном слое оказываются смещенными, причем величина мгновенного смещения устанавливается заменой y_2 на $y_2 + \varepsilon A_1(t_2, x_2)$ в решении Блазиуса.

Система уравнений (1.12) допускает частичное интегрирование. Учитывая явный вид решения для функций первого приближения, находим

$$(1.14) \quad \begin{aligned} p_{22} &= p_{22}(t_2, x_2, 0) + \left(y_2 - \int_0^{y_2} \frac{M_\infty^2 - M_0^2}{M_\infty^2} dY_2 \right) \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2}, \\ M_0^2 &= M_\infty^2 R_0(y_2) U_0^2(y_2) \\ v_{22} &= -(M_\infty^2 - 1) y_2 U_0 \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} - M_\infty^2 U_0 \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} \int_{y_2}^{\infty} \left(\frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{M_\infty^2} \right) dY_2 - \\ &\quad - \frac{\partial A_1}{\partial t_2} - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \frac{dU_0}{dy_2} - U_0 \frac{\partial A_2(t_2, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{22}}{\partial y_2} &= -M_\infty^2 U_0 \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} \\ U_0 \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + v_{22} \frac{dR_0}{dy_2} &= +M_\infty^2 R_0 U_0 \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} - \\ &\quad - \frac{\partial A_1}{\partial t_2} \frac{dR_0}{dy_2} + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \left(U_0 \frac{d^2 R_0}{dy_2^2} - \frac{dR_0}{dy_2} \frac{dU_0}{dy_2} \right) \end{aligned}$$

Здесь произвольная функция $A_2(t_2, x_2)$ подчиняется условию $A_2 \rightarrow 0$ при $x_2 \rightarrow -\infty$, $t_2 = \text{const}$.

Приступим к анализу пристеночной области III, где вязкость оказывает преобладающее влияние на структуру поля скоростей. В этой области следует положить

$$(1.15) \quad t = \frac{L}{U_\infty} (t_0 + \varepsilon^2 t_3), \quad x = L(1 + \varepsilon^3 x_3), \quad y = \varepsilon^5 L y_3$$

и записать разложения для параметров газа в виде

$$(1.16) \quad \begin{aligned} v_x &= U_\infty [\varepsilon u_{31}(t_3, x_3, y_3) + \varepsilon^2 u_{32}(t_3, x_3, y_3) + \dots] \\ v_y &= U_\infty [\varepsilon^3 v_{31}(t_3, x_3, y_3) + \varepsilon^4 v_{32}(t_3, x_3, y_3) + \dots] \\ \rho &= \rho_\infty [\rho_{31}(t_3, x_3, y_3) + \varepsilon \rho_{32}(t_3, x_3, y_3) + \dots] \\ p &= p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2 [\varepsilon^2 p_{31}(t_3, x_3, y_3) + \varepsilon^3 p_{32}(t_3, x_3, y_3) + \dots] \end{aligned}$$

Как видно из сравнения формул (1.1), (1.9) и (1.15), $t_1 = t_2 = t_3$, $x_1 = x_2 = x_3$, однако $y_1 \neq y_2 \neq y_3$. Это естественно, поскольку длина всех трех областей в направлении набегающего потока одинакова и отсчет времени во всех трех областях также производится одинаковым образом. Что касается поперечных масштабов, то они выбираются по-разному. Как

и в области II, роли декартовых координат в области III существенно неравноправны.

Некоторые упрощения в разложения (1.16) можно внести еще до их подстановки в уравнения Навье — Стокса. Будем считать для определенности, что обтекаемая пластинка термически изолирована, а число Прандтля равно единице. Тогда отношение T_w/T_∞ температуры стенки к температуре набегающего потока подчиняется закону Крокко [10]

$$\frac{T_w}{T_\infty} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2$$

где κ — показатель адиабаты Пуассона. Кроме того, производная $dR_0(0)/dy_2 = 0$. Отсюда заключаем, что не только в первом, но и во втором приближениях $\rho/\rho_\infty \rightarrow R_0(0)$ при $x \rightarrow -\infty$. Ниже будет показано, что условия сращивания решений для областей II и III приводят к аналогичному результату: $\rho/\rho_\infty \rightarrow R_0(0)$ при $y_3 \rightarrow +\infty$. Положим поэтому в качестве решения $\rho_{31}(t_3, x_3, y_3) = R_0(0)$ и $\rho_{32}(t_3, x_3, y_3) = 0$.

При линейной зависимости $\lambda_1/\lambda_\infty = CT/T_\infty$ первого коэффициента вязкости от температуры упрощение системы уравнений Навье — Стокса приводит к обычным уравнениям Прандтля

$$(1.17) \quad \frac{\partial u_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial v_{31}}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial p_{31}}{\partial y_3} = 0$$

$$R_0(0) \left(\frac{\partial u_{31}}{\partial t_3} + u_{31} \frac{\partial u_{31}}{\partial x_3} + v_{31} \frac{\partial u_{31}}{\partial y_3} \right) = - \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} + \frac{C}{R_0(0)} \frac{\partial^2 u_{31}}{\partial y_3^2}$$

для нестационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости, которым удовлетворяют главные члены разложений (1.16). Разница состоит в том, что возмущенное давление нельзя брать из решения внешней задачи обтекания. В частности, для рассматриваемого пограничного слоя на пластинке $\partial p_{31}/\partial x_3 \neq 0$.

Для функций второго приближения находим

$$(1.18) \quad \frac{\partial u_{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial v_{32}}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial p_{32}}{\partial y_3} = 0$$

$$R_0(0) \left(\frac{\partial u_{32}}{\partial t_3} + u_{31} \frac{\partial u_{32}}{\partial x_3} + u_{32} \frac{\partial u_{31}}{\partial x_3} + v_{31} \frac{\partial u_{32}}{\partial y_3} + v_{32} \frac{\partial u_{31}}{\partial y_3} \right) =$$

$$= - \frac{\partial p_{32}}{\partial x_3} + \frac{C}{R_0(0)} \frac{\partial^2 u_{32}}{\partial y_3^2}$$

Это не что иное, как линеаризованные уравнения Прандтля для нестационарных течений несжимаемой жидкости. Остальные члены, входящие в исходную систему уравнений Навье — Стокса, будут влиять только на построение высших приближений. С последним обстоятельством связана также однородность уравнений, образующих систему (1.18).

