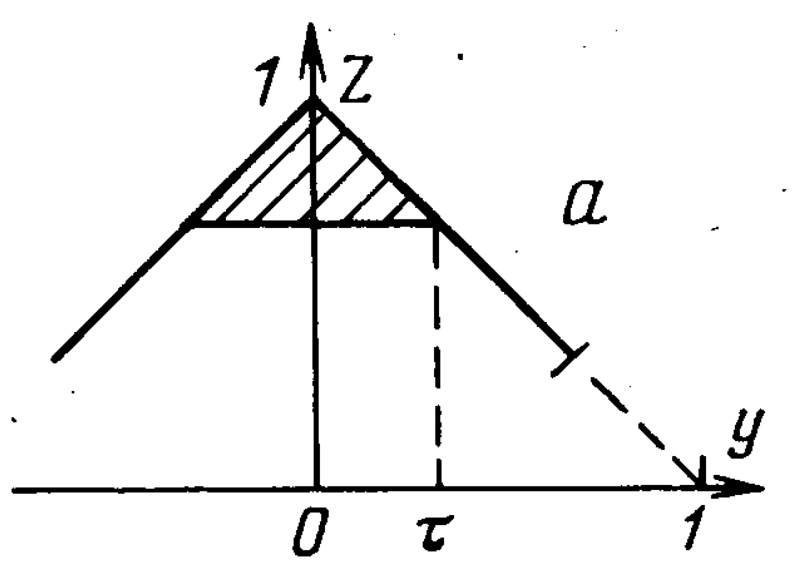
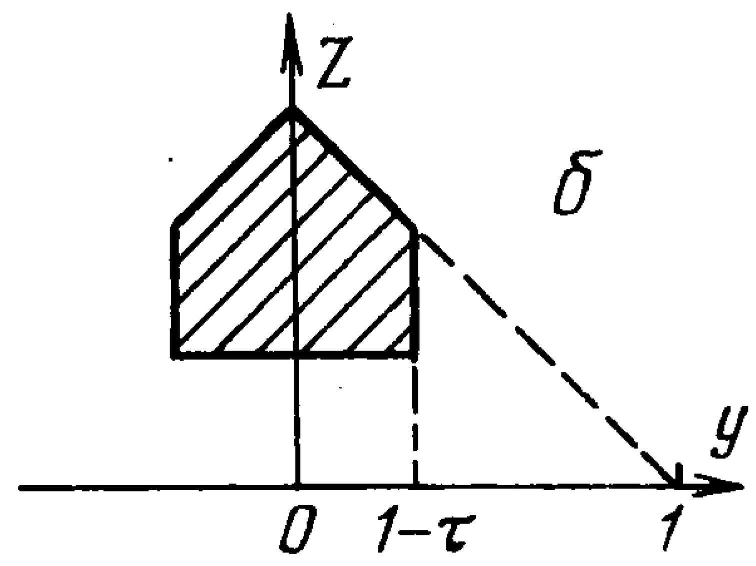




Функция $\varphi(y) = 1 - |y|$, множество $G = \{y : |y| \leqslant 1\}$. Условие (5) — условие Липшица с постоянной, равной единице, и вместе с (4) выполнено, следовательно, по доказанной теореме $T_\tau^\circ(M) = T_\tau(M)$. Последнее множество не пусто при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и имеет вид, представленный на фигуре при $0 \leqslant \tau \leqslant 1/2$ (*а*) и $1/2 \leqslant \tau \leqslant 1$ (*б*).

Поступила 1 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
4. *Гусятников П. Б.* К структуре дифференциальных игр. В сб.: Математические методы исследования и оптимизации систем, № 3. Киев, 1970.
5. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.

УДК 533.6.011

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЛОБОВОГО СТОЛКНОВЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

Г. М. Арутюнян

(Москва)

Показано, что лобовое столкновение ударных волн обладает простым свойством, которое может быть использовано в задачах нелинейного взаимодействия ударных волн и их дифракции на движущихся телах.

Пусть по невозмущенной среде навстречу одна другой распространяются две плоские ударные волны с интенсивностями p_1 и p_2 (фиг. 1). В плоскости pV ($V = 1/\rho$ — удельный объем газа) им соответствуют точки *1* и *2* на ударной адиабате (кривая *a* на фиг. 2), исходящей из точки *O*, соответствующей невозмущенному состоянию газа.

