УДК 62—50

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

А. П. Пономарев

(Москва)

Исследуется дифференциальная игра двух лиц с фиксированным временем окончания. Динамика убегающего объекта описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением; преследующий объект обладает простым движением, его вектограмма — многогранник специального вида. В класс этих многогранников входят, например, симплексы. При дополнительных предположениях показывается, что множество всех тех точек, из которых преследователь может осуществить попадание фазового вектора на терминальное множество ровно в момент τ, совпадает с аналогичным множеством для программных стратегий. Приводится пример.

В теории дифференциальных игр важное место занимает вопрос, в каких случаях за время первого поглощения можно осуществить поимку [1–3]. Ниже описывается класс игр, в которых это условие выполнено.

Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую уравнениями движения

(1) $$y^\bullet = f(y, v), \quad z^\bullet = u$$

$$y \in E^\mu, \ z \in E^\nu, \ u(t) \in P \subset E^\nu, \ v(t) \in Q \subset E^\varkappa$$

Здесь $u(t)$, $v(t)$ — управления преследующего и убегающего объектов, E^μ, E^ν, $E^\varkappa$ — евклидовые пространства размерности μ, ν, $\varkappa$ соответственно. Терминальное множество задается в виде

(2) $$M = \{x = (y, z) \in E^\mu \times E^\nu \mid z = \varphi(y), \ y \in G \subset E^\mu\}$$

(φ — непрерывная функция, отображающая E^μ в E^ν, произведение пространств $E^\mu \times E^\nu$ — евклидовое пространство размерности $\mu + \nu$).

Введем следующие ограничения: функция $f(y, v)$ непрерывна по y, v, удовлетворяет условию Липшица по y и существует постоянная C, такая, что при всех y, v выполняется неравенство

(3) $$(y \cdot f(y, v)) \leqslant C(\|y\|^2 + 1)$$

Функции $u(t)$, $v(t)$ измеримы, множество G замкнуто, множества P, Q — компакты. Кроме того, множество P выпукло и для каждого числа $0 < \varepsilon < 1$ и вектора $z \in E^\nu$ существует вектор $r \in P$, такой, что

(4) $$P \cap ((1 - \varepsilon) P + z) \subset (1 - \varepsilon) P + \varepsilon r$$

Пусть $D(y_0, \tau)$ — множество достижимости из точки y_0 за время τ для управляемого процесса, описываемого первым уравнением (1), т. е. если обозначить Y — совокупность решений этого уравнения с начальным условием $y(0) = y_0$, то

$$D(y_0, \tau) = \{y_1 \in E^\mu \mid \exists y(t) \in Y, \ y_1 = y(\tau_1)\}$$

Предполагаем, что функция φ такова, что для каждого $y \in E^\mu$ множество $\varphi(D(y, \tau))$, которое пробегает вектор $\varphi(y_1)$, когда вектор y_1 пробегает $D(y, \tau)$, удовлетворяет включению

(5) $$\varphi(D(y, \tau)) \subset \varphi(y) + \tau P$$

Это условие гарантирует, что если в начальном положении (при $t = 0$) $z(t) = \varphi(y(t))$, то и в процессе движения преследователь, зная управление убегающего игрока, может поддерживать это равенство.

Определим множество $T_\tau(M)$, состоящее из таких и только таких точек $x_0 = (y_0, z_0)$, что для каждого измеримого управления $v(t)$ существует такое измеримое управление $u(t)$, что соответствующее начальному x_0 решение системы (1) $x(\tau) \in M$.

Учитывая специальный вид второго уравнения движения (1) и терминального множества (2), можно записать

$$T_\tau(M) = \{(y_0, z_0) \in E^\mu \times E^\nu \mid D(y_0, \tau) \subset G, \varphi(D(y_0, \tau)) \in z_0 + \tau P\}$$

Пусть $\omega = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \tau\}$ — произвольное конечное разбиение отрезка $[0, \tau]$. Примем $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant k$ и

$$T_\tau^\circ(M) = \bigcap_\omega T_{\tau_1}(T_{\tau_2}(\ldots(T_{\tau_k}(M))\ldots))$$

Смысл множества $T_\tau^\circ(M)$ состоит в том, что в дифференциальной игре преследования (т. е. с дискриминацией убегающего) оно выделяет те и только те начальные точки, из которых преследователь может осуществить попадание фазового вектора на терминальное множество M ровно в момент τ [3, 4].