2. Формулировка краевых задач. Чтобы произвести сращивание рассматриваемых асимптотических разложений, необходимо знать поведение решения при приближении изнутри к верхней и нижней границам области II. Поскольку $U_0(y_2) \rightarrow 1$ при $y_2 \rightarrow \infty$, соотношения (1.14)

дают

$$(2.1) \quad \begin{aligned} p_{22} - y_2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} &\rightarrow p_{22}(t_2, x_2, 0) - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} \int_0^\infty \frac{M_\infty^2 - M_0^2}{M_\infty^2} dY_2 \\ v_{22} + (M_\infty^2 - 1) y_2 \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} &\rightarrow - \frac{\partial A_1}{\partial t_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \\ u_{22} &\rightarrow - p_{21}(t_2, x_2), \quad \rho_{22} \rightarrow M_\infty^2 p_{21}(t_2, x_2) \end{aligned}$$

Эти формулы верны при любых условиях на пластинке. Поведение решения вблизи нижней границы области II зависит от того, какой тепловой режим поддерживается на обтекаемой поверхности. Как и выше, будем считать для простоты, что пластинка термически изолирована. Тогда, кроме уже отмеченного равенства $dR_0(0)/dy_2 = 0$, на ее поверхности будут иметь место соотношения

$$\frac{d^2 U_0(0)}{dy_2^2} = 0, \quad \frac{d^2 R_0(0)}{dy_2^2} = (\kappa - 1) M_\infty^2 N_{Pr} \left[R_0(0) \frac{dU_0(0)}{dy_2} \right]^2$$

следующие из решения Блазиуса [10]. Учитывая их, можно показать, что при $y_2 = 0$ функции

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p_{22} &= p_{22}(t_2, x_2, 0) \\ v_{22} &= - \left[R_0(0) \frac{dU_0(0)}{dy_2} \right]^{-1} \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial A_1}{\partial t_2} - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \frac{dU_0(0)}{dy_2} \\ u_{22} &= \frac{dU_0(0)}{dy_2} A_2 + M_\infty^2 \frac{dU_0(0)}{dy_2} p_{21}(t_2, x_2) \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{M_0^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left[Y_2 \frac{dM_0(0)}{dY_2} \right]^{-2} - \frac{1}{M_\infty^2} \right\} dY_2 \\ \rho_{22} &= M_\infty^2 R_0(0) p_{21}(t_2, x_2) + \left\{ \frac{1}{2} A_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_{21}(t_2, x_2)}{R_0(0)} \left[\frac{dU_0(0)}{dy_2} \right]^{-2} \right\} \frac{d^2 R_0(0)}{dy_2^2} \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами (1.13) для главных членов разложений и асимптотическими выражениями (2.1) для функций второго приближения, чтобы получить граничные условия, которым необходимо удовлетворить при построении решения в области I. Когда $y_2 \rightarrow \infty$, внешняя переменная $y_1 \rightarrow 0$. Отсюда вытекает, что

$$(2.3) \quad \begin{aligned} p_{11}(t_1, x_1, 0) &= p_{21}(t_2, x_2), \quad v_{11}(t_1, x_1, 0) = - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \\ u_{11}(t_1, x_1, 0) &= - p_{21}(t_2, x_2), \quad \rho_{11}(t_1, x_1, 0) = M_\infty^2 p_{21}(t_2, x_2) \end{aligned}$$

Кроме того, для возмущений давления и поперечной составляющей вектора скорости во втором приближении справедливы соотношения

$$(2.4) \quad \begin{aligned} p_{21}(t_1, x_1, 0) &= p_{22}(t_2, x_2, 0) - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} \int_0^\infty \frac{M_\infty^2 - M_0^2}{M_\infty^2} dY_2 \\ v_{12}(t_1, x_1, 0) &= - \frac{\partial A_1}{\partial t_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Что касается возмущений плотности и продольной составляющей вектора скорости, то во втором приближении граничные условия для них

при $y_1 = 0$ нельзя вывести при помощи асимптотических выражений (2.1). Для этой цели требуется знать члены третьего приближения в решении для области II, которые не рассматриваются в данном анализе.

Принимая во внимание формулы (1.5) и (1.6), приходим к заключению, что граничные условия при $y_1 = 0$ для главных членов решения в области I могут быть записаны через функцию $A_1(t_2, x_2) = A_1(t_1, x_1)$. В силу соотношений (1.7) и (1.8) в граничные условия для членов второго приближения войдет также функция $A_2(t_2, x_2) = A_2(t_1, x_1)$.

Произведем сращивание разложений, которые представляют асимптотический вид решений в областях II и III. Обращаясь к формулам (1.13) и выражениям (2.2), получим предельные условия, которым должны удовлетворять параметры газа в тонком пристеночном слое. Если $y_2 \rightarrow 0$, то внутренняя переменная $y_3 \rightarrow \infty$, а искомые величины

$$(2.5) \quad \begin{aligned} p_{31}(t_3, x_3) &\rightarrow p_{21}(t_2, x_2) \\ u_{31} - \frac{dU_0(0)}{dy_2} y_3 &\rightarrow \frac{dU_0(0)}{dy_2} A_1(t_2, x_2) + o\left(\frac{1}{y_3}\right) \end{aligned}$$

Предельное условие $\rho_{31} \rightarrow R_0(0)$ для возмущения плотности служило выше одним из оснований, чтобы выбрать в качестве решения $\rho_{31}(t_3, x_3, y_3) = R_0(0)$. Предельное условие для поперечной составляющей вектора скорости в теории пограничного слоя обычно опускается. В рассматриваемом случае оно может быть записано как

$$\begin{aligned} v_{31} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \frac{dU_0(0)}{dy_2} y_3 &\rightarrow - \left[R_0(0) \frac{dU_0(0)}{dy_2} \right]^{-1} \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} - \\ &- \frac{\partial A_1}{\partial t_2} - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \frac{dU_0(0)}{dy_2} \end{aligned}$$

и выполняется автоматически, если удовлетворены условия (2.5) для возмущений давления и продольной составляющей вектора скорости. Действительно, разрешим третье из уравнений (1.17) относительно функции v_{31} . Имеем

$$v_{31} = \left(\frac{\partial u_{31}}{\partial x_3} \right)^{-1} \left[- \frac{1}{R_0(0)} \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} + \frac{C}{R_0^2(0)} \frac{\partial^2 u_{31}}{\partial y_3^2} - \frac{\partial u_{31}}{\partial t_3} - u_{31} \frac{\partial u_{31}}{\partial x_3} \right]$$

Подставляя сюда асимптотически (2.5) для величин p_{31} и u_{31} , убеждаемся в справедливости сделанного утверждения.