Проведем в плоскости pV из точек *1* и *2*, как из начальных, две новые ударные адиабаты (кривые *b* и *c* на фиг. 2), уравнения которых, как известно

$$\frac{V}{V_i} = \frac{(\gamma+1)p_i + (\gamma-1)p}{(\gamma-1)p_i + (\gamma+1)p}, \quad \frac{V_i}{V_0} = \frac{(\gamma+1)p_0 + (\gamma-1)p_i}{(\gamma-1)p_0 + (\gamma+1)p_i} \quad (i = 1, 2) \tag{1}$$

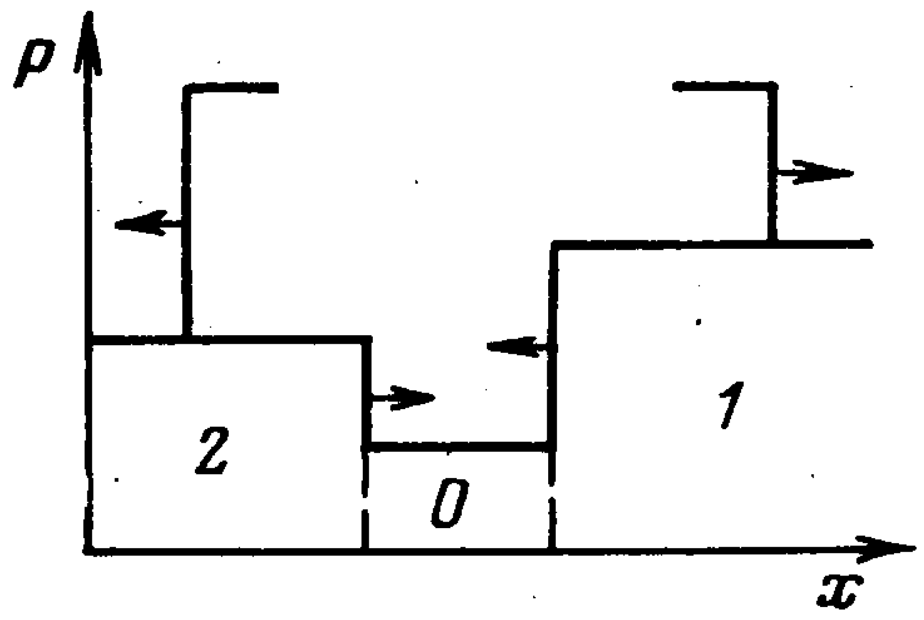
Исключив из (1) переменную V, приходим при $p_1 \neq p_2$ к квадратному уравнению для ординаты точки пересечения, решая которое относительно p, получим

$$p = p_1 p_2 / p_0 = p_*, \quad p = p_0 \tag{2}$$

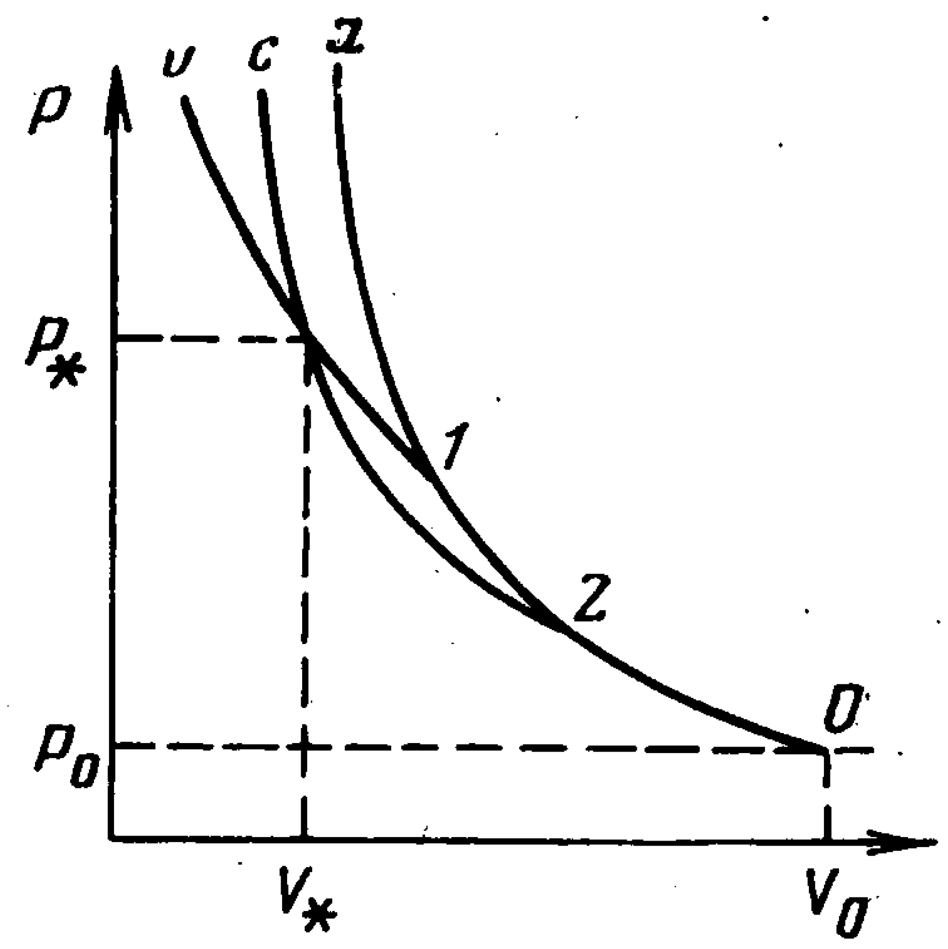
Соответствующие абсциссы определяются из (1).

