

УДК 539.3

О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРАНСТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

А. С. Космодамианский, И. Х. Милишенский, В. А. Шалдырван

(Донецк)

Исследуется влияние анизотропии материала на концентрацию напряжений вблизи полости, ослабляющей толстую пластину, на основе метода, предложенного в [1]. Приводятся результаты численных расчетов в случае осесимметричной деформации пластин из кадмия и цинка.

Концентрация напряжений в изотропной пластине с полостью, загруженной неравномерно вдоль образующей, впервые исследована в [2]. Для транстропных пластин в аналогичной постановке (для малых относительных толщин) асимптотическим методом задача рассмотрена в [3].

1. Рассматривается задача растяжения — сжатия транстропной пластины при следующих граничных условиях:

$$(1.1) \quad \sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\eta\xi} = \sigma_{\zeta\xi} = 0, \quad \xi = \pm 1$$

$$(1.2) \quad \sigma_{rr}|_{\Omega} = Pg(\zeta), \quad \sigma_{r\zeta}|_{\Omega} = 0, \quad \sigma_{r\theta} \equiv 0, \quad g(\zeta) = g(-\zeta)$$

$$\xi = x_1/R, \quad \zeta = x_3/(\lambda R), \quad \lambda = h/R$$

Здесь R и $2h$ — размерные радиус полости и толщина пластины.

Решение задачи, удовлетворяющее системе Ляме и граничным условиям (1.1), строится в виде ряда по однородным решениям Лурье — Лехницкого. Используя обозначения [1], в рассматриваемом случае имеем

$$(1.3) \quad u(r, \zeta) = -\frac{a}{r} + \sum_p n_p(\zeta) P_0^-(\gamma_p^* r) \alpha_p K_0(\gamma_p^* r)$$

$$w(r, \zeta) = \sum_p q_p(\zeta) \alpha_p K_0(\gamma_p^* r)$$

Здесь $(u, 0, w)$ — компоненты вектора перемещений; σ_{ij} — составляющие тензора напряжений; a, α_p — подлежащие определению произвольные постоянные; суммирование распространено на все целые p , кроме нуля; остальные обозначения совпадают с принятыми в [1].

Предположим, что материал пластины таков, что упругие параметры его ν, ν_2, ν_3, s_0^2 удовлетворяют условиям

$$b_1 > 0, \quad b_1^2 < b_2, \quad b_1 = \frac{s_0^2 - \nu_2}{1 - \nu}, \quad b_2 = \frac{\nu_2}{\nu_3} \frac{1 - \nu_2 \nu_3}{1 - \nu^2}$$

Тогда величины $\gamma_p = \lambda \gamma_p^*$ — корни трансцендентного уравнения [1]

$$(1.4) \quad \beta \sin 2\alpha\gamma + \alpha \operatorname{sh} 2\beta\gamma = 0$$

В данной задаче, как можно проверить непосредственно, достаточно рассматривать лишь корни, находящиеся в полуплоскости $\operatorname{Re} \gamma > 0$.

Остались невыполненными условия (1.2), которым с учетом (1.3) можно придать следующий вид:

$$(1.5) \quad X_0 + 2\operatorname{Re} \sum_p [l_p(\zeta) - n_p(\zeta) P_0^-(\gamma_p^*)] X_p - Pg(\zeta) = 0$$

$$2\operatorname{Re} \sum_p r_p(\zeta) P_0^-(\gamma_p^*) X_p = 0$$

В приведенных формулах суммирование осуществляется по γ_p из первого квадранта, т. е. знак $\operatorname{Re} \Sigma$ распространяется на все целые положительные p ; величины X_0, X_p связаны с основными неизвестными a, α_p соотношениями

$$X_0 = a, \quad X_p = \alpha_p K_0(\gamma_p^*)$$

Требую, чтобы невязки граничных условий (1.5) были ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ к полной системе функций $\{\sin \delta_m s_0 \zeta, \cos \delta_m s_0 \zeta\}$, после некоторых формальных вычислений приходим к бесконечной системе уравнений

