

## О ВЛИЯНИИ ДЕФОРМАЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ НА СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ КОНЦА ТРЕЩИНЫ

В. А. Ибрагимов, В. Д. Ключников

(Ивано-Франковск, Москва)

Рассматривается напряженно-деформированное состояние вблизи конца трещины продольного сдвига на начальном этапе ее развития в условиях нестационарного квазистатического режима. Принимаются определяющие соотношения теории скольжения [1]. Асимптотическое решение задачи, построенное в первом приближении методом малого параметра, сравнивается с аналогичным, найденным по теории течения с изотропным упрочнением [2]. Дается оценка влияния малой анизотропии на показатель особенности и окружное распределение скоростей напряжений.

1. Соотношения теории пластичности, основанной на концепции скольжения [1], предсказывают резкую деформационную анизотропию среды, в частности, для случая, когда догрузка осуществляется из состояния, достигнутого предварительным активным процессом с выраженным направлением развития. Это определяет использование теории для оценки влияния накопленной анизотропии на структуру решения в окрестности кончика трещины, развивающейся в упругопластическом материале.

Для случая антиплоского деформирования определяющие соотношения теории скольжения допускают формулировку, подобную двумерному варианту, рассмотренному в [3]. Отнесем однородное состояние малого элемента среды к декартовой системе осей  $x, y, z$  и обозначим через  $n$  вектор нормали к текущей площадке скольжения, наклоненной под углом  $\omega$  к оси  $x$ . Пусть на элемент действуют касательные напряжения  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ , так что на площадке скольжения  $\tau_{nz} = \tau_{xz} \cos \omega + \tau_{yz} \sin \omega$ . Тогда в системе скольжения имеем локальный сдвиг величиной  $\gamma_{nz} = F(\tau_{nz})$ . Согласно основной идее теории скольжения пластические деформации найдутся суммированием (индекс  $z$  опущен)

$$(1.1) \quad \gamma^p = \int F(\tau_n) (e_1 \cos \lambda + e_2 \sin \lambda) d\lambda$$

$$\tau_x = \tau \cos \beta, \quad \tau_y = \tau \sin \beta, \quad \lambda = \omega - \beta, \quad \tau_n = \tau \cos \lambda \geq \tau_0$$

$$\cos \lambda_0 = \tau_0 / \tau, \quad e_1 = i \cos \beta + j \sin \beta, \quad e_2 = -i \sin \beta + j \cos \beta$$

Здесь  $i, j$  — орты осей  $\tau_x, \tau_y$ ;  $\beta$  — угол нагружения,  $\tau_0$  — величина сопротивления сдвигу в системе скольжения. Интегрирование проводится по области  $|\lambda| \leq \lambda_0$ , поскольку  $F = 0$  при  $\tau < \tau_0$ .

Для догрузки из состояния (1.1) имеем

$$(1.2) \quad \delta\gamma^p = \int_a^b F'(\tau_n) \delta\tau \cos(\lambda - \alpha) (e_1 \cos \lambda + e_2 \sin \lambda) d\lambda$$

$$\delta\tau_n = \delta\tau \cos(\lambda - \alpha), \quad \delta\tau = \delta\tau (\cos(\beta + \alpha) i + \sin(\beta + \alpha) j)$$

Для активного процесса пределы интегрирования в (1.2) определяются условиями  $|\lambda| \leq \lambda_0$ ,  $\cos(\lambda - \alpha) \geq 0$  и при  $\alpha \geq 0$  имеют вид

$$(1.3) \quad a = -\lambda_0, \quad b = \lambda_0 \quad (0 \leq \alpha \leq \pi/2 - \lambda_0)$$

$$a = \alpha - \pi/2, \quad b = \lambda_0 \quad (\pi/2 - \lambda_0 < \alpha \leq \pi/2 + \lambda_0)$$

и отвечают областям полного и неполного нагружения.

При  $\pi/2 + \lambda_0 < \alpha \leq \pi$  дополнительные пластические деформации в (1.2) равны нулю.