Теорема. Если выполнены предположения (1) — (5), то

$$T_\tau^\circ(M) = T_\tau(M), \quad \forall \tau \geqslant 0 \tag{6}$$

Доказательство. Покажем, что имеет место включение

$$T_{\tau_1}(T_{\tau_2}(M)) \supset T_{\tau_1+\tau_2}(M), \quad \forall \tau_1, \tau_2 > 0 \tag{7}$$

Пусть точка $x_0 = (y_0, z_0) \in T_{\tau_1+\tau_2}(M)$ и убегающий игрок выбрал некоторое управление $v(t)$ на отрезке $[0, \tau_1]$. Обозначив решение первого уравнения (1) с начальным условием $y(0) = y_0$ через $y(t)$ и положив $y_1 = y(\tau_1)$, имеем

$$\varphi(D(y_1, \tau_2)) \subset \varphi(D(y_0, \tau_1 + \tau_2)) \subset z_0 + (\tau_1 + \tau_2) P \tag{8}$$

Из условия (5) получим

$$\varphi(D(y_1, \tau_2)) \subset \varphi(y_1) + \tau_2 P \tag{9}$$

Учитывая (4), из соотношений (8), (9) заключаем, что существует вектор $r \in \tau_1 P + z_0$, такой, что $\varphi(D(y_1, \tau_2)) \subset \tau_2 P + r$. Выбрав $u(t) = (r - z_0) / \tau_1$ при $t \in [0, \tau_1]$ и обозначив через $z(t)$ решение второго уравнения (1) с начальным условием $z(0) = z_0$, получим $z(\tau_1) = r$ и, следовательно, $(y(\tau_1), z(\tau_1)) \in T_{\tau_2}(M)$, т. е. $x_0 \in T_{\tau_1}(T_{\tau_2}(M))$. Итак, выполнено включение (7), откуда следует равенство (6), что и требовалось доказать.

Приведем без доказательства следующие утверждения, конкретизирующие условие (4). Определения соответствующих терминов имеются в [5].

1°. Все симплексы удовлетворяют условию (4).

2°. Если многогранники $P_1 \subset E^{\nu_1}$ и $P_2 \subset E^{\nu_2}$ удовлетворяют (4), то многогранник $P = P_1 \times P_2 \subset E^{\nu_1} \times E^{\nu_2}$ удовлетворяет (4).

3°. Если многогранник P удовлетворяет (4) и точка $A \overline{\in} \operatorname{aff} P$, то многогранник $P_1 = \operatorname{conv}(A \cup P)$ также удовлетворяет (4).

Пусть множество P удовлетворяет (4).

4°. Множество P — многогранник, каждый его фасад удовлетворяет (4).

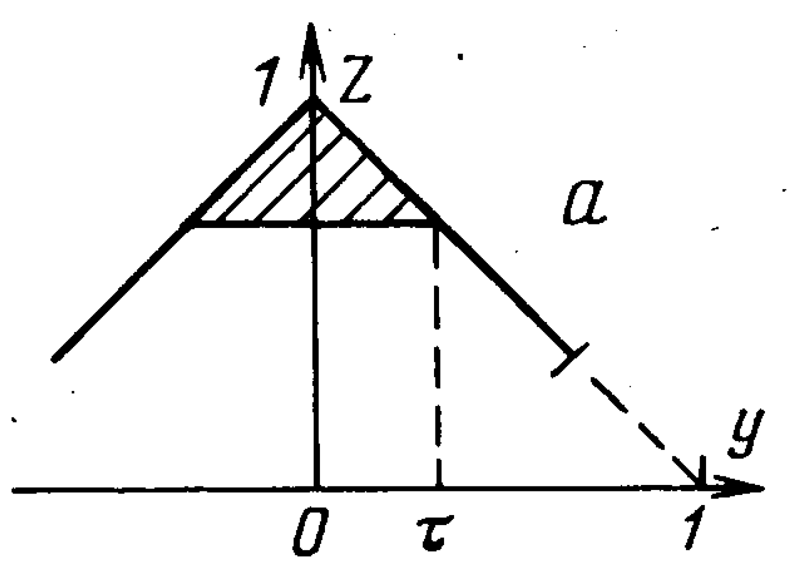
Пусть Q — фасад многогранника P и $\dim Q = \dim P - 1$. Обозначим через T многогранник, такой, что $\operatorname{extr} T = \operatorname{extr} P \setminus \operatorname{extr} Q$.