Вторая из точек пересечения (p_0, V_0) не имеет физического смысла. Следовательно, если $p_1 \neq p_2$ и по ударным волнам *1* и *2* распространяются две другие ударные волны одинаковой интенсивности (фиг. 1), то плотности за последними будут равны, если их интенсивности равны p_*.

При лобовом столкновении ударных волн 1 и 2, как известно, также образуются две распространяющиеся по ним ударные волны равной интенсивности, разделенные



Фиг. 1



Фиг. 2

поверхностью контактного разрыва (фиг. 3). Покажем, что, каковы бы ни были p_1 и p_2, для результирующего при этом давления p_r справедливо соотношение

(3) $$p_r \leqslant p_1 p_2 / p_0$$

где равенство имеет место лишь при $p_1 = p_0$ или $p_2 = p_0$.

Выделим для этого в плоскости $p_1 p_2$ область D, определяемую условиями $p_1 \geqslant p_0$, $p_2 \geqslant p_0$, и рассмотрим в ней функцию ζ, которую определим следующим образом:

(4) $$\zeta(p_1, p_2) = p_r(p_1, p_2) - p_1 p_2 / p_0$$

Очевидно, что на границах области D

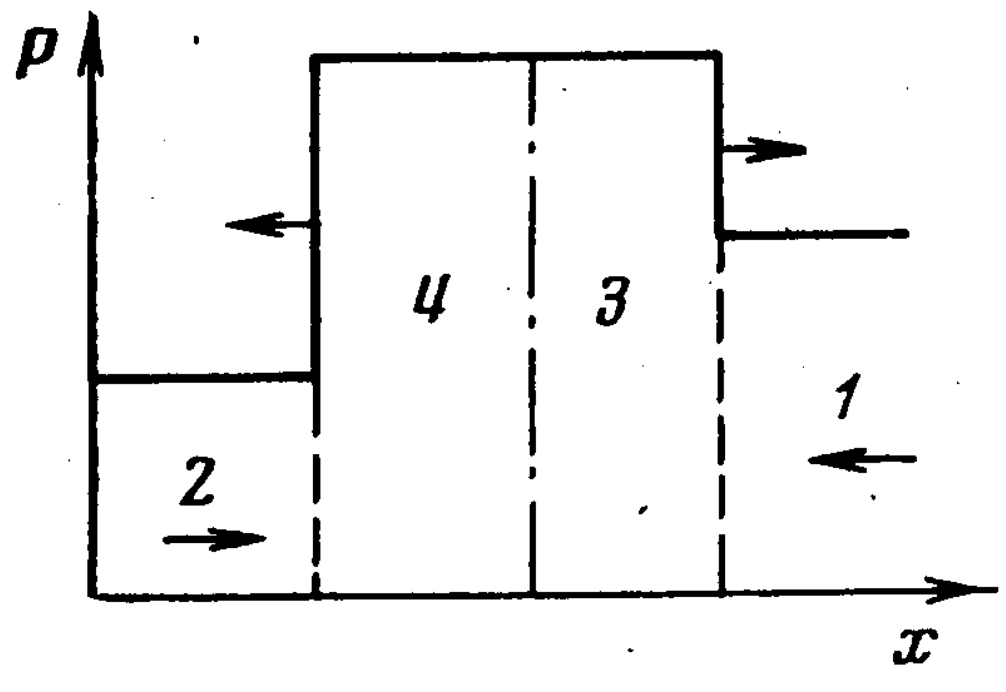
(5) $$\zeta(p_1, p_0) = \zeta(p_0, p_2) = 0$$

$$(p_r(p_1, p_0) = p_1, \ p_r(p_0, p_2) = p_2)$$

В той части D, где $p_1 > p_2 > p_0$, имеем $\zeta \neq 0$. В самом деле, если бы в какой-либо точке этой части области D было $\zeta = 0$, то из (4) следовало бы, что тогда

(6) $$p_r(p_1, p_2) = p_*$$

это, однако, невозможно, ибо при лобовом столкновении ударных волн разной интенсивности (см. фиг. 3) плотности газа по обе стороны от контактного разрыва должны различаться, чему (в силу сказанного выше) противоречило бы (6).