С целью упрощения соотношений (1.1), (1.2) примем, что локальный механизм скольжения при  $\tau_n \geq \tau_0$  определяется простейшей возможной зависимостью  $F(\tau_n) = C(\tau_n - \tau_0)$ . Выполняя интегрирование в (1.1) и добавляя упругие деформации  $\gamma_i^e = \tau_i / G$ , видим, что связь интенсивностей девиаторов  $\tau(\gamma) \in C_1(0, \infty)$ , причем

$$(1.4) \quad \tau = G\gamma \quad (\gamma \leq \gamma_0), \quad \tau' \rightarrow \frac{G}{1+\mu} \quad \left( \gamma \rightarrow \infty, \mu = \frac{G}{g}, g = \frac{2}{\pi C} \right)$$

Заметим, что учет последующих степеней в разложении для  $F(\tau_n)$  также приводит к случаю степенного упрочнения для макродиаграммы  $\tau(\gamma)$ , однако показатель упрочнения оказывается отличным от единицы при  $\gamma \rightarrow \infty$ . Последнее можно установить также способом, изложенным в [4].

Интегрируя (1.2), с учетом соотношений (1.3) находим дополнительные пластические деформации

$$(1.5) \quad \delta\gamma_x^p = \frac{\delta\tau}{\pi g} \times \begin{cases} \sin 2\lambda_0 \cos(\beta - \alpha) + 2\lambda_0 \cos(\beta + \alpha), & 0 \leq \alpha \leq \pi/2 - \lambda_0 \\ \cos(\alpha - \lambda_0) \sin(\beta + \lambda_0) + (\lambda_0 - \alpha + \pi/2) \times \\ \times \cos(\beta + \alpha), & |\alpha - \pi/2| \leq \lambda_0 \\ 0, & \pi/2 + \lambda_0 < \alpha \leq \pi \end{cases}$$

$$\delta\gamma_y^p = \frac{\pi\delta\tau}{g} \times \begin{cases} \sin 2\lambda_0 \sin(\beta - \alpha) + 2\lambda_0 \sin(\beta + \alpha), & 0 \leq \alpha \leq \pi/2 - \lambda_0 \\ -\cos(\alpha - \lambda_0) \cos(\beta + \lambda_0) + (\lambda_0 - \alpha + \pi/2) \sin(\beta + \alpha), & |\alpha - \pi/2| \leq \lambda_0 \\ 0, & \pi/2 + \lambda_0 < \alpha \leq \pi \end{cases}$$

Как видно из (1.5), связь приращений напряжений и деформаций в зоне полного нагружения дифференциально линейна, в отличие от аналогичной для зоны неполного нагружения, где нелинейность возникает вследствие наличия в уравнениях явным образом величины  $\alpha = \arctg(\delta\tau_x / \delta\tau_y) - \beta$  и осложняет в общем случае их использование.

2. Пусть упругопластическое тело с трещиной — разрезом вдоль луча  $x \leq 0, y = 0$  подвергнуто продольному сдвигу в направлении  $z$ . Вследствие сингулярности напряжений для достаточно малой окрестности кончика

состояние, предшествующее началу распространения трещины и отвечающее некоторому значению коэффициента интенсивности напряжений  $K_0$ , достигается в условиях нагружения, близкого к пропорциональному. Ввиду линейности асимптотики диаграммы из (1.4) следует, что главный член поля напряжений имеет вид [2] ( $r, \vartheta$  — полярные координаты)

$$(2.1) \quad \tau_y^0 = \frac{K_0}{r^{1/2}} \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad \tau_x^0 = -\frac{K_0}{r^{1/2}} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

Используя (1.1), (2.1), находим, что  $\beta = (\pi + \vartheta) / 2$ .