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_p [l_{mp} - n_{mp} P_0^-(\gamma_p^*)] X_p &= P g_m \\ \operatorname{Re} \sum_p r_{mp} P_0^-(\gamma_p^*) X_p &= 0, \quad m = 1, 2, \dots \\ X_0 &= P g_0 - \operatorname{Re} \sum_p [l_{0p} - n_{0p} P_0^-(\gamma_p^*)] X_p \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} l_{mp} &= \gamma_p^* [(A_{11} \gamma_p^* + s_1 S_{1p} A_{13}) b_{mp1} \cos \gamma_p s_2 \sin \gamma_p s_1 - \\ &\quad - s_3 (A_{11} \gamma_p^* + s_2 S_{2p} A_{13}) b_{mp2} \cos \gamma_p s_1 \sin \gamma_p s_2] \\ n_{mp} &= b_{mp1} \cos \gamma_p s_2 \sin \gamma_p s_1 - s_3 b_{mp2} \cos \gamma_p s_1 \sin \gamma_p s_2 \\ r_{mp} &= \frac{1}{2s_0^2} [(S_{1p} - \gamma_p^* s_1) c_{mp1} \cos \gamma_p s_2 \sin \gamma_p s_1 - \\ &\quad - s_3 (S_{2p} - s_2 \gamma_p^*) c_{mp2} \cos \gamma_p s_1 \sin \gamma_p s_2] \\ g_m &= \int_{-1}^1 g(\zeta) \cos \delta_m s_0 \zeta d\zeta \\ b_{mpj} &= \frac{1}{\gamma_p s_j - \delta_m s_0} + \frac{1}{\gamma_p s_j + \delta_m s_0}, \quad c_{mpj} = \frac{1}{\gamma_p s_j - \delta_m s_0} - \frac{1}{\gamma_p s_j + \delta_m s_0} \end{aligned}$$

Предельный переход $v_z \rightarrow v$, $E_z \rightarrow E$ дает решение задачи растяжения — сжатия толстой изотропной пластины с полостью, которая, как указывалось, исследовалась в [2].

2. Расчеты проводили для пластин, изготовленных из кадмия и цинка. Упругие постоянные для этих материалов [4]: $\nu = 0.054$, $\nu_z = 0.261$, $\nu_2 = 0.939$, $s_0^2 = 2.03$ и $\nu = -0.212$, $\nu_z = 0.272$, $\nu_2 = 1.179$, $s_0^2 = 1.813$ соответственно.

Загружение боковой поверхности Ω брали в виде $g(\zeta) = \zeta^{2q}$ ($q = 0, 1, \dots$). Необходимые для численной реализации корни характеристического уравнения (1.4) разыскивали методом Ньютона. При этом в качестве начальных брали значения, получаемые по асимптотическим формулам. Последние, используя результаты [5], можно записать в следующем виде:

$$\gamma_p = \frac{1}{2} \frac{\beta - i\alpha}{\beta^2 + \alpha^2} \left(\ln \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\pi}{2} i + 2ip\pi \right)$$

В таблице приведены первые десять корней для указанных материалов (первые два столбца — кадмий, $\alpha = 1.184$, $\beta = 0.498$, последние два — цинк, $\alpha = 1.067$, $\beta = 0.785$).

Кольцевые напряжения вычисляются по формуле

$$(2.1) \quad \frac{1}{P} \sigma_{\theta\theta} = -\frac{a}{r^2} + 2 \operatorname{Re} \sum_p \left[s_p(\zeta) + \frac{1}{r} n_p(\zeta) P_0^-(\gamma_p^* r) \right] \alpha_p K_0(\gamma_p^* r)$$

На фигурах приведены значения кольцевых напряжений $\sigma = (\sigma_{\theta\theta} / P)_{\Omega}$, вычисленных по формуле (2.1) вблизи боковой поверхности.

