

УДК 539.374

СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ БИФУРКАЦИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Н. Ю. Швайко

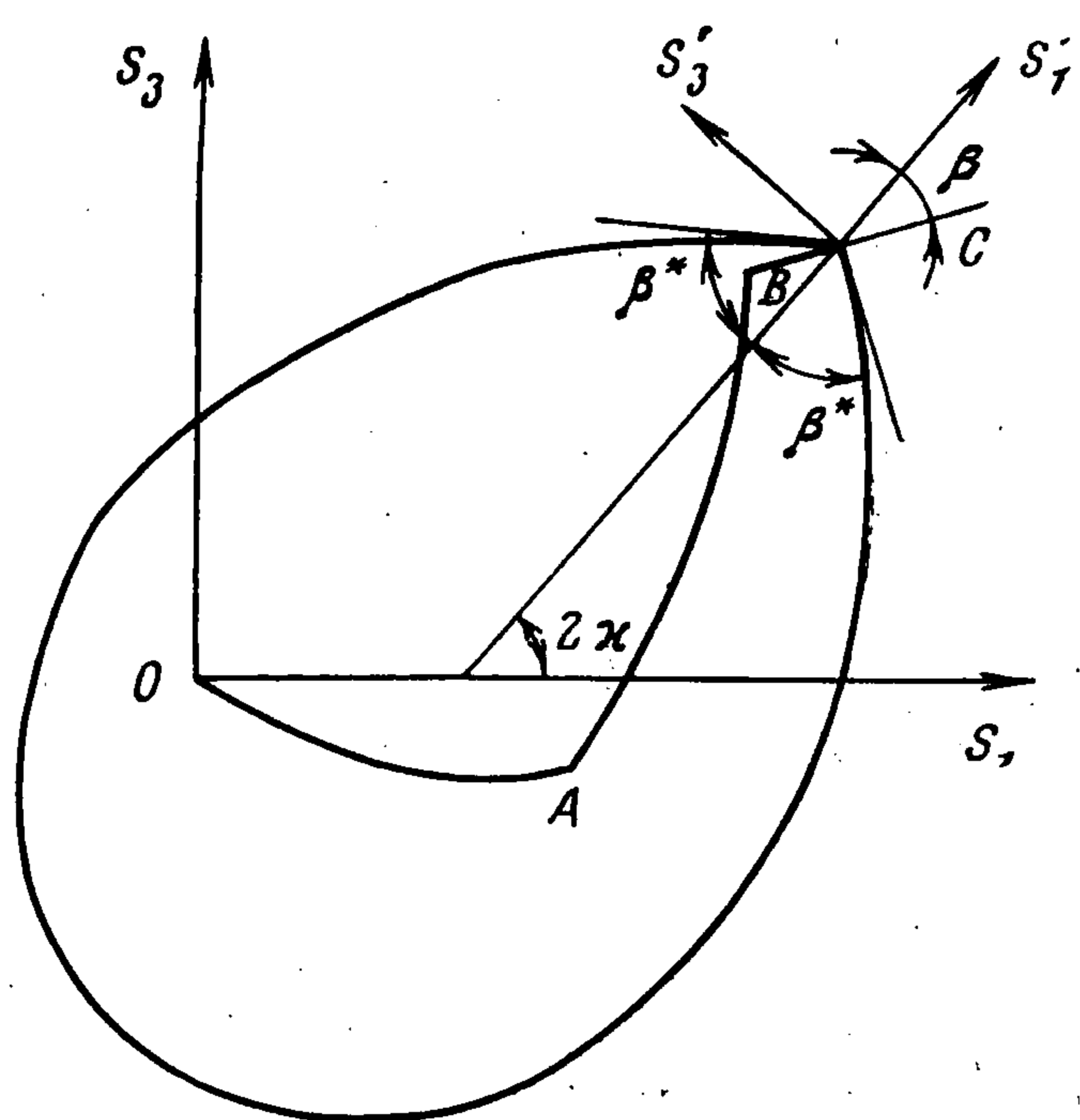
(Днепропетровск)

В работах [1-3] для плоских путей деформации разработан подтвержденный экспериментом при сложном нагружении [4-6] дифференциально-нелинейный вариант теории пластичности, основанный на модели линейной анизотропно-упрочняющейся плоско-пластической среды [7] и постулате изотропии [8]. В частности, установлены зависимости между приращениями напряжений и деформаций в угловой точке траектории нагружения.