Предельные условия для функций второго приближения имеют вид

$$(2.6) \quad \begin{aligned} p_{32}(t_3, x_3) &\rightarrow p_{22}(t_2, x_2, 0) \\ u_{32} &\rightarrow \frac{dU_0(0)}{dy_2} \left\{ A_2 + M_\infty^2 p_{21}(t_2, x_2) \int_0^\infty \left[\frac{1}{M_0^2} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \left[Y_2 \frac{dM_0(0)}{dY_2} \right]^{-2} - \frac{1}{M_\infty^2} \right] dY_2 \right\} \end{aligned}$$

Условие $\rho_{32} \rightarrow 0$ было уже учтено выше при выборе решения $\rho_{32}(t_3, x_3, y_3) = 0$. Внося во второе равенство (2.2) для v_{22} дополнитель-

дый член, который пропорционален y_2 , имеем предельное условие

$$v_{32} \rightarrow -y_3 \frac{dU_0(0)}{dy_2} \left\{ \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + M_\infty^2 \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{M_0^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[Y_2 \frac{dM_0(0)}{dY_2} \right]^{-2} - \frac{1}{M_\infty^2} \right] dY_2 \right\}$$

для поперечной составляющей вектора скорости. Как и в первом приближении, оно выполняется автоматически, если полагаются удовлетворенными условия для возмущений давления и продольной составляющей вектора скорости. В этом можно убедиться, разрешив третье уравнение из системы (1.18) относительно функции v_{32} и подставив в правую часть полученного выражения асимптотические значения величин p_{31} , u_{31} , v_{31} , p_{32} и u_{32} .

Отметим, что в процессе сращивания решений для областей II и III член с ρ_{22} в разложении для плотности вообще не принимался во внимание. Это естественно, поскольку при $y_2 \rightarrow 0$ обусловленный им вклад пропорционален ε^2 , в то время как во всем тонком пристеночном слое плотность газа достаточно задать только с точностью до слагаемых порядка ε .

Воспользуемся условиями сращивания, чтобы сформулировать краевые задачи в области III для функций первого и второго приближений. Предварительно совершим преобразование

$$(2.7) \quad \begin{aligned} t_1 = t_2 = t_3 &= C^{1/2} \lambda^{-3/2} |M_\infty^2 - 1|^{-1/2} (T_w/T_\infty) t' \\ x_1 = x_2 = x_3 &= C^{3/2} \lambda^{-3/4} |M_\infty^2 - 1|^{-3/2} (T_w/T_\infty)^{3/2} x' \\ y_3 &= C^{5/2} \lambda^{-3/4} |M_\infty^2 - 1|^{-1/2} (T_w/T_\infty)^{3/2} y' \\ u_{31} + \varepsilon u_{32} &= C^{1/2} \lambda^{1/4} |M_\infty^2 - 1|^{-1/2} (T_w/T_\infty)^{1/2} (u_{31}' + \varepsilon u_{32}') \\ v_{31} + \varepsilon v_{32} &= C^{3/2} \lambda^{3/4} |M_\infty^2 - 1|^{1/2} (T_w/T_\infty)^{1/2} (v_{31}' + \varepsilon v_{32}') \\ p_{31} + \varepsilon p_{32} &= C^{1/2} \lambda^{1/2} |M_\infty^2 - 1|^{-1/2} (p_{31}' + \varepsilon p_{32}') \\ A_1 + \varepsilon A_2 &= C^{5/2} \varepsilon \lambda^{-3/4} |M_\infty^2 - 1|^{-1/2} (T_w/T_\infty)^{3/2} (A_1' + \varepsilon A_2') \end{aligned}$$

где постоянная $\lambda = 0.3321$ определяется при помощи равенства $dU_0(0)/dy_2 = \lambda C^{-1/2} (T_w/T_\infty)^{-1}$ и вычисляется по решению Блазиуса для невозмущенного пограничного слоя. Это преобразование позволяет исключить при формулировке задачи зависимость главных членов разложений от разности $M_\infty - 1$, которая вводится посредством равенств (1.5) или (1.6), и от постоянных C и $R_0(0) = (T_w/T_\infty)^{-1}$.

В штрихованных переменных система уравнений (1.17) для функций первого приближения приобретает канонический вид

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u'_{31}}{\partial x'} + \frac{\partial v'_{31}}{\partial y'} &= 0, \quad \frac{\partial p'_{31}}{\partial y'} = 0 \\ \frac{\partial u'_{31}}{\partial t'} + u'_{31} \frac{\partial u'_{31}}{\partial x'} + v'_{31} \frac{\partial u'_{31}}{\partial y'} &= - \frac{\partial p'_{31}}{\partial x'} - \frac{\partial^2 u'_{31}}{\partial y'^2} \end{aligned}$$

Граничные условия при $y' = 0$ очевидны

$$(2.9) \quad u'_{31} = 0, \quad v'_{31} = 0$$

Остальные граничные условия ставятся в качестве предельных. Именно, при $x' \rightarrow -\infty$ имеем

$$(2.10) \quad u_{31}' \rightarrow y', \quad p_{31}' \rightarrow 0$$

Кроме того, на основании формул (2.3) и (2.5) заключаем, что при $y' \rightarrow \infty$

$$(2.11) \quad u_{31}' - y' \rightarrow A'(t', x') + o\left(\frac{1}{y'}\right)$$

причем справедливо одно из соотношений

$$(2.12) \quad p_{31}' = -\frac{\partial A_1'}{\partial x'}, \quad \text{если } M_\infty > 1$$

$$p_{31}' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A_1' / \partial X'}{x' - X'} dX', \quad \text{если } M_\infty < 1$$

Система (2.8) без члена $\partial u_{31}' / \partial t'$ в левой части последнего из входящих в нее уравнений была выведена в работах [5-9] при изучении стационарных течений. Приведенные выше рассуждения показывают, что формулировка задачи для нестационарного пограничного слоя усложняется не сильно благодаря тому, что уравнения, описывающие течение в областях I и II, в первом приближении не содержат производных по времени.

Преобразование (2.7) фактически выражает закон подобия для главных членов параметров течений в нестационарном пограничном слое, поскольку ни система уравнений (2.8), ни краевые условия (2.9) — (2.12) не содержат величин Re , M_∞ , κ , C , λ , T_w/T_∞ . Таким образом, одинаковые режимы течений могут иметь место при различных значениях перечисленных постоянных, характер потока определяется начальными данными задачи. Для стационарных течений закон подобия был найден сначала экспериментально [3] и затем установлен теоретически в работах [5,7].

Система (1.18) для функций второго приближения состоит из линеаризованных уравнений Прандтля. Отсюда ясно, что в штрихованных переменных она также запишется в каноническом виде

$$(2.13) \quad \frac{\partial u_{32}'}{\partial x'} + \frac{\partial v_{32}'}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial p_{32}'}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial u_{32}'}{\partial t'} + u_{31}' \frac{\partial u_{32}'}{\partial x'} + u_{32}' \frac{\partial u_{31}'}{\partial x'} + v_{31}' \frac{\partial u_{32}'}{\partial y'} + v_{32}' \frac{\partial u_{31}'}{\partial y'} =$$

$$= -\frac{\partial p_{32}'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u_{32}'}{\partial y'^2}$$

свободном от каких-либо параметров. В граничные условия $u_{32}' = 0$, $v_{32}' = 0$ при $y' = 0$ и предельные условия $u_{32}' \rightarrow 0$, $p_{32}' \rightarrow 0$ при $x' \rightarrow -\infty$ никакие параметры также не входят. Иначе дело обстоит с предельными условиями при $y' \rightarrow \infty$. Прежде чем написать их, полезно вычислить интегралы, фигурирующие в асимптотических формулах (2.1) и (2.2) Согласно решению Блазиуса для пограничного слоя на пластинке спра-