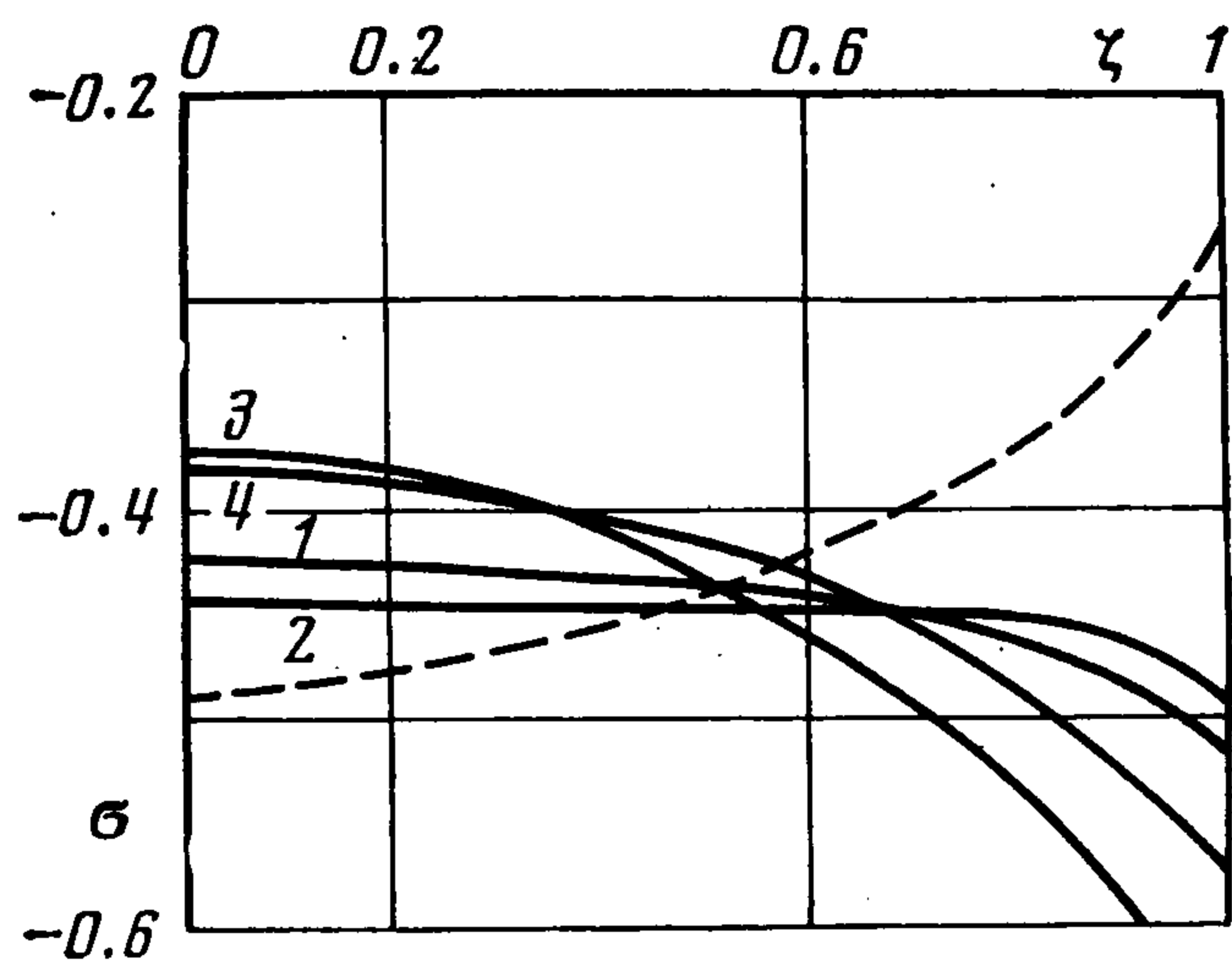
p	$\operatorname{Re} \gamma_p$	$\operatorname{Im} \gamma_p$	$\operatorname{Re} \gamma_p$	$\operatorname{Im} \gamma_p$	p	$\operatorname{Re} \gamma_p$	$\operatorname{Im} \gamma_p$	$\operatorname{Re} \gamma_p$	$\operatorname{Im} \gamma_p$
1	1.539	1.024	1.363	1.155	6	12.830	5.763	10.917	8.171
2	3.814	1.970	3.274	2.552	7	15.084	6.712	12.828	9.576
3	6.068	2.918	5.185	3.956	8	17.338	7.660	14.739	10.981
4	8.322	3.867	7.096	5.361	9	19.592	8.609	16.650	12.386
5	10.576	4.815	9.007	6.766	10	21.846	9.557	18.560	13.791

На фиг. 1 представлен случай нагрузки $g(\zeta) = \zeta^2$ и $\lambda = 0.5$. Штриховая линия относится к изотропному материалу; 1 — к кадмию; 2 — к кадмию с упругими постоянными $\nu = 0.07$, $\nu_z = 0.26$, $\nu_2 = 0.92$, $s_0^2 = 1.93 / 1.85$, используемыми в [3]; 3 — к цинку; 4 — к цинку, упругие постоянные которого $\nu = -0.058$, $\nu_z = 0.257$, $\nu_2 = 0.869$, $s_0^2 = 1.655$ заимствованы из [6].