Ниже указанные зависимости обобщаются на случай произвольной ориентации малой догрузки относительно предшествующей плоской траектории. Полученный результат позволяет подойти с позиций дифференциально-нелинейного варианта теории пластичности к постановке и решению задач о влиянии истории нагружения на величину критических параметров, соответствующих точкам бифуркации процесса (постановка Шенли) и бифуркации состояния (постановка Кармана) тонкостенных элементов конструкций. Некоторые качественные аспекты этого вопроса выясняются на модели пластинки, работающей в условиях двухстороннего сжатия [9]. В частности, показано, что точке бифуркации состояния предшествует точка бифуркации процесса, если при ветвлении способ закрепления и нагружения модели не накладывает ограничений на углы излома траектории деформации. В рамках дифференциально-линейных вариантов теории пластичности этот результат получен ранее для трехмерного тела [10-12]. Делается вывод, что критическая нагрузка по Шенли, определенная с учетом истории активного нагружения, превосходит критическую нагрузку, определенную по теории деформаций Генки — Надаи, не учитывающей истории нагружения.

1. Об уравнениях состояния в малой окрестности угловой точки траектории нагружения. Пусть нагружение линейной анизотропно-упрочняющейся плоско-пластической среды [7]

характеризуется в плоскости S_1S_3 пятимерного пространства напряжений А. А. Ильюшина [8] произвольной траекторией OAB (фиг. 1). Компоненты векторов напряжений S и деформаций E будем выражать через ком-



Фиг. 1

поненты тензоров σ_{ij} , ε_{ij} ($i, j \sim x, y, z$) при помощи равенств

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{1/2}(\sigma_x - \sigma_y), & S_2 &= \sqrt{3/2}(\sigma_z - \sigma), & S_3 &= \sqrt{2} \tau_{xy}, \\ S_4 &= \sqrt{2} \tau_{yz} \\ S_5 &= \sqrt{2} \tau_{zx} \quad (\sigma_{ii} = \sigma_i; \sigma_{ij} = \tau_{ij}, i \neq j; \sigma = 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)) \\ E_1 &= \sqrt{1/2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y), & E_2 &= \sqrt{3/2}(\varepsilon_z - \varepsilon), & E_3 &= \sqrt{1/2} \gamma_{xy}, \\ E_4 &= \sqrt{1/2} \gamma_{yz} \\ E_5 &= \sqrt{1/2} \gamma_{zx} \quad (\varepsilon_{ii} = \varepsilon_i; 2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}, i \neq j; \varepsilon = 1/3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)) \end{aligned}$$

Сообщим из точки B малую догрузку $dS = BC$ и запишем выражение для приращения деформации dE . Считаем пока вектор dS расположенным в плоскости S_1S_3 .

Если чувствительность плоской среды к деформационной анизотропии характеризуется логарифмической функцией упрочнения $F(\omega) = k \ln(c/\omega)$, то согласно [3] во вспомогательной системе координат $CS'_1S'_3$ (фиг. 1) можем записать (такое представление связи $dS \sim dE$ используется впервые)

$$(1.1) \quad dS'_1 = G_p (2\beta_{13}^*) dE'_1, \quad dS'_3 = G_g (2\beta_{13}^*) dE'_3$$

$$(1.2) \quad G_p = \left(\frac{1}{2G} + B_{11}\right)^{-1}, \quad G_g = \left(\frac{1}{2G} + B_{12}\right)^{-1}$$

$$B_{11} = \frac{1}{2k} \left[\frac{J_0(2\alpha)}{\ln(2C/\alpha)} - 2\alpha J_1(2\alpha) \right] J_0(2\alpha) + B_{12}$$

$$B_{12} = \frac{\alpha^2}{k} [J_0^2(2\alpha) + J_1^2(2\alpha)], \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta_{13}^*$$

Здесь G — упругий модуль сдвига, $J_0(2\alpha)$, $J_1(2\alpha)$ — функции Бесселя; $2\beta_{13}^*$ — угол, образованный касательными к линии нагружения Σ_{13} в точке нагружения C (фиг. 1). Функции G_p и G_g , называемые в дальнейшем модулями продолжающегося нагружения и догрузки, не зависят от вида траектории, и для их определения можно, в частности, воспользоваться пропорциональным нагружением.