ведливы равенства [10]

$$\int_0^{\infty} \frac{M_{\infty}^2 - M_0^2}{M_{\infty}^2} dY_2 = (2C)^{1/2} \frac{T_W}{T_{\infty}} \Delta_1, \quad \Delta_1 = 1.686$$

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{M_0^2} - \left[Y_2 \frac{dM_0(0)}{dY_2} \right]^{-2} - \frac{1}{M_{\infty}^2} \right\} dY = \overline{\int_0^{\infty}} \left(\frac{1}{R_0 U_0^2} - 1 \right) dY_2 =$$

$$= (2C)^{1/2} \left[\left(\frac{T_W}{T_{\infty}} \right)^2 \Delta_2 - \frac{T_W}{T_{\infty}} \left(\frac{T_W}{T_{\infty}} - 1 \right) \Delta_1 \right], \quad \Delta_2 = -3.663$$

где уголком над несобственным расходящимся интегралом обозначена его конечная часть в смысле Адамара. Учитывая условия сращивания (2.4) и (2.6), при $y' \rightarrow \infty$ имеем в результате

$$(2.14) \quad u'_{32} \rightarrow A_2' + 2^{1/2} C^{1/8} \lambda^{5/4} |M_{\infty}^2 - 1|^{-1/8} \left(\frac{T_W}{T_{\infty}} \right)^{1/2} \left(\Delta_2 - \frac{T_W - T_{\infty}}{T_W} \Delta_1 \right) p'_{31}$$

Если $M_{\infty} > 1$, то возмущенное давление будет

$$(2.15) \quad p'_{32} = (2 - M_{\infty}^2) C^{1/8} \lambda^{1/4} |M_{\infty}^2 - 1|^{-3/8} \left(\frac{T_W}{T_{\infty}} \right)^{1/2} \frac{\partial A_1'}{\partial t'} - \frac{\partial A_2'}{\partial x'} +$$

$$+ 2^{1/2} \Delta_1 C^{1/8} \lambda^{5/4} |M_{\infty}^2 - 1|^{7/8} \left(\frac{T_W}{T_{\infty}} \right)^{-1/2} \frac{\partial^2 A_2'}{\partial x'^2}$$

Для дозвуковых течений с $M_{\infty} < 1$ аналогичное равенство выглядит значительно сложнее. Вспоминая связь (1.8) между возмущениями давления и вертикальной составляющей вектора скорости на нижней границе области I, находим в этом случае

$$(2.16) \quad p'_{32} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[2C^{1/8} \lambda^{1/4} |M_{\infty}^2 - 1|^{-1/8} \left(\frac{T_W}{T_{\infty}} \right)^{1/2} \frac{\partial A_1'}{\partial t'} + \frac{\partial A_2'}{\partial X'} \right] \frac{dX'}{x' - X'} +$$

$$+ 2^{1/2} \Delta_1 C^{1/8} \lambda^{5/4} |M_{\infty}^2 - 1|^{7/8} \left(\frac{T_W}{T_{\infty}} \right)^{-1/2} \frac{\partial^2 A_1'}{\partial x'^2} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} C^{1/8} \lambda^{1/4} |M_{\infty}^2 - 1|^{-3/8} \left(\frac{T_W}{T_{\infty}} \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 p'_{11}(t', X', Y')}{\partial t' \partial X'} \times$$

$$\times \left\{ \ln \sqrt{b [(x' - X')^2 + Y'^2]} + \frac{1}{\pi} \left[\arccos \frac{-x' + X'}{\sqrt{(x' - X')^2 + Y'^2}} \times \right. \right.$$

$$\times \ln \sqrt{b [(x' - X')^2 + Y'^2]} + \arccos \frac{-x' - X'}{\sqrt{(x' + X')^2 + Y'^2}} \times$$

$$\left. \left. \times \ln \sqrt{b [(x' + X')^2 + Y'^2]} \right] \right\} dX' dY'$$

причем производная $\partial^2 p'_{11}(t', X', Y') / \partial t' \partial X'$ и постоянная b выражаются посредством формул

$$\frac{\partial^2 p'_{11}(t', X', Y')}{\partial t' \partial X'} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 A_1'(t', X'')}{\partial t' \partial X''} \frac{(X' - X'')^2 - Y'^2}{[(X' - X'')^2 + Y'^2]^2} dX''$$

$$b = C^{3/4} \lambda^{-3/4} |M_{\infty}^2 - 1|^{-3/4} \left(\frac{T_W}{T_{\infty}} \right)^3$$

Вывод предельного условия (2.14) с присоединенными к нему равенствами (2.15) и (2.16) для возмущенного давления завершает формулировку краевой задачи для функций второго приближения, удовлетворяющих системе линейных уравнений (2.13). Поправочные члены существенно зависят от постоянных M_∞ , C , λ и T_w/T_∞ .

3. Линейное приближение. Будем считать набегающий поток сверхзвуковым, т. е. $M_\infty > 1$. В разложениях газовых параметров в асимптотические последовательности учтем лишь главные члены и пренебрежем членами второго порядка малости. В области III требуется решить тогда систему нелинейных уравнений (2.8) при граничных условиях (2.9)–(2.11), причем давление нужно определить первой из формул (2.12). Поставленная задача однородная, она имеет, очевидно, тривиальное решение $u_{z1} = y$, $v_{z1} = 0$, $p_{z1} = 0$, которое соответствует продолжению решения Блазиуса в неизменном виде через всю рассматриваемую область. Здесь и в дальнейшем штрихи над независимыми переменными и искомыми функциями опустим. Существование еще одного стационарного решения было установлено в работе [4] в рамках линейной теории. Этот факт имеет фундаментальное значение, поскольку показывает, что решение Блазиуса может разветвляться на границе пристеночной области при $x \rightarrow -\infty$. Бифуркация решения в стационарном случае позволяет ввести гипотезу, что существует целый класс движений газа с зависящими от времени параметрами, которые непрерывно примыкают к невозмущенному пограничному слою. Чтобы проверить высказанную гипотезу, запишем решение в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_{z1} &= y - ae^{\omega t + kx} df/dy, & v_{z1} &= ake^{\omega t + kx} f(y) \\ p_{z1} &= ae^{\omega t + kx} \end{aligned}$$

Будучи линейными, первое и второе уравнения системы (2.8) удовлетворяются этим решением тождественно. Что касается последнего уравнения, то в результате его линеаризации по амплитуде a возмущений получается обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$(3.2) \quad \frac{d^3 f}{dy^3} - (\omega + ky) \frac{df}{dy} + kf + k = 0$$

для функции $f(y)$. Относительно постоянных ω и k в соотношениях (3.1) предположим, что они комплексны, тогда комплексными окажутся также амплитуда a и функция $f(y)$. Итак