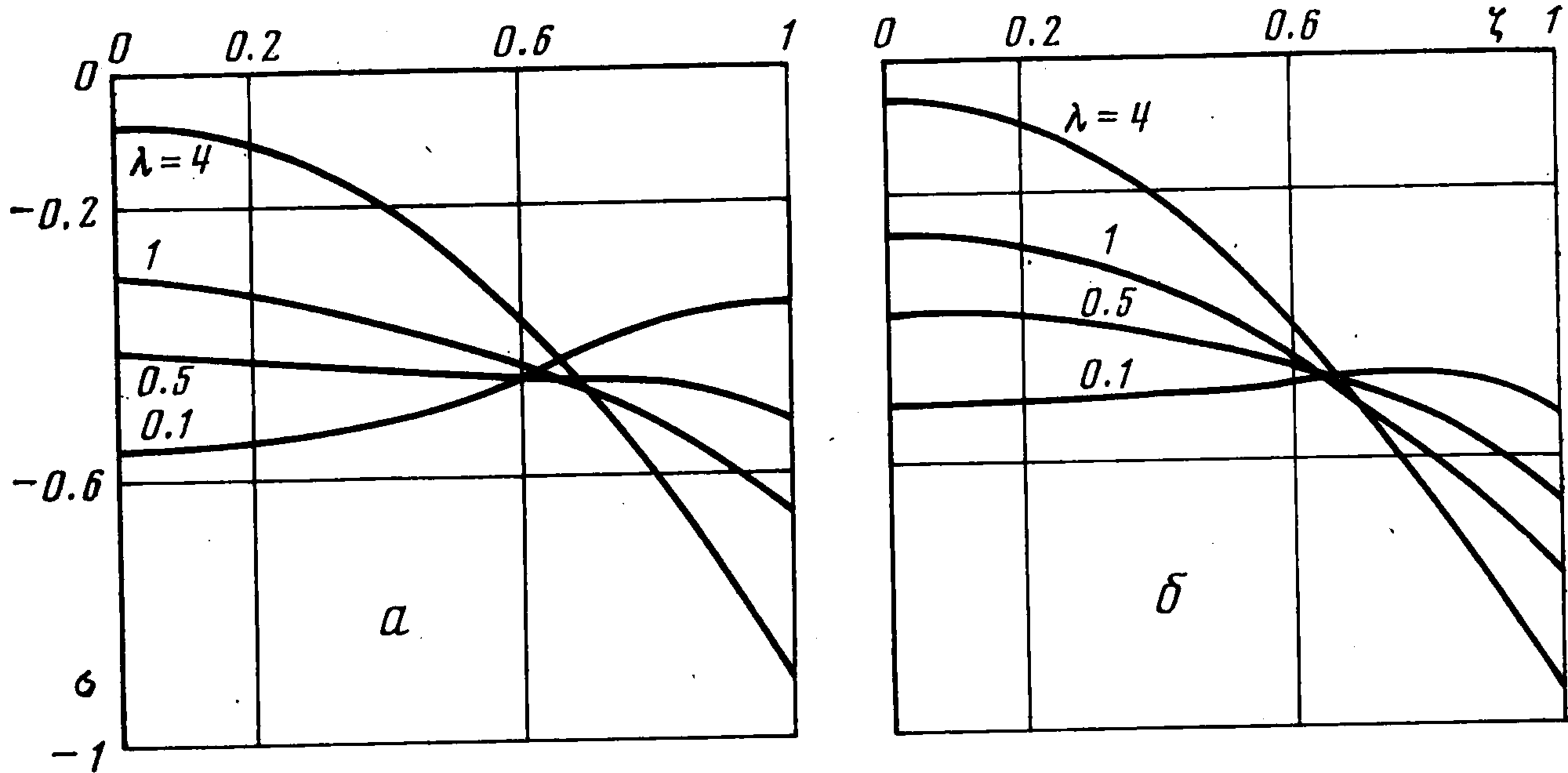
На фиг. 2 приведены эпюры тех же напряжений для нагрузки $g(\zeta) = \zeta^2$ при разных относительных толщинах в пластине из кадмия (а) и цинка (б).

На фиг. 3 приведены значения кольцевых напряжений при разных нагрузках (сплошные линии соответствуют относительной толщине $\lambda = 4$, штриховые — $\lambda = 0.5$) для кадмия (а) и цинка (б).