Из формул (1.1) и (1.2) следует, что связь между dS и dE для произвольных траекторий полностью определяется углом сингулярности $2\beta_{13}^*$ на линии нагружения Σ_{13} и его ориентацией 2κ в плоскости S_1S_3 . Аргумент $2\beta_{13}^*$ функций G_p , G_g и параметр ориентации 2κ существенным образом зависят от истории нагружения и являются функционалами процесса.

Следует отметить, что полученная выше в рамках модели [7] инвариантность зависимости угла сингулярности в точке нагружения и векторов приращений dS , dE ранее сформулирована В. Д. Ключниковым как постулат в предложенном им варианте теории пластичности [13].

Для модели линейной анизотропно-упрочняющейся плоско-пластической среды, основанной на концепции скольжения, методика аналитического построения линии нагружения Σ_{13} изложена в работе [14]. В частности, величина угла $2\beta_{13}^*$ и его ориентация 2κ определяются при помощи двух функций $2\alpha = \alpha_2(t) + \alpha_1(t)$ и $2\kappa = \alpha_2(t) - \alpha_1(t)$, где $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ — границы множества направлений скольжений и за параметр времени t принята длина дуги траектории. В произвольный момент нагружения α_1 и α_2 вычисляются из условия, что в направлении развивающихся скольжений m

сопротивление сдвигу S_m и скорость его приращения $\partial S_m / \partial t$ соответственно равны касательному напряжению τ_m , действующему по площадке скольжения, и скорости приращения касательного напряжения $\partial \tau_m / \partial t$.

Соответствующие алгоритмы предложены в работах [3, 15, 16], здесь ограничимся лишь следующими замечаниями.

Пусть траектория OAB в точке B гладкая или сопровождается изломом, как показано на фиг. 1, но угол β между направлением dS и биссектрисой угла $2\beta_{13}^*$ в точке B не превосходит величины β_0 , определяемой формулой

$$(1.3) \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{1}{2\alpha_B \ln(2c/\alpha_B)} - \frac{J_1(2\alpha_B)}{J_0(2\alpha_B)}, \quad \alpha_B = \alpha(t_B)$$

В этом случае малая догрузка dS из конца траектории OAB не приводит к замораживанию систем скольжения, имеющих место в момент времени $t_B - 0$, предшествующий излому траектории в точке B , и

$$\alpha_{1,2}(t_B + 0) = \alpha_{1,2}(t_B - 0), \quad 2\alpha_B = \alpha_2(t_B \pm 0) + \alpha_1(t_B \pm 0)$$

Так что значение углов $2\beta_{13}^*$, соответствующих точкам B и C траектории, в пределе $dS \rightarrow 0$ совпадают, и соотношения (1.1), (1.2), определяющие дифференциально-линейную связь $dS_i' \sim dE_i'$, не зависящую от направления dS внутри конуса $\beta \leq \beta_0$ полного догружения.

Если $\beta \geq \pi - (\beta_{13}^*)_B$, то происходит разгрузка по упругому закону и $G_p = G_g = 2G$. При $\beta_0 < \beta \leq \pi - (\beta_{13}^*)_B$ приращение dS приводит к частичному или полному замораживанию систем скольжения и, следовательно, к скачкообразному изменению углов $2\beta_{13}^* = \pi - 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ и $2\kappa = \alpha_2 - \alpha_1$. В частности, если вектор dS направлен вдоль линии Σ_{13} , то $(2\beta_{13}^*)_B = \pi$ и точка нагружения на Σ_{13} становится регулярной.

При неполной догрузке ($\beta_0 < \beta < \pi - (\beta_{13}^*)_B$) определяемая формулами (1.1), (1.2) связь dS_i' и dE_i' существенно зависит от направления dS и, следовательно, является дифференциально-нелинейной. При этом угол сингулярности $2\beta_{13}^*$ в точке C и его ориентация $2\kappa_C$ определяются формулами (1.4), где параметр α_C вычисляется из уравнения (1.5)

$$(1.4) \quad (2\beta_{13}^*)_C = (2\beta_{13}^*)_B - 4(\alpha_B - \alpha_C)$$

$$2\kappa_C = 2\kappa_B + 2(\alpha_B - \alpha_C)$$

$$(1.5) \quad \operatorname{tg}(\beta - 2\alpha_B - 2\alpha_C) = \frac{1}{2\alpha_C \ln(2C/\alpha_C)} - \frac{J_1(2\alpha_C)}{J_0(2\alpha_C)}$$

Полученные результаты при плоско-пластической деформации на основании постулата изотропии остаются в силе для произвольных плоских и пространственных монотонных [3] путей нагружения, как угодно расположенных в пятимерном пространстве А. А. Ильюшина [8]. Условия удовлетворения модели плоской среды постулату изотропии указаны в [4]. Замена логарифмической функции упрочнения $F(\omega)$ на ее общий возможный вид [17] не изменяет существа вопроса.

Рассмотрим случай, когда догрузка dS расположена в плоскости Π , проходящей через ось S_1' , но произвольно повернутой относительно предшествующей плоской траектории OAB (фиг. 1).

Исходя из указанной выше инвариантности зависимости угла нагружения $2\beta^*$ и приращений векторов dS , dE , а также независимости функций G_p , G_g от вида траектории для любых плоских и пространственных монотонных путей нагружения, естественно предположить, что указанная инвариантность и независимость G_p и G_g имеют место для произвольных процессов нагружения. При этом по аналогии с (1.1) для малой догрузки dS , как угодно ориентированной относительно предшествующей траектории, мо-

жем записать

$$(1.6) \quad dS_1' = G_p (2\beta_{1\Pi}^*) dE_1', \quad dS_{\Pi}' = G_g (2\beta_{1\Pi}^*) dE_{\Pi}'$$

Здесь $2\beta_{1\Pi}^*$ — угол, образованный касательными к линии пересечения поверхности нагружения Σ с плоскостью Π .

Пусть догрузка dS в первом и во втором случаях не приводит к замораживанию систем скольжения. Тогда приращение dE_1' определяется только компонентой dS_1' и не зависит от составляющих dS_3' и dS_{Π}' , в частности, без изменения величины dE_1' можно положить $dS_3' = dS_{\Pi}' = 0$. Отсюда для произвольной точки B траектории на основании (1.1) и (1.6) получаем

$$(1.7) \quad G_p (2\beta_{13}^*) = G_p (2\beta_{1\Pi}^*)$$

Здесь G_p согласно (1.2) — однозначная возрастающая функция, и с произвольной точки траектории нагружения можно осуществить полную догрузку, поэтому равенство (1.7) имеет место при выполнении условия

$$(1.8) \quad \beta_{13}^* = \beta_{1\Pi}^*$$

(Независимость G_p и G_g от угла β внутри конуса полного догружения не означает постоянства этих функций при изменении β_{13}^* .)

Учитывая, что ориентация Π относительно плоскости $S_1'S_3'$ выбиралась произвольно, приходим к выводу, что для любого процесса деформирования телесный угол $2\beta^*$, образованный касательными к поверхности нагружения Σ в точке нагружения, является гиперконусом вращения. Этот результат позволяет обобщить формулы (1.1) на случай произвольной ориентации вектора догрузки относительно плоской траектории OAB (фиг. 1). Имеем

$$(1.9) \quad dS_1' = G_p (2\beta^*) dE_1', \quad dS_i' = G_g (2\beta^*) dE_i', \quad i = 2, 3, 4, 5$$

Здесь, как и выше, модуль продолжающегося нагружения G_p , и догрузки G_g определяются соотношениями (1.2); $S_1'S_2'S_3'S_4'S_5'$ — взаимно ортогональная локальная система координат с началом в текущей точке C траектории нагружения, причем S_1' — ось гиперконуса вращения, образованного касательными к поверхности Σ в точке нагружения.

2. О бифуркации процесса и состояния идеализированной модели пластины. Рассмотрим модель В. Д. Ключникова, состоящую из двух параллельных квадратных пластинок $2a \times 2a$ с общей площадью поперечного сечения f на расстоянии $2h$ одна от другой и деформируемых в своей плоскости двумя парами жестких рычагов (см. фиг. 1 работы [9]). Концы рычагов и действующие на них силы P_x, P_y остаются в плоскости xu ; процесс изменения сил во времени t произвольный. При достижении комбинацией $P_x = f\sigma_x, P_y = f\sigma_y$ некоторых критических значений P_x^*, P_y^* , зависящих от истории нагружения, плоская форма равновесия становится неустойчивой, происходит выпучивание модели.

В бесконечно малой окрестности точки разветвления условия равновесия внешних и внутренних сил и моментов, а также связь между приращением деформации и прогибом dw центра модели даются уравне-

ниями [9]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} dQ_x + dQ_y &= 0 \\ P_i dw + LdQ_i &= hf/2 (d\sigma_i^+ - d\sigma_i^-) \\ dw &= aL/2h (d\varepsilon_i^+ - d\varepsilon_i^-) \quad (i \sim x, y; a \ll L) \end{aligned}$$

где dQ_i — реакции опор при выпучивании, $d\sigma_i^\pm$, $d\varepsilon_i^\pm$ — дополнительные к исходному состоянию напряжения и деформации. (Здесь и в дальнейшем индексом плюс отмечаются величины, относящиеся к верхней, а минус — к нижней пластине модели. Напряжения и деформацию сжатия считаем положительными; разгрузку нижней пластинки в процессе выпучивания не исключаем из рассмотрения.)

Переходя к переменным

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{1/2} (\sigma_x - \sigma_y), \quad S_2 = \sqrt{1/6} (\sigma_x + \sigma_y) \\ E_1 &= \sqrt{1/2} (\varepsilon_x - \varepsilon_y), \quad E_2 = \sqrt{1/6} (\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad S_i = E_i = 0, \quad i \geq 3 \end{aligned}$$

из уравнений (2.1) после исключения dQ_x и dQ_y получаем

$$dE_1^+ = dE_1^-, \quad \frac{aL}{h^2} S_2 (dE_2^+ - dE_2^-) = \sqrt{\frac{2}{3}} (dS_2^+ - dS_2^-)$$

В проекциях на оси вспомогательной системы координат $S_1' S_2'$ (фиг. 1) последние соотношения можно переписать так:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} dE_1'^+ \cos 2\kappa^+ - dE_1'^- \cos 2\kappa^- &= dE_2'^+ \sin 2\kappa^+ - \\ &- dE_2'^- \sin 2\kappa^- \\ \frac{aL}{h^2} S_2 (dE_1'^+ \sin 2\kappa^+ - dE_1'^- \sin 2\kappa^- + dE_2'^+ \cos 2\kappa^+ - dE_2'^- \cos 2\kappa^-) &= \\ = \sqrt{\frac{2}{3}} (dS_1'^+ \sin 2\kappa^+ - dS_1'^- \sin 2\kappa^- + dS_2'^+ \cos 2\kappa^+ - dS_2'^- \cos 2\kappa^-) \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала задачу определения критической нагрузки в постановке Шенли. Пусть вследствие приращения догрузки dP_i ($P_i dP_i > 0$) в бесконечно малой окрестности точки ветвления процесс деформации происходит без замораживания систем скольжения как в верхней, так и нижней пластинках модели. В дальнейшем будет показано, что такое предположение приводит к минимальной критической нагрузке.

В рассматриваемом случае полного догружения получаем

$$(2\beta^*)^+ = (2\beta^*)^-, \quad 2\kappa^+ = 2\kappa^-$$

и на основании формул (1.9) имеем

$$dS_1'^\pm = G_p (2\beta^*) dE_1'^\pm, \quad dS_2' = G_g (2\beta^*) dE_2'^\pm$$

С учетом последних зависимостей из второго уравнения (2.2) для критической нагрузки по Шенли ($S_2 = S_2^*$) получаем

$$(2.3) \quad S_2^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{aL} [G_p (2\beta^*) \sin^2 2\kappa + G_g (2\beta^*) \cos^2 2\kappa]$$

Частичное или полное замораживание скольжений приводит согласно (1.2) и (1.4) к увеличению модулей G_p и G_g , поэтому формула (2.3), полученная в предположении полного догружения в начальный момент выпу-

чивания модели пластины, определяет минимальную критическую нагрузку.

Рассмотрим теперь задачу определения критической нагрузки $S_2 = S_2^{**}$ по Карману. В этом случае $dP_i = 0$ и векторы приращения догрузки dS^\pm в верхней и нижней пластинках модели равны по величине и противоположны по знаку

$$dS^- = -dS^+, \quad \beta^- = \pi + \beta^+$$

Не накладывая здесь предварительно ограничений на величину углов направления догрузки β^+ и β^- , из (1.9) для верхней и нижней пластинки модели можем записать

$$dS_1'^{\pm} = G_p^{\pm} dE_1'^{\pm}, \quad dS_2'^{\pm} = G_g dE_2'^{\pm}$$

При этом из первого уравнения системы (2.2) получаем

$$(2.4) \quad \left(\frac{\sin 2\kappa^+}{G_g^+} + \frac{\sin 2\kappa^-}{G_g^-} \right) \operatorname{tg} \beta^+ - \left(\frac{\cos 2\kappa^+}{G_p^+} + \frac{\cos 2\kappa^-}{G_p^-} \right) = 0$$

Принимая во внимание, что при заданном докритическом состоянии модули G_p^\pm, G_g^\pm и параметры $2\kappa^\pm$ — функции угла β^+ , заключаем, что последнее уравнение служит определению направления догрузки dS^+ ($dS^- = -dS^+$) при бифуркации состояния по Карману.

Можно показать, что решение $\beta^+ = \beta_k^+$ уравнения (2.4), если β_k^+ не превосходит значений β_0 и β^* , дается формулой

$$(2.5) \quad \operatorname{tg} \beta_k^+ = \left(1 + \frac{2G}{G_p} \right) \left(1 + \frac{2G}{G_g} \right)^{-1} \operatorname{ctg} 2\kappa$$

Здесь G_p, G_g и 2κ вычисляются в момент $t_B = 0$, предшествующий бифуркации состояния. При этом бифуркация сопровождается полным догружением верхней и разгрузкой по упругому закону нижней пластинки модели. Следовательно, можем записать

$$(2.6) \quad \begin{aligned} dS_1'^+ &= G_p dE_1'^+, & dS_2'^+ &= G_g dE_2'^+ \\ dS_2'^- &= 2G dE_2'^-, & dS_2'^- &= 2G dE_2'^- \end{aligned}$$

Если зависимости (2.6) подставить во второе уравнение (2.2), то для критической нагрузки по Карману получим

$$(2.7) \quad \begin{aligned} S_2^{**} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{aL} (D_p \sin^2 2\kappa + D_g \cos^2 2\kappa) \\ D_p &= 2G_p \left(1 + \frac{G_p}{2G} \right)^{-1}, & D_g &= 2G_g \left(1 + \frac{G_g}{2G} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Так как $D_p > G_p, D_g > G_g$, то простое сопоставление формул (2.3) и (2.7) приводит к условию

$$S_2^* < S_2^{**}$$

Равенство $S_2^* = S_2^{**}$ возможно только в пределах упругости, когда $G_p = G_g = 2G$, и для критической нагрузки ($S_2 = S_{2e}$) имеем

$$S_{2e} = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{Gh^2}{aL}$$

С ростом в докритическом состоянии величины пластической деформации может оказаться, что решение β_k^+ уравнения (2.4) не удовлетворяет условию $\beta_k^* < \beta^*$ и β_0 . (Это может иметь место в случае $\beta^* < \beta_0$.) Тогда векторы dS^+ и dS^- одновременно или только dS^- выходят из зон полного догружения и разгрузки соответственно и попадают в зоны неполного догружения. В этом случае формулу для S_2^{**} нельзя представить в компактном явном виде, однако и здесь, как показывают численные расчеты, условие $S_2^* < S_2^{**}$ остается в силе. Таким образом показано, что бифуркация процесса модели пластины предшествует бифуркации состояния. Как отмечалось выше, этот вывод является обобщением известного результата работ [10-12] на случай дифференциально-нелинейного варианта теории пластичности, основанного на концепции скольжения.

3. О зависимости критической нагрузки по Шенли от истории нагружения. Изучению этого вопроса посвящены, в частности, работы [18-20]. Ниже некоторые аспекты влияния истории нагружения на критические параметры рассматриваются на основании формулы (2.3), записанной для произвольных путей нагружения модели пластины.