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2, \quad k = k_1 + ik_2, \quad a = a_1 + ia_2, \quad f(y) = f_1(y) + if_2(y)$$

Отсюда следует, что уравнение (3.2) определяет комплексную функцию действительного переменного. Граничные условия при $y = 0$ находятся при помощи равенств (2.9) и имеют вид

$$(3.3) \quad f = df/dy = 0$$

Чтобы удовлетворить предельным условиям (2.10) при $x \rightarrow -\infty$, достаточно принять $k_1 > 0$. Предельное условие (2.11) при $y \rightarrow \infty$ дает

$$(3.4) \quad \frac{df}{dy} \rightarrow \frac{1}{k}$$

Итак, для дифференциального уравнения (3.2) сформулирована краевая задача (3.3), (3.4). Поскольку уравнение имеет третий порядок и в задаче содержатся три условия, то, на первый взгляд, кажется, что ее решение существует при любых ω и k . Однако такой вывод ошибочен. Действительно, одно из трех линейно-независимых решений уравнения (3.2) обладает неограниченной производной при $y \rightarrow \infty$. Поэтому условие (3.4), с одной стороны, ведет к требованию, чтобы это решение было отброшено, с другой стороны, дает равенство, которому должна удовлетворять мультипликативная постоянная в решении с ограниченной производной. Отсюда ясно, что фактически краевая задача (3.3), (3.4) является задачей на собственные значения.

Для решения сформулированной задачи применим следующий прием. Продифференцируем уравнение (3.2) и совершим преобразование $z = \omega/k^{2/3} + k^{1/3}y$ независимой переменной. В результате получим дифференциальное уравнение

$$(3.5) \quad \frac{d^4 f}{dz^4} - z \frac{d^2 f}{dz^2} = 0$$

четвертого порядка с граничными условиями

$$(3.6) \quad f = 0, \quad \frac{df}{dz} = 0, \quad \frac{d^3 f}{dz^3} = -1 \quad \text{при} \quad z = \frac{\omega}{k^{2/3}}$$

$$df/dz = k^{-1/3} \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty$$

В силу $k_1 = \operatorname{Re} k > 0$ справедливы неравенства $-\pi/6 < \arg k^{1/3} < \pi/6$, откуда следует, что $-\pi/6 < \arg z < \pi/6$ при $y \rightarrow \infty$. Как легко заметить, уравнение (3.5) представляет собой канонический вид уравнения Эйри для второй производной $d^2 f/dz^2$. Его решение, удовлетворяющее условию $|df/dz| < \infty$, запишем посредством

$$d^2 f/dz^2 = c_0 \operatorname{Ai}(z)$$

Здесь $\operatorname{Ai}(z)$ — функция Эйри комплексного переменного, c_0 — произвольная постоянная. Условие для третьей производной в точке $z = \omega/k^{2/3}$ определяет значение постоянной

$$c_0 = - \left[\frac{d \operatorname{Ai}(\omega/k^{2/3})}{dz} \right]^{-1}$$

а остальные условия в этой точке позволяют придать решению вид

$$(3.7) \quad f = - \left[\frac{d \operatorname{Ai}(\omega/k^{2/3})}{dz} \right]^{-1} \int_{\omega/k^{2/3}}^z \left[\int_{\omega/k^{2/3}}^z \operatorname{Ai}(Z') dZ' \right] dZ$$

Наконец, последнее из условий (3.6), ограничивающее порядок роста решения в бесконечно удаленной точке, ведет к дисперсионному соотношению

$$(3.8) \quad - \frac{d \operatorname{Ai}(\omega/k^{2/3})}{dz} \left[\int_{\omega/k^{2/3}}^{\infty} \operatorname{Ai}(Z) dZ \right]^{-1} = k^{1/3}$$

которое связывает между собой показатели степеней ω и k . Значения этих показателей, удовлетворяющие соотношению (3.8), являются собственными в решении исходной краевой задачи.

Если $\omega = 0$, то зависимость от времени в линейном решении (3.1) пропадает, течение газа в пограничном слое стационарно. Как было установлено еще в работе [4], в этом случае $k(0) = k_1^* = [3^{7/6} \Gamma(2/3)/2\pi]^{3/4}$, $k_2 = 0$. Чтобы найти общую зависимость $k(\omega)$, воспользуемся разложением функции Эйри в ряд [11]

$$(3.9) \quad \text{Ai} = \frac{\pi^{1/2}}{3^{2/3}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{3m}}{m! 3^{2m} \Gamma(m + 2/3)} - \frac{z}{3^{2/3}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{3m}}{m! 3^{2m} \Gamma(m + 4/3)} \right]$$

радиус сходимости которого бесконечен. При малых $|\omega|$ имеем отсюда

$$\begin{aligned} \omega &= [k^{2/3} \text{Ai}(0)]^{-1} \left[\frac{d \text{Ai}(0)}{dz} + k^{4/3} \int_0^{\infty} \text{Ai}(Z) dZ \right] = \\ &= 3^{-1/3} \Gamma(2/3) k^{2/3} - 2^{-1} 3^{5/6} \pi^{-1} \Gamma^2(2/3) k^{-2/3} \end{aligned}$$

Ясно, что комплексные значения k получаются только при комплексных значениях ω . Если ω выбрать действительной, то величина k окажется также действительной. Этот вывод сохраняет силу и для больших $|\omega|$.

Полное решение трансцендентного уравнения (3.8) было построено численно при помощи ЭВМ. Обозначив его левую часть буквой Φ , пишем

$$\Phi(w) = k^{4/3}, \quad w = \omega/k^{2/3}$$

Выберем произвольное значение $\omega = \omega_j$ и найдем соответствующее ему значение $k = k_j(\omega_j)$ по методу Ньютона. Пусть k_j^i будет i -м приближением искомой величины, тогда $w_j^i = \omega_j / (k_j^i)^{2/3}$, а поправка