Пусть трещина при увеличении  $K$  претерпевает приращение длины  $\delta l$ , вызывающее перераспределение  $\tau_i, \gamma_i$  согласно уравнениям теории (1.5). С помощью (1.1), (2.1) находим, что  $\tau / \tau_0 \rightarrow \infty, \lambda_0 \rightarrow \pi / 2$ , при  $r \rightarrow 0, \delta l \rightarrow 0$  ( $\delta l / r = o(1)$ ), поэтому зоны полного нагружения и полной разгрузки вырождаются в линии  $\alpha = 0, \pi$  соответственно, тогда как зона неполного нагружения реализуется для всех углов догрузки  $|\alpha| < \pi$ . Опуская в (1.4) члены высшего порядка малости в сравнении с  $\delta \tau$  и переходя к полярной системе координат, получаем после преобразований нелинейные уравнения

$$(2.2) \quad G\delta\gamma_r = \delta\tau_r + \mu f_1(\alpha, \vartheta) \delta\tau, \quad G\delta\gamma_\vartheta = \delta\tau_\vartheta + \mu f_2(\alpha, \vartheta) \delta\tau$$

$$f_1(\alpha, \vartheta) = \left[ \frac{1}{\pi} \sin \alpha \sin \frac{\vartheta}{2} + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \sin \left(\frac{\vartheta}{2} - \alpha\right) \right]$$

$$f_2(\alpha, \vartheta) = \left[ \frac{1}{\pi} \sin \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \cos \left(\frac{\vartheta}{2} - \alpha\right) \right]$$

$$(\delta\gamma_r = \partial(\delta w) / \partial r, \delta\gamma_\vartheta = \partial(\delta w) / r \partial \vartheta)$$

Соотношения (2.2) предсказывают активный процесс при любом направлении догрузки, поскольку угол в вершине конической особенности поверхности нагружения бесконечно мал. Действительно, из (1.2) (или (2.2)) следует

$$|\delta\gamma^p| = (\delta\tau / g\pi) [\sin^2 \alpha + (\pi - \alpha)^2 + (\pi - \alpha) \sin 2\alpha]^{1/2} \geq 0 \\ 0 \leq \alpha \leq \pi$$

Заметим, что удельная работа пластических деформаций  $\delta A_p = (\tau \delta \tau / g\pi) [\sin \alpha + (\pi - \alpha)]$  также неотрицательна. Поэтому определяющие уравнения (2.2) одновременно являются вариантом аналитической теории пластичности, введенной в [4] из иных соображений и также приводящей к уравнениям дифференциально-нелинейного типа.

Переходя в (2.2) к скоростям величин и вводя функцию скоростей напряжений  $\Phi(r, \vartheta)$  ( $\tau_r' = \partial\Phi / r \partial\vartheta, \tau_\vartheta' = -\partial\Phi / \partial r$ ; штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному параметру нагружения), внесем (2.2) в уравнение совместности ( $\Delta$  — оператор Лапласа, функции  $f_1(\alpha, \vartheta), f_2(\alpha, \vartheta)$  определены в (2.2))

$$(2.3) \quad r\Delta\Phi = \mu \left[ \tau' f_2(\alpha, \vartheta) + r \frac{\partial}{\partial r} (\tau' f_2(\alpha, \vartheta)) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\tau' f_1(\alpha, \vartheta)) \right]$$

Запишем краевые условия для случая свободных от усилий берегов

$$(2.4) \quad \Phi_\vartheta'(r, 0) = 0, \quad \Phi(r, \pi) = 0$$

Решение краевой задачи (2.3), (2.4) будем искать методом малого параметра. В нулевом приближении положим  $\mu = 0$ ,  $\Phi_0 = r^m \Psi_0(\vartheta)$ ,  $-1/2 \leq m \leq 0$ . Из (2.3) с учетом четности  $\Psi_0(\vartheta)$  получаем

$$(2.5) \quad \Psi_0'' + m^2 \Psi_0 = 0, \quad \Psi_0 = \cos m\vartheta, \quad \alpha = n\vartheta \quad (n = 1/2 - m)$$

Решение (2.5) содержит неопределенный множитель, выбранный по условию нормировки  $\Psi_0(0) = 1$ .

Ограничиваясь случаем слабой нелинейности  $\mu = o(1)$ , внесем  $\Psi_0$ ,  $\alpha$  из (2.5) в правую часть (2.3). Обозначая первое приближение через  $\Phi_1(r, \vartheta)$ , получаем после соответствующих преобразований уравнение для  $\Psi_1$  и краевые условия

$$(2.6) \quad \Psi_1'' + m^2 \Psi_1 = \frac{\mu m n}{\pi} \left[ \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta - \sin m\vartheta \right] \quad (\Phi_1 = r^m \Psi_1(\vartheta))$$

$$\Psi_1(0) = 1, \quad \Psi_1'(0) = 0, \quad \Psi_1(\pi) = 0$$

Решение задачи (2.6) имеет вид

$$\Psi_1(\vartheta) = \cos m\vartheta - \frac{\mu n}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \frac{m(1-m)}{2m-1} \right] \sin m\vartheta +$$

$$+ \frac{\mu n}{\pi} \left[ \frac{\vartheta}{2} \cos m\vartheta + \frac{m}{2m-1} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta \right]$$

Характеристическое уравнение относительно  $m$  имеет вид

$$(2.7) \quad \cos m\pi - \frac{\mu(1/2 - m)}{m\pi} \left[ \frac{1}{2} + \frac{m(1-m)}{2m-1} \right] \sin m\pi +$$

$$+ \frac{\mu(1/2 - m)}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \cos m\pi + \frac{m}{2m-1} \sin(1-m)\pi \right] = 0$$

Для  $\mu = 0$  (гуково тело) из (2.5), (2.7) находим  $m = -1/2$ ,  $\Psi_1 = \Psi_2$  и решение (2.5) является точным.

Зависимость  $m(\mu)$ , найденная численно из (2.7), приведена для  $(m_C(\mu))$

$\mu$	0	0.05	0.1	0.2	0.5	1	10
$-m_C \cdot 10^3$	500	488	478	461	429	400	—
$-m_T \cdot 10^3$	500	492	485	472	439	413	234

Для малых  $\mu$  положим в (2.7)  $m = -1/2 + \varepsilon(\mu)$  ( $\varepsilon = o(1)$ ), откуда  $\varepsilon(\mu) = 2\mu / \pi^2$ ,  $m = -1/2 + 2\mu / \pi^2$

Распределение скоростей напряжений, вычисленное согласно (2.6), (2.7), показано на фигуре для  $\mu = 0.1$  (кривые 1 и 2 для  $T_r$  и  $T_\vartheta$  соответственно) и для  $\mu = 0.5$  (кривые 5 и 6). Для сравнения случай  $\mu = 0$  указан штриховой линией. Здесь  $T_i(\vartheta) = \tau_i' / r^{m-1}$ ,  $i = r, \vartheta$ .

3. Рассмотрим ту же задачу в рамках изотропной теории течения с линейным упрочнением

$$(3.1) \quad G\gamma_r' = \tau_r' + \mu\tau_0^{-1}\tau_r^\circ, \quad G\gamma_\vartheta' = \tau_\vartheta' + \mu\tau_0^{-1}\tau_\vartheta^\circ$$

$$\tau_r' \tau_0 = \tau_r^\circ \tau_r' + \tau_\vartheta^\circ \tau_\vartheta', \quad \tau_0^2 = \tau_i^\circ \tau_i^\circ = f(q), \quad dq = (1/2 d\gamma_i^p d\gamma_i^p)^{1/2}$$

Величины, помеченные нулевым индексом, отвечают состоянию предельного равновесия трещины (2.1).

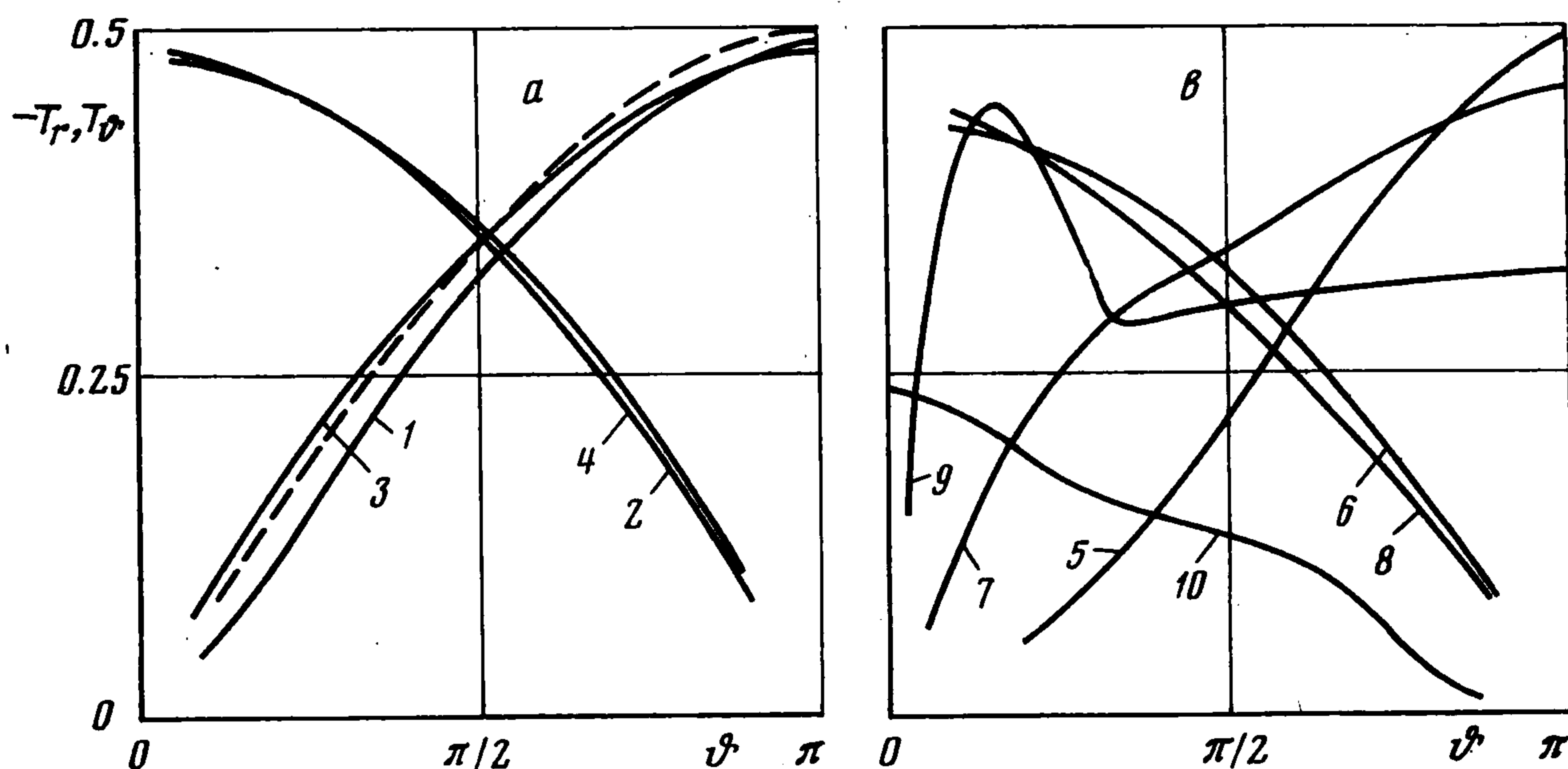
Для отыскания главного члена  $\Phi(r, \vartheta) = r^m \Psi(\vartheta)$  в асимптотическом разложении функции Эри имеем задачу на собственные значения [2]

$$(3.2) \quad \Psi'' \left(1 + \mu \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) - \left(m - \frac{1}{2}\right) \mu \sin \vartheta \Psi' + \Psi m \left[ (m-1) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \mu \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right) + 1 + \frac{\mu}{2} \right] = 0 \quad (0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1); \quad \Psi'(0) = 0, \\ \Psi(0) = 1$$

$$(3.3) \quad \Psi'' + m^2 \Psi = 0 \quad (\vartheta_1 < \vartheta \leq \pi); \quad \Psi(\pi) = 0 \\ [\Psi] = [\Psi'] = 0, \quad (\vartheta = \vartheta_1)$$

$$(3.4) \quad \Psi'(\vartheta_1) \sin \frac{\vartheta_1}{2} - m \Psi(\vartheta_1) \cos \frac{\vartheta_1}{2} = 0$$

Уравнения (3.2) — (3.4) учитывают возникновение областей упругой разгрузки в областях, прилегающих к берегам трещины, и симметрию решения относительно оси  $x$ . Поэтому на луче  $\vartheta = \vartheta_1$  должно выполняться условие нейтрального нагружения (3.4).



Интегрируя (3.3) в области разгрузки  $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \pi$  и удовлетворяя краевым условиям из (3.3), (3.4), находим, что задача имеет нетривиальное решение

$$(3.5) \quad \Psi = A \sin m(\pi - \vartheta) / \sin m\pi \quad (\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \pi)$$

при условии  $\sin [(m - 1/2)\vartheta_1 - m\pi] = 0$ . Последнее определяет значение  $\vartheta_1$  в функции показателя особенности [2]

$$(3.6) \quad \vartheta_1 = m\pi / (m - 1/2) \quad (-1/2 \leq m \leq 0)$$

Используя непрерывность скоростей напряжений и соотношение (3.5), из (3.4) находим

$$(3.7) \quad m \Psi(\vartheta_1) \cos \frac{m\pi}{1-2m} + \Psi'(\vartheta_1) \sin \frac{m\pi}{1-2m} = 0$$

Условие (3.7) замыкает краевую задачу (3.2) и служит для отыскания зависимости  $m = m(\mu)$ . При этом второе условие из (3.2) принято для нормировки.

Указанная краевая задача решалась численно. Текущая итерация включала интегрирование на  $[0, \vartheta_1]$  задачи Коши (3.2), определение невязки для уравнения (3.7) и уточнение значения  $m$  методом деления отрезка пополам. Для найденного решения проверялись условия догрузки  $\tau' \geq 0$  ( $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$ ) и разгрузки  $\tau' < 0$  ( $\vartheta_1 < \vartheta \leq \pi$ ).

Полученная зависимость  $m_T(\mu)$  сведена в таблицу, функции  $T_r(\vartheta)$  (кривые 3, 7) и  $T_\varphi(\vartheta)$  (кривые 4, 8) показаны на фигуре (кривые 3, 4 для  $\mu = 0.1$ , кривые 7, 8 для  $\mu = 0.5$ ). Случай слабого упрочнения  $\mu = 10$  представлен кривыми 9 ( $T_r$ ) и 10 ( $T_\varphi$ ).

Сравнение решений из п. 2, 3 показывает, что значения  $m$  и распределения в окружном направлении компоненты  $T_\varphi$  различаются мало (не более 1.5 и 3% при  $\mu = 0.1$ , 2.7 и 8% при  $\mu = 0.5$ ), поэтому влияние анизотропии на уровень концентрации не слишком существенно на начальном этапе развития трещины. Наряду с этим заметное различие значений  $T_r$  (и  $T = (T_i T_i)^{1/2}$ ) указывает на возрастающее несовпадение форм областей значительных деформаций. Для среды (1.1), (1.2) область нестесненного пластического течения, как и следовало ожидать, имеет более плавные очертания, а ее характерный размер превышает аналогичный для случая изотропии (3.1). Указанные отклонения имеют систематический характер, и можно думать, по-видимому, что увеличивающееся с ростом трещины отличие траектории нагружения в элементах вблизи кончика от пропорционального приводит к возрастанию указанных эффектов.

Поступила 11 X 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Batdorf S. B., Bui-Diansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. NASA, 1949, Technical Note, 1871. (Рус. перев.: Сб. перев. Механика, 1962, № 1.)
2. Ибрагимов В. А. Напряженно-деформированное состояние вблизи конца растущей трещины в упругопластической среде. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.
3. Ключников В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
4. Ключников В. Д. Аналитическая теория пластичности. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2.