

При $p < p_*$ ударная адиабата b на фиг. 2 проходит правее ударной адиабаты c , а в силу (3) $p_r < p_*$, поэтому при лобовом столкновении ударных волн результирующая плотность будет больше с той стороны контактного разрыва (фиг. 3), откуда набегают менее интенсивная из сталкивающихся волн. Соотношения между результирующими температурами, очевидно, будут обратными.

Из сказанного, в частности, следует, что если на тело, движущееся со сверхзвуковой скоростью, падает ударная волна, то после первого отражения от поверхности тела она вторично отразится от нее, если интенсивность падающей волны меньше интенсивности головного скачка уплотнения. Последнее объясняется тем, что в силу сказанного при этом $\rho_4 > \rho_3$ (фиг. 3).

Вопрос о вторичных отражениях ранее обсуждался в работе [1].

Автор благодарит Е. И. Рузавина, С. К. Шимарева и Э. Г. Шифрина за обсуждение полученных результатов и интерес к работе.

Поступила 4 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Г. М. К расчету давления в критической точке при падении ударной волны на тело, движущееся со сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.

УДК 534.2 : 532

ДИФРАКЦИЯ НА КЛИНЕ С КРУГОВОЙ НАСАДКОЙ

А. П. Киселев

(Ленинград)

Методом Фурье построено решение задачи дифракции акустических волн на клине с круговой насадкой, центр которой находится в вершине клина. Из точного решения получены асимптотики волнового поля при разных соотношениях между радиусом насадки и длиной волны. Обсуждается связь асимптотики по расстоянию с длинными и коротковолновыми асимптотиками.

Рассматривается двумерная задача дифракции от точечного источника (в точке $M_0 = (r_0, \varphi_0)$) на системе из угла $0 < \varphi < 2\pi - \Phi$; $0 < \Phi \leq 2\pi$ и круга $r = a$ (см. фиг. 1). Исследуется функция u , такая, что

$$(1) \quad (\Delta + k^2) u = \delta(M - M_0), \quad r > a, \quad 0 < \varphi < \Phi$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = 0 \quad (r^{-1/2}), \quad r \rightarrow \infty$$

$$(2) \quad u|_S = 0, \quad S = S_0 \cup S_\Phi \cup S_a$$

$$S_0 = \{r > a, \varphi = 0\}, \quad S_\Phi = \{r > a, \varphi = \Phi\}, \quad S_a = \{r = a, 0 < \varphi < \Phi\}$$

и $|\text{grad } u|^2$ локально суммируем.