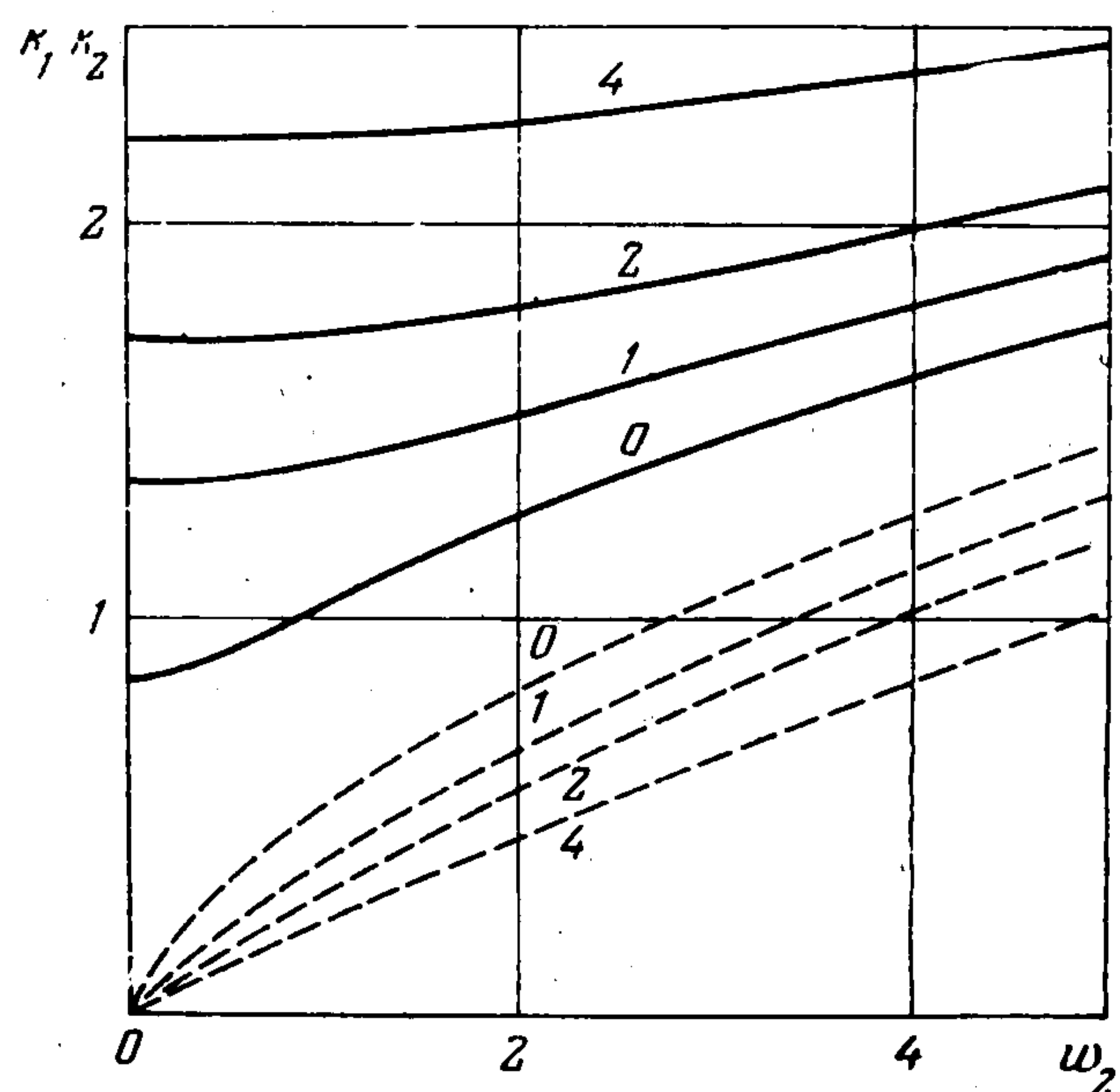
$$(3.10) \quad \Delta k_j^i = [k_j^i - \Phi(w_j^i)] \left\{ \frac{4}{3} k_j^i \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_j}{(k_j^i)^2} \frac{d\Phi}{dw} \right] \right\}^{-1}$$

Благодаря аналитичности функции $\Phi(w)$ ее производная $d\Phi/dz$ не зависит от направления в комплексной плоскости, этот факт делает формулу (3.10) весьма удобной для расчетов. В вычислениях использовалось тейлоровское разложение (3.9) для функции Эйри, изменение аргумента которой ограничивалось неравенством $|z| < 7$. В качестве начального приближения k_j^0 задавалась величина k_{j-1} , соответствующая предыдущему значению ω_{j-1} . При шаге $|\Delta\omega| = 0.1$ формула (3.10) позволяет определить k с точностью до шести знаков за две-три итерации. Что касается больших значений $|z|$, то следует применять не ряд Тейлора (3.9), а асимптотическое разложение функции Эйри для $|z| \rightarrow \infty$ [11].

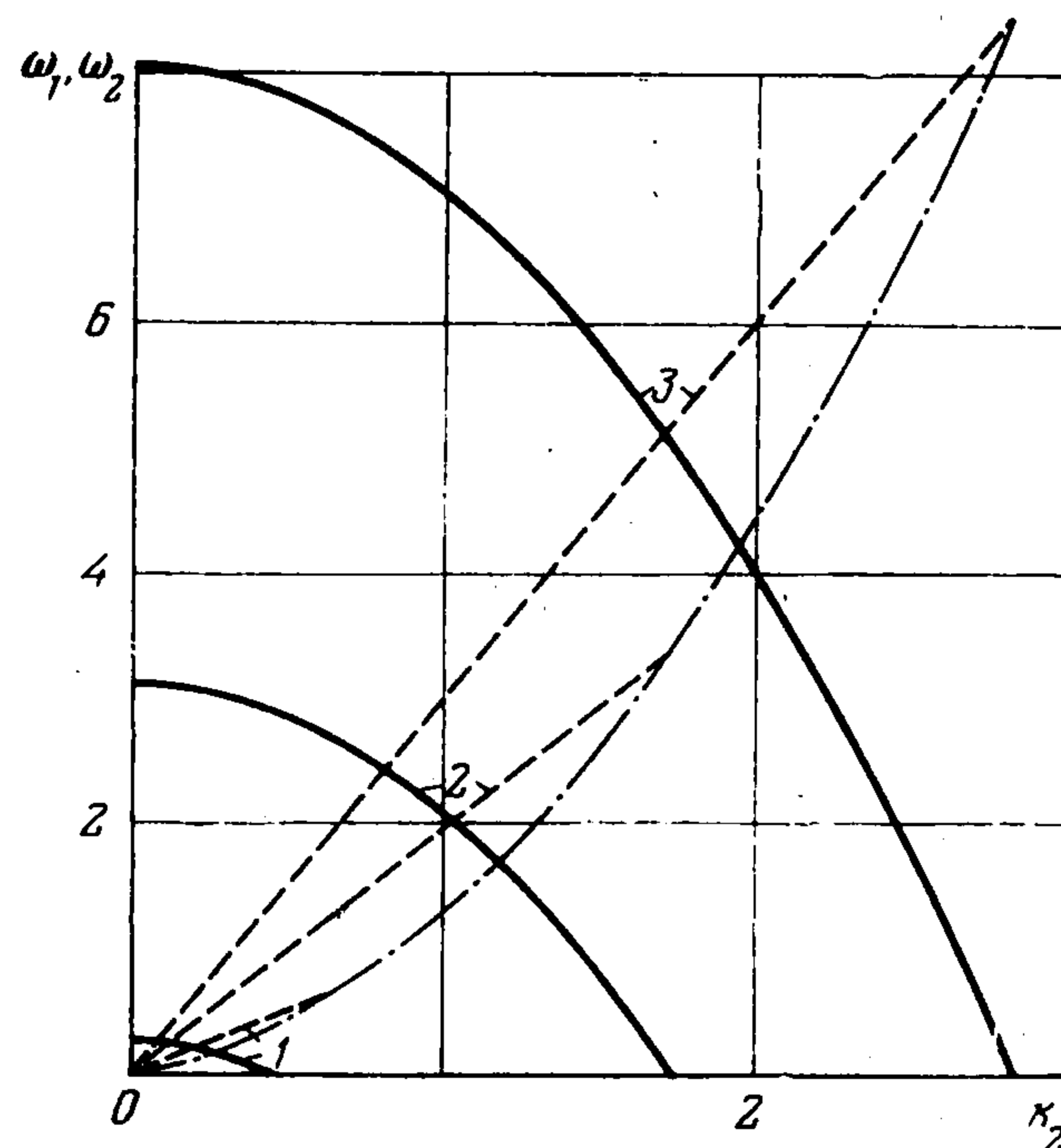
Результаты вычислений $k(\omega)$ приведены на фиг. 1 (k_1 — сплошные линии, k_2 — штриховые линии). В качестве независимой переменной взята величина $\omega_2 = \text{Im}\omega$, в то время как $\omega_1 = \text{Re}\omega$ служит в качестве параметра, численные значения которого проставлены у соответствующих им кривых. Видно, что все кривые с $\omega_1 > 0$ лежат по одну сторону от кривой, для которой $\omega_1 = 0$. При любом значении ω_1 функция $k_1(\omega_2)$