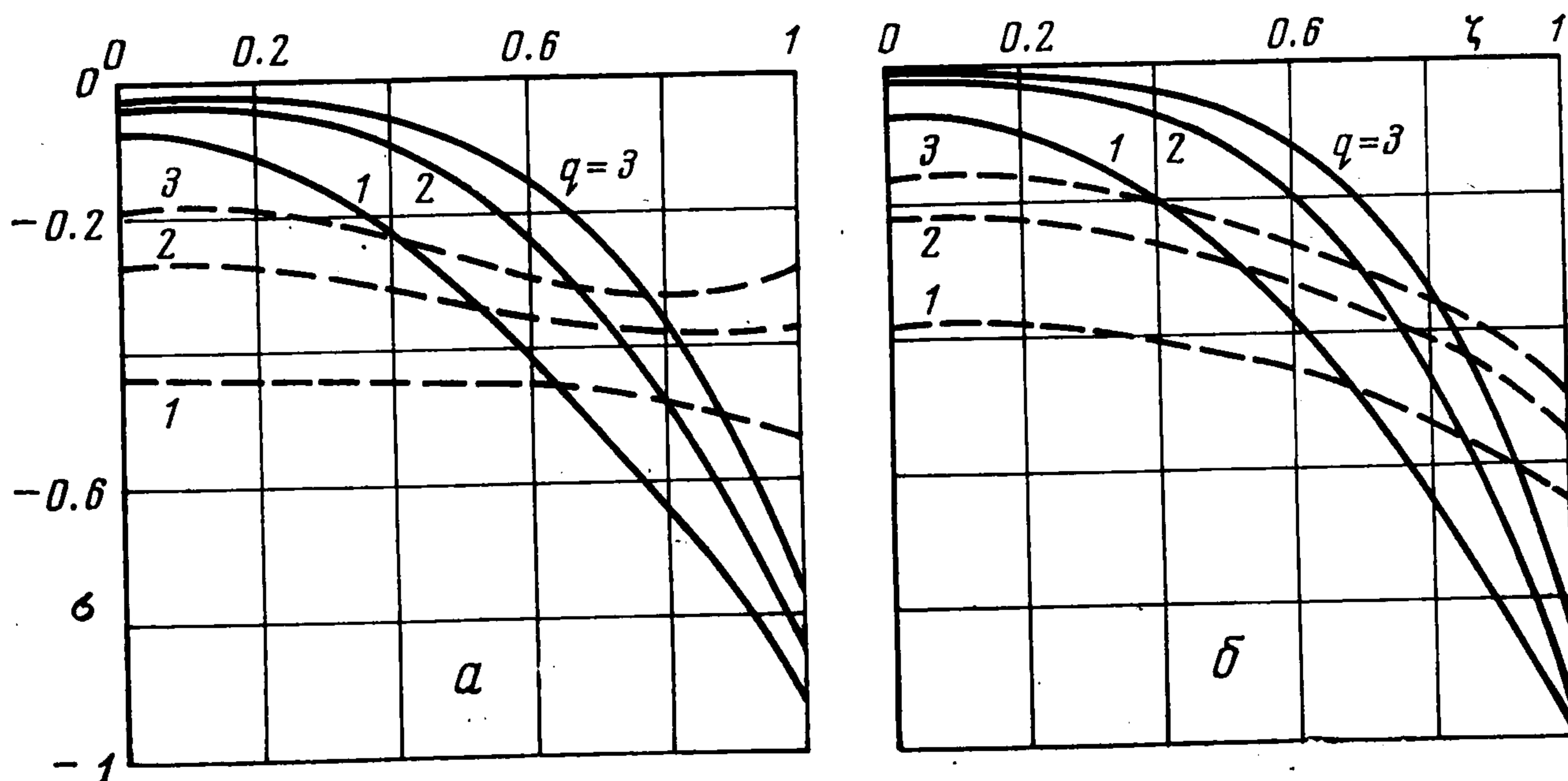
Данные фиг. 2 и 3 показывают, что распределение напряжений по толщине очень неравномерно, поэтому выводы о погрешности прикладной теории аналогичны сделанным в [2] для изотропных пластин.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

По найденным значениям коэффициентов a и α_p была проведена проверка удовлетворяемости граничных условий на боковой поверхности. Отклонение полученных значений σ_{rr} от заданных не превышает величин порядка 10^{-3} , а напряжения σ_{rz} на границе имеют порядок 10^{-4} — 10^{-3} .

Поступила 26 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Определение напряженно-деформированного состояния многосвязных транслопных пластин. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
2. Ворович И. И., Малкина О. С. О точности асимптотических разложений задачи теории упругости для толстой плиты. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
3. Роменская Г. И., Шленев М. А. Асимптотический метод решения трехмерной задачи о трансверсально изотропной плите. В сб.: Теория оболочек и пластин. Л., «Судостроение», 1975.
4. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
5. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций. Матем. сб., 1968, т. 75, № 4.
6. Huntington H. B. The elastic constants of crystals. In: Solid state Physics, vol. 7. New York, Acad. Press, 1958, p. 213—354.

Технический редактор Э. В. Филиппова

Сдано в набор 25/VII-1977 г. Т-10800 Подписано к печати 21.IX-1977 г. /Тираж 2875 экз.
Зак. 2644 Формат бумаги 70×108^{1/16} Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6,0 Уч.-изд. л. 14,9

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10