Единственное решение этой задачи строится разделением переменных

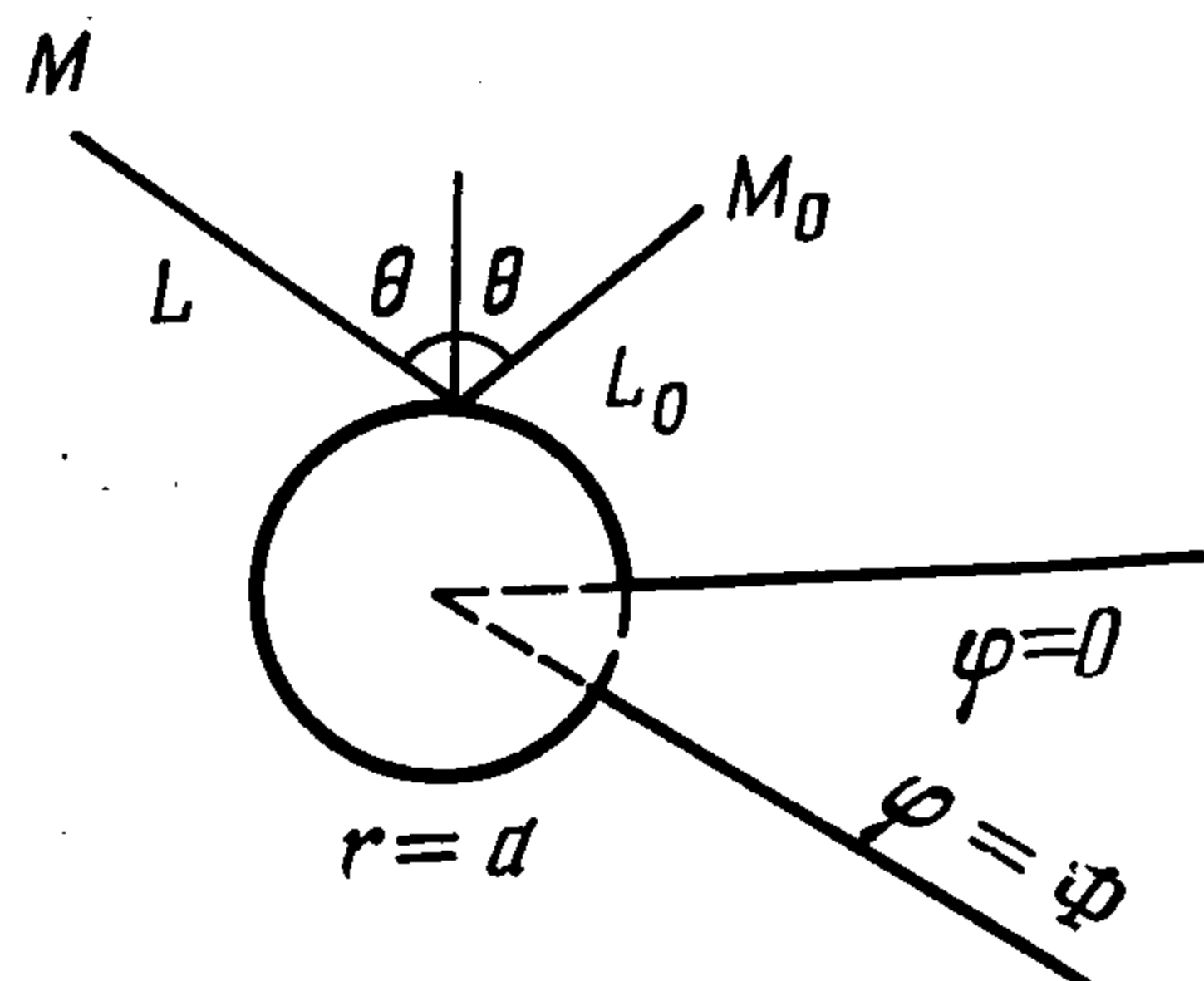
$$(3) \quad u = i\zeta \sum_{m=1}^{\infty} \left[J_{m\zeta}(\rho_*) - \frac{J_{m\zeta}(\alpha)}{H_{m\zeta}^{(1)}(\alpha)} H_{m\zeta}^{(1)}(\rho_*) \right] H_{m\zeta}^{(1)}(\rho_{**}) \sin m\zeta\varphi \sin m\zeta\varphi_0$$

$$\alpha = ka, \quad \rho_{**} = \max(\rho, \rho_0), \quad \rho_* = \min(\rho, \rho_0), \quad \rho = kr, \quad \rho_0 = kr_0, \quad \zeta = \frac{\pi}{\Phi}$$