четная, а функция $k_2(\omega_2)$ нечетная. Как действительная, так и мнимая части k монотонно возрастают с увеличением ω_1 и ω_2 .

Кривые с $\omega_1 = 0$ играют роль предельных. В самом деле, в этом случае решение (3.1) имеет чисто колебательный характер во времени. Колебания во времени сопровождаются колебаниями по пространству, но поскольку $k_1 > 0$, они затухают при $x \rightarrow -\infty$ по экспоненциальному закону. Отсюда заключаем, что до некоторой точки на поверхности пластинки сверхзвуковой пограничный слой может быть стационарным, а за



Фиг. 1



Фиг. 2

ней расположена область, где параметры газа изменяются периодически, причем амплитуда колебаний в каждом месте сохраняется постоянной.

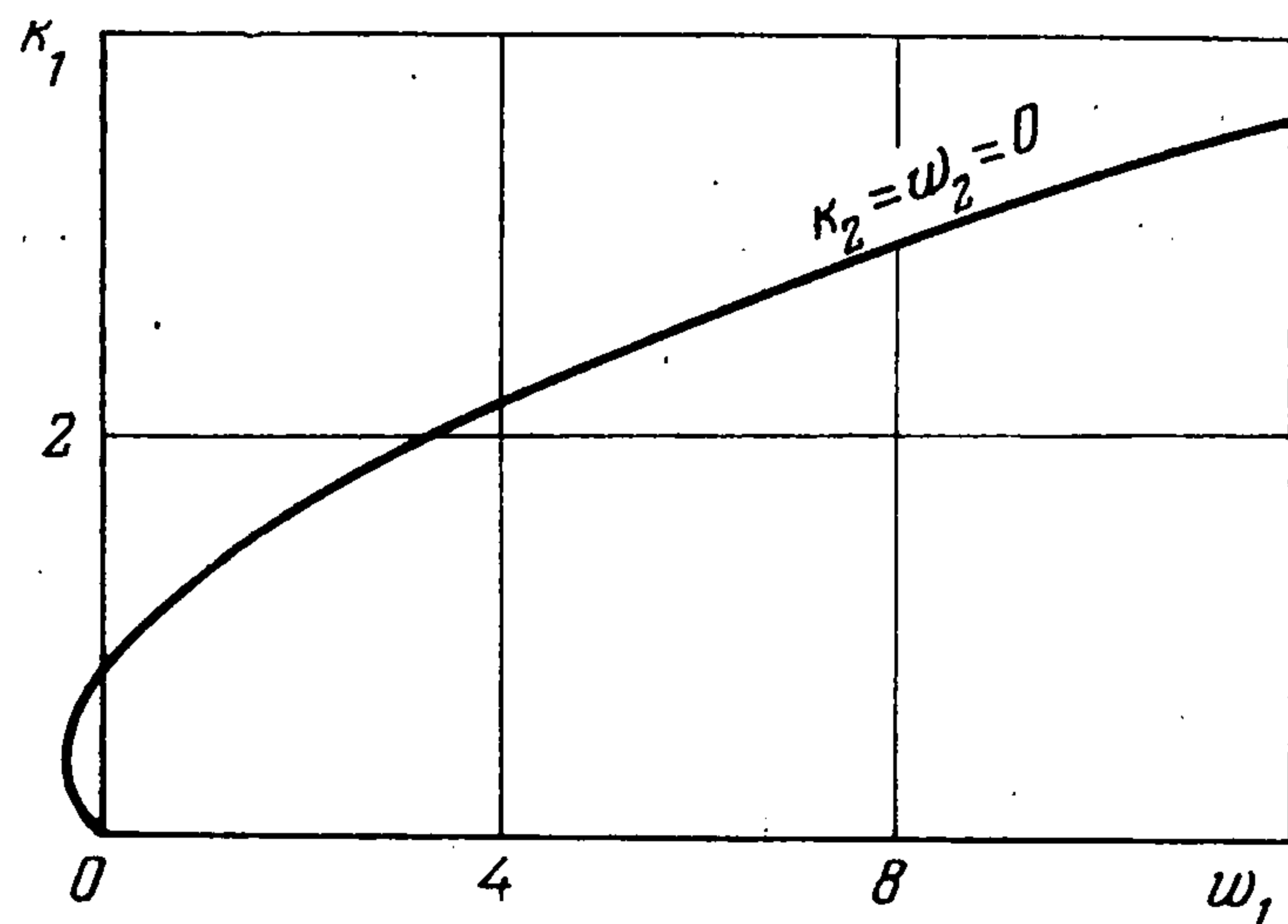
Кривые с $\omega_1 > 0$ дают колебания с возрастающей амплитудой. Это свойство линейного решения. Чтобы избежать экспоненциального увеличения амплитуды при $t \rightarrow \infty$ (и при $x \rightarrow \infty$), необходимо проинтегрировать систему уравнений (2.8), не прибегая к ее линеаризации.

Кроме описанной, была составлена также программа для вычисления зависимости $\omega(k)$. Полученные по этой программе результаты иллюстрируются на фиг. 2 (ω_1 — сплошные линии, ω_2 — штриховые линии). За независимую переменную принята величина k_2 , значения параметра k_1 указаны цифрами у соответствующих им кривых. При возрастании k_2 при $k_1 = \text{const}$ величина ω_1 довольно быстро падает до нуля. Отсюда находится диапазон, ограничивающий интервал изменения независимой переменной при построении функций $\omega_2(k_2)$. Что касается значений $\omega_1 < 0$, то они здесь не рассматриваются, так как относятся к затухающим во времени колебаниям.