Фиг. 3

При помощи аналогичных рассуждений или же просто из соображений симметрии (поскольку $p_r(p_1, p_2) = p_r(p_2, p_1)$, $\zeta(p_1, p_2) = \zeta(p_2, p_1)$) заключаем, что $\zeta \neq 0$ и при $p_2 > p_1 > p_0$.

Случаю $p_2 = p_1$ соответствует лобовое столкновение ударных волн равной интенсивности, поэтому из (4) после несложных преобразований получаем

(7) $$\zeta(p_1, p_1) = -\frac{(\gamma - 1)(p_1 - p_0)^2 p_1}{[(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_0] p_0} < 0$$
$$(p_1 > p_0)$$

Итак, $\zeta \neq 0$ внутри всей области D, исключая ее границу.

Учитывая непрерывность $\zeta(p_1, p_2)$ (вытекающую из непрерывности p_r), из (7) заключаем, что $\zeta(p_1, p_2) < 0$ при $p_1 > p_0$, $p_2 > p_0$. Отсюда и из равенства (5) вытекает соотношение (3).

Рассмотрим некоторые следствия из установленного свойства (3) лобового столкновения ударных волн.

При $p < p_*$ ударная адиабата b на фиг. 2 проходит правее ударной адиабаты c, а в силу (3) $p_r < p_*$, поэтому при лобовом столкновении ударных волн результирующая плотность будет больше с той стороны контактного разрыва (фиг. 3), откуда набегает менее интенсивная из сталкивающихся волн. Соотношения между результирующими температурами, очевидно, будут обратными.

Из сказанного, в частности, следует, что если на тело, движущееся со сверхзвуковой скоростью, падает ударная волна, то после первого отражения от поверхности тела она вторично отразится от нее, если интенсивность падающей волны меньше интенсивности головного скачка уплотнения. Последнее объясняется тем, что в силу сказанного при этом $\rho_4 > \rho_3$ (фиг. 3).

Вопрос о вторичных отражениях ранее обсуждался в работе [1].

Автор благодарит Е. И. Рузавина, С. К. Шимарева и Э. Г. Шифрина за обсуждение полученных результатов и интерес к работе.

Поступила 4 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Г. М.* К расчету давления в критической точке при падении ударной волны на тело, движущееся со сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.

УДК 534.2 : 532

ДИФРАКЦИЯ НА КЛИНЕ С КРУГОВОЙ НАСАДКОЙ

А. П. Киселев

(Ленинград)

Методом Фурье построено решение задачи дифракции акустических волн на клине с круговой насадкой, центр которой находится в вершине клина. Из точного решения получены асимптотики волнового воля при разных соотношениях между радиусом насадки и длиной волны. Обсуждается связь асимптотики по расстоянию с длинно- и коротковолновыми асимптотиками.

Рассматривается двумерная задача дифракции от точечного источника (в точке $M_0 = (r_0, \varphi_0)$) на системе из угла $0 < \varphi < 2\pi - \Phi$; $0 < \Phi \leqslant 2\pi$ и круга $r = a$ (см. фиг. 1). Исследуется функция u, такая, что

$$(\Delta + k^2)\, u = \delta\,(M - M_0), \quad r > a, \quad 0 < \varphi < \Phi \tag{1}$$

$$\partial u/\partial r - iku = 0\,(r^{-1/2}), \quad r \to \infty$$

$$u\,|_S = 0, \quad S = S_0 \cup S_\Phi \cup S_a \tag{2}$$

$$S_0 = \{r > a,\ \varphi = 0\},\ S_\Phi = \{r > a,\ \varphi = \Phi\},\ S_a = \{r = a,\ 0 < \varphi < \Phi\}$$

и $|\operatorname{grad} u|^2$ локально суммируем.

Единственное решение этой задачи строится разделением переменных

$$u = i\zeta \sum_{m=1}^{\infty} \left[J_{m\zeta}(\rho_*) - \frac{J_{m\zeta}(\alpha)}{H^{(1)}_{m\zeta}(\alpha)}\, H^{(1)}_{m\zeta}(\rho_*) \right] H^{(1)}_{m\zeta}(\rho_{**}) \sin m\zeta\varphi \sin m\zeta\varphi_0 \tag{3}$$

$$\alpha = ka, \quad \rho_{**} = \max(\rho, \rho_0), \quad \rho_* = \min(\rho, \rho_0), \quad \rho = kr, \quad \rho_0 = kr_0, \quad \zeta = \frac{\pi}{\Phi}$$

J, $H^{(1)}$ — соответственно функции Бесселя и Ганкеля первого рода.

Будем исследовать асимптотику функции u при $\rho_* \to \infty$ (и, следовательно, $\rho_{**} \to \infty$) и различных α.