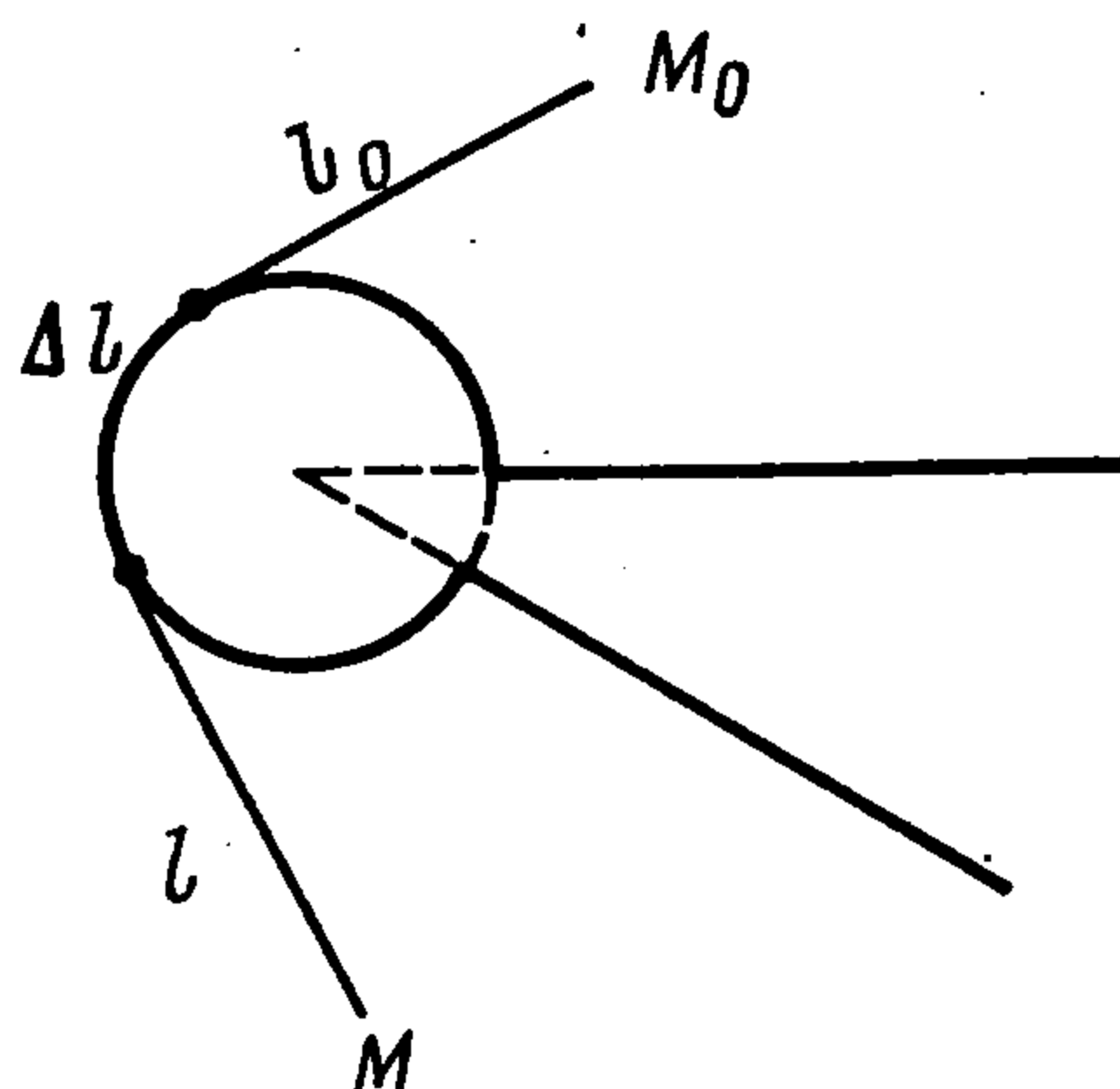
$J, H^{(1)}$ — соответственно функции Бесселя и Ганкеля первого рода.

Будем исследовать асимптотику функции u при $\rho_* \rightarrow \infty$ (и, следовательно, $\rho_{**} \rightarrow \infty$) и различных α .

1°. Начнем со случая $\alpha \rightarrow \infty$, когда радиус насадки значительно превосходит длину волны. Предположим сначала, что $\rho_{**} = O(\alpha)$. Решение исследуется обычными приемами анализа коротковолновых асимптотик¹. Функция (3) преобразуется в контурный интеграл, асимптотика которого существенно зависит от взаимного рас-



Фиг. 1



Фиг. 2

положения источника M_0 и наблюдателя. Опуская длинные, но стандартные вычисления, приведем результаты для двух характерных случаев.

А. В области, где имеется только одна волна, отраженная от насадки (см. фиг. 1)

$$(4) \quad u = k^{-1/2} \left(L + L_0 + \frac{2LL_0}{a \cos \theta} \right)^{-1/2} \exp [ik(L + L_0)] \left(1 + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right)$$

(L_0 и L — звенья отраженного луча, θ — угол отражения). При условии $\alpha^2 / \rho_* \rightarrow 0$ выражение (4) соответствует цилиндрической волне, расходящейся от вершины угла

$$(5) \quad u = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2} \cos^{1/2} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \frac{\exp [i(\rho + \rho_0)]}{(\rho\rho_0)^{1/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right) \left(1 + O\left(\frac{\alpha^2}{\rho_*}\right) \right)$$