В заключение остановимся на связи построенных решений с нелинейной теорией устойчивости вязкого потока. До сих пор изучаемые явления полагались возникающими при свободном взаимодействии нестационарного пограничного слоя с внешним потенциальным течением. Однако сам факт введения времени в качестве одного из аргументов в зависимости, представляющие параметры свободного взаимодействия, позволяет трактовать их с иной точки зрения. Действительно, в одном частном случае

постановка задачи на устойчивость пограничного слоя может быть сформулирована в тех же терминах, что и задача о развитии в нем возмущений, приводящих к образованию самоиндуцированного градиента давления.

В нелинейной теории устойчивости вязких течений, результаты которой изложены в недавних обзорах [12,13], большую роль играет понятие критического слоя. Его положение, т. е. расстояние от стенки, определяется условием, что фазовая скорость распространения возмущений близка к скорости основного потока, задаваемого функцией $U_0(y_2)$. Глубокий анализ структуры критического слоя содержится в работах [14,15]. Этот анализ основан на существенно нелинейных уравнениях, однако вязкие напряжения в нем учитываются только при выяснении некоторых деталей поля скоростей.



Фиг. 3

Критический слой возникает, когда амплитуда возмущений достигает пороговой величины, ниже которой справедлива линейная теория устойчивости.

Предположим теперь, что скорость распространения волны близка к нулю. Тогда критический слой опускается на самое дно течения и сливается с пристеночной областью III. Поскольку возмущения в нем сравнительно велики, они должны привести к индуцированию собственного [градиента давления. Последний будет автоматически подстраи-

ваться под структуру поля скоростей с изменяющейся во времени шириной струек. Таким образом, задача устойчивости формулируется совершенно аналогично задаче о свободном взаимодействии нестационарного пограничного слоя.

В связи с таким подходом рассмотрим решение (3.1) с $\omega_2 = k_2 = 0$. Несмотря на задание пары чисел из четырех, образующих показатели степеней ω и k , существует целый набор значений k_1 , который дает зависимость $k_1(\omega_1)$. Это сразу ясно из поведения штриховых кривых на фиг. 1. При $\omega_2 = k_2 = 0$ решение (3.1) можно трактовать как бегущую волну, причем именно такого рода возмущения прежде всего изучаются в теории критического слоя [12-15]. Формула (3.7), согласно которой вводится функция $f(y)$, содержит тогда интегралы от действительных величин. Будем считать, что бегущая волна порождается в момент $t = 0$ отклонениями в газовых параметрах, распределенных по закону

$$(3.11) \quad u_{z1} = y - ae^{k_1 x} \frac{df}{dy}, \quad v_{z1} = ake^{k_1 x} f(y), \quad p_{z1} = ae^{k_1 x}$$

Характер возмущенного движения при $t > 0$ зависит от числа k_1 . Соответствующие ему значения показателя ω_1 находятся при помощи кривой, изображенной на фиг. 3. При $k_1 = k_1^* = [3^{1/2} \Gamma(2/3)/2\pi]^{3/2}$ имеем $\omega_1 = 0$. Начальные данные (3.11) представляют точное стационарное решение линейной задачи, указанное в работе [4]. Такая волна остается неподвижной для всех моментов времени.

При $k_1 > k_1^*$ показатель степени $\omega_1 > 0$. В этом случае волна бежит против направления основного течения в исходном пограничном слое. Распространение возмущений вверх по потоку находится в полном согласии с основными идеями теории свободного взаимодействия, но до сих пор не рассматривалось в задачах об устойчивости движений вязкой жидкости. Происхождение этого явления объясняется тем, что в начальный момент времени градиент давления выбран достаточно большим.

Пусть, наконец, $k_1 < k_1^*$, тогда $\omega_1 < 0$. Получается волна, которая перемещается вниз по потоку, как это обычно считается в нелинейной теории устойчивости вязких течений. Таким образом, фактическое направление распространения волны задается величиной градиента давления в начальных данных. Сравнительно слабое нарастание

избыточного давления вдоль оси x при $t = 0$ не в состоянии обеспечить проникновение возмущений вверх по потоку, наоборот, основное течение в исходном пограничном слое сносит их вниз. При $k_1 \rightarrow 0$ также и $\omega_1 \rightarrow 0$, причем формулы (3.1) превращаются в тривиальное решение $u_{31} = y$, $v_{31} = 0$, $p_{31} = 0$ для пограничного слоя Блазиуса. Изображенная на фиг. 3 кривая связывает обе точки $\omega_1 = 0$, $k_1 = k_1^*$ и $\omega_1 = 0$, $k_1 = 0$, определяющие бифуркацию линейного решения в случае, когда течение газа стационарно. Для второй из названных точек скорость волны, бегущей вниз по потоку, оказывается бесконечной.

Поступила 10 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ackeret J., Feldmann F., Rott N.* Investigations of compression shocks and boundary layers in gases moving at high speed. Mitt. Inst. Aerodyn. Zürich, 1946, Nr. 10.
2. *Liepmann H. W.* The interaction between boundary layer and shock waves in transonic flow. J. Aeronaut. Sci., 1946, vol. 13, No. 12.
3. *Chapman D. R., Kuehn D., Larson H. K.* Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NACA Rept, 1958, No. 1356.
4. *Lighthill M. J.* On boundary layers and upstream influence. II. Supersonic flows without separation. Proc. Roy. Soc. A, 1953, vol. 217, No. 1131.
5. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
6. *Нейланд В. Я.* К асимптотической теории расчета тепловых потоков около угловой точки тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
7. *Stewartson K.* On the flow near the trailing edge of a flat plate. II. Mathematika, 1969, vol. 16, No. 31.
8. *Stewartson K., Williams P. G.* Self-induced separation. Proc. Roy. Soc. A, 1969, vol. 312, No. 1509.
9. *Messiter A. F.* Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate. SIAM J. Appl. Math., 1970, vol. 18, No. 1.
10. *Stewartson K.* The theory of laminar boundary layers in compressible fluids. Oxford, Clarendon Press, 1964.
11. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions, vol. 2. New York — Toronto — London, Mc Graw-Hill, 1953.
12. *Stuart J. T.* Non-linear stability theory. In: Annual Rev. Fluid Mech., vol. 3, Palo Alto, California, Annual Revs. Inc., 1971.
13. *Жигулев В. Н., Куркинский А. И., Сидоренко Н. В., Тумин А. М.* О механизме вторичной неустойчивости и его роли в процессе возникновения турбулентности. В сб.: Аэромеханика. М., «Наука», 1976.
14. *Benney D. J., Bergeron R. F.* A new class of nonlinear waves in parallel flows. Stud. Appl. Math., 1969, vol. 48, No. 3.
15. *Davis R. E.* On the high Reynolds number over a wavy boundary. J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, No. 2.