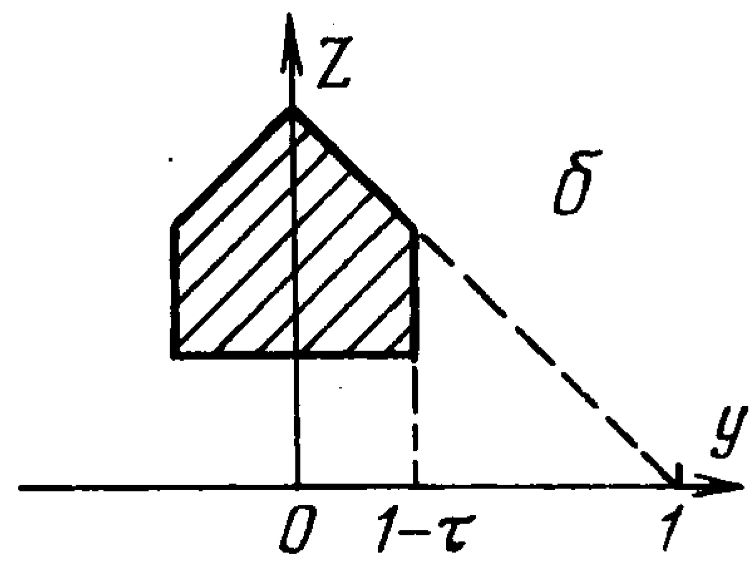
5°. Многогранник T расположен в аффинном подпространстве, параллельном $\operatorname{aff} Q$, и является транслятом некоторого фасада многогранника Q.

Из этих утверждений следует, что для $\dim P = 1,2,3$ только отрезок, треугольник, параллелограмм, тетраэдр, треугольная призма, четырехугольная пирамида, в основании которой лежит параллелограмм, и параллелепипед удовлетворяют условию (4).

Пример. Пусть yoz — прямоугольная система координат, уравнения (1) имеют вид:

$$y^\cdot = v, \quad |v| \leqslant 1; \quad z^\cdot = u, \quad |u| \leqslant 1$$





Функция $\varphi(y) = 1 - |y|$, множество $G = \{y : |y| \leqslant 1\}$. Условие (5) — условие Липшица с постоянной, равной единице, и вместе с (4) выполнено, следовательно, по доказанной теореме $T_\tau^\circ(M) = T_\tau(M)$. Последнее множество не пусто при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и имеет вид, представленный на фигуре при $0 \leqslant \tau \leqslant {}^1/_2$ (*а*) и ${}^1/_2 \leqslant \tau \leqslant 1$ (*б*).

Поступила 1 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче преследования. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, 1970, № 2.
4. *Гусятников П. Б.* К структуре дифференциальных игр. В сб.: Математические методы исследования и оптимизации систем, № 3. Киев, 1970.
5. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.

УДК 533.6.011

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЛОБОВОГО СТОЛКНОВЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

Г. М. Арутюнян

(Москва)

Показано, что лобовое столкновение ударных волн обладает простым свойством, которое может быть использовано в задачах нелинейного взаимодействия ударных волн и их дифракции на движущихся телах.

Пусть по невозмущенной среде навстречу одна другой распространяются две плоские ударные волны с интенсивностями p_1 и p_2 (фиг. 1). В плоскости pV ($V = 1 / \rho$ — удельный объем газа) им соответствуют точки *1* и *2* на ударной адиабате (кривая *a* на фиг. 2), исходящей из точки *O*, соответствующей невозмущенному состоянию газа.

Проведем в плоскости pV из точек *1* и *2*, как из начальных, две новые ударные адиабаты (кривые *b* и *c* на фиг. 2), уравнения которых, как известно

$$\frac{V}{V_i} = \frac{(\gamma+1)p_i + (\gamma-1)p}{(\gamma-1)p_i + (\gamma+1)p}, \quad \frac{V_i}{V_0} = \frac{(\gamma+1)p_0 + (\gamma-1)p_i}{(\gamma-1)p_0 + (\gamma+1)p_i} \quad (i = 1, 2) \tag{1}$$

Исключив из (1) переменную V, приходим при $p_1 \neq p_2$ к квадратному уравнению для ординаты точки пересечения, решая которое относительно p, получим

$$p = p_1 p_2 / p_0 = p_*, \quad p = p_0 \tag{2}$$

Соответствующие абсциссы определяются из (1).

Вторая из точек пересечения (p_0, V_0) не имеет физического смысла. Следовательно, если $p_1 \neq p_2$ и по ударным волнам *1* и *2* распространяются две другие ударные волны