Б. Если точка M находится в зоне геометрической тени (фиг. 2), то

$$(6) \quad u = A\alpha^{-2/3} \frac{a}{(ll_0)^{1/2}} \exp \left[iB\alpha^{1/3} \frac{\Delta l}{a} \right] \times \exp [ik(l + l_0 + \Delta l)] (1 + O(\alpha^{-2/3}))$$

Здесь

$$A = 2^{-1/3} (w_1'(t_1))^{-2}, \quad B = 2^{-1/3} t_1$$

w_1 — функция Эйри — Фока, t_1 — ближайший к вещественной оси корень ее; l и l_0 — длины касательных, проведенных из M и M_0 к кругу $r = a$, Δl — дуга проскальзывания волны. При получении формулы (6) можно заметить, что в ней допустимо устремление ρ_* / α^2 к бесконечности. Поле в зоне тени также приобретает характер цилиндрической волны

$$(7) \quad u = A\alpha^{1/3} \exp \left[i \left(B\alpha^{1/3} + \alpha |\varphi - \varphi_0| \right) \right] \frac{\exp [i(\rho + \rho_0)]}{(\rho\rho_0)^{1/2}} (1 + O(\alpha^{-2/3})) \times \\ \times (1 + O(\alpha^2/\rho_*))$$

однако амплитуда и диаграмма направленности ее совершенно иные, чем в освещенной области.

Выражения (5) и (7) не подходят на известную (см., например, [1]) краевую волну от вершины угла без насадки и при формальном устремлении α к нулю стремятся к нулю. Формулы геометрической теории дифракции (4), (6), полученные для $\alpha \rightarrow \infty$, не допускают предельного перехода к малым α .

При других взаимных расположениях M и M_0 результат оказывается аналогичным.

¹ Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Некоторые математические методы, применяемые в теории дифракции. 1 Всес. школа-семинар по дифракции и распространению волн. (Паланга, 1965). Москва—Харьков, 1968.

2°. Пусть $\alpha = O(1)$, т. е. радиус насадки сравним с длиной волны. Теперь, в отличие от предыдущего случая, целесообразно считать насадку возмущением и разбивать решение на сумму

$$(8) \quad u = V + W$$

функции Грина W внешности угла $0 < \varphi < 2\pi - \Phi$ с граничным условием Дирихле $W|_{\varphi=0} = W|_{\varphi=\Phi} = 0$ и добавки V , обусловленной насадкой

$$(9) \quad V = i\zeta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{m\zeta}(\alpha)}{H_{m\zeta}^{(1)}(\alpha)} H_{m\zeta}^{(1)}(\rho) H_{m\zeta}^{(1)}(\rho_0) \sin m\zeta\varphi \sin m\zeta\varphi_0$$

Функция W хорошо изучена (см., например, [1]). Будем рассматривать только зависящую от α добавку V .

Значения $J_{m\zeta}(\alpha)$ экспоненциально убывают, $H_{m\zeta}^{(1)}(\alpha)$ растут при увеличении m , когда $m\zeta > \alpha$. Поэтому для ограниченных α заметный вклад в сумму (9) вносит лишь небольшое, порядка $O(\alpha)$, число слагаемых. Для каждого из них аргументы ρ и ρ_0 стоящих в числителе функций Ганкеля велики по сравнению с индексом. Используя асимптотику

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = 2^{1/2} (\pi z)^{-1/2} \exp \left[i \left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left(1 + O \left(\frac{\nu^2}{z} \right) \right), \quad \frac{\nu^2}{z} \rightarrow 0$$

а затем добавляя экспоненциально малые слагаемые, получаем

$$(10) \quad V \sim \frac{2}{\Phi} \frac{\exp [i(\rho + \rho_0)]}{(\rho\rho_0)^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{m\zeta}(\alpha)}{H_{m\zeta}^{(1)}(\alpha)} \exp(-im\zeta) \sin m\zeta\varphi \sin m\zeta\varphi_0$$

Поправка на насадку соответствует в дальней зоне цилиндрической волне того же порядка по ρ и ρ_0 , что и краевая волна от вершины угла, но с другой, сложно зависящей от α диаграммой.

При уменьшении α все меньшее число членов ряда (9) (равно как и его асимптотики по ρ_* (10)) играет заметную роль.

3°. В длинноволновом случае $\alpha \rightarrow 0$ (длина волны заметно превосходит радиус насадки) ряды (9) и (10) асимптотические по α и

$$(11) \quad \begin{aligned} V &\sim \frac{\pi^2}{\Gamma^2(\zeta)} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2\zeta} H_{\zeta}^{(1)}(\rho) H_{\zeta}^{(1)}(\rho_0) \sin \zeta\varphi \sin \zeta\varphi_0 (1 + O(\alpha^{2\zeta})) = \\ &= -2 \frac{\exp(-i\zeta)}{\Gamma^2(\zeta)} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2\zeta} \frac{\exp [i(\rho + \rho_0)]}{(\rho\rho_0)^{1/2}} \times \\ &\times \sin \zeta\varphi \sin \zeta\varphi_0 (1 + O(\alpha^{2\zeta})) \left(1 + O \left(\frac{1}{\rho_*} \right) \right) \end{aligned}$$

при условии, что $\zeta \neq 1$. Для $\zeta = 1$ погрешность $1 + O(\alpha^{2\zeta})$ в формуле (11) заменяется на $1 + O(\alpha^2 / \ln \alpha)$. Вид дальнейших членов разложения функции V при $\alpha \rightarrow \infty$ зависит от того, имеется ли среди чисел $m\zeta$ хотя бы одно целое. Если да, то асимптотический ряд содержит степени и логарифмы α , в противном случае — только степени. Логарифмические члены характерны, в частности, для тех Φ , при которых краевая волна от вершины угла без насадки ($\alpha = 0$) отсутствует.

При замене граничного условия Дирихле (2) условием Неймана

$$(12) \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{S_a} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{S_{\Phi}} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{S_0}$$

поправка на влияние насадки превращается в

$$(13) \quad \begin{aligned} V^{(N)} &= i\zeta \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \frac{J_{m\zeta}(\alpha)}{H_{m\zeta}^{(1)}(\alpha)} H_{m\zeta}^{(1)}(\rho) H_{m\zeta}^{(1)}(\rho_0) \cos m\zeta\varphi \cos m\zeta\varphi_0 \\ \delta_0 &= 1; \quad \delta_m = 1/2, \quad m \neq 1 \end{aligned}$$

Очевидно, что функция (13) имеет при $\alpha \rightarrow 0$ порядок $O(1 / \ln \alpha)$. Если же на границах угла S_0 и S_Φ поставлено условие Неймана, а на насадке S_α — условие Дирихле, то $V = O(\alpha)$.

4°. Более детальный анализ вывода формулы (10) показывает, что она справедлива и при $\alpha \rightarrow \infty$, если только $\alpha^2 / \rho_* \rightarrow 0$. Содержащую теперь большой параметр α сумму в (10) нетрудно исследовать известными приемами¹.

На свету (см. фиг. 1) правая часть (10) преобразуется в контурный интеграл. Вычисляя асимптотику его методом перевала, можно получить главный член в формуле (5). Функция W имеет в этом случае меньший порядок; $W = O(\rho_*^{-1/2} V)$.

В тени разбиение (8) нецелесообразно. Для полного поля $u = V + W$ можно получить выражение, аналогичное (10), и преобразовать его в контурный интеграл. Асимптотика последнего дается вычетом и совпадает с (7).

Итак, формулы, полученные для задачи рассеяния: $\alpha = O(1)$, $\rho_* \rightarrow \infty$, имеют общую область применимости с коротковолновой и длинноволновой асимптотиками.

Отметим, что задача, сводящаяся к рассмотренной при $\Phi = 2\pi$, изучалась в работе [2]. Простые формулы были получены лишь для коротковолнового случая $\alpha \rightarrow \infty$, $\alpha \sim \rho \sim \rho_0$.

Поступила 25 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Наука», 1966.
2. Keller J. B., Magiros D. G. Diffraction by a semi-infinite screen with a rounded end. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1961, vol. 14, No. 3.

¹ См. сноску на стр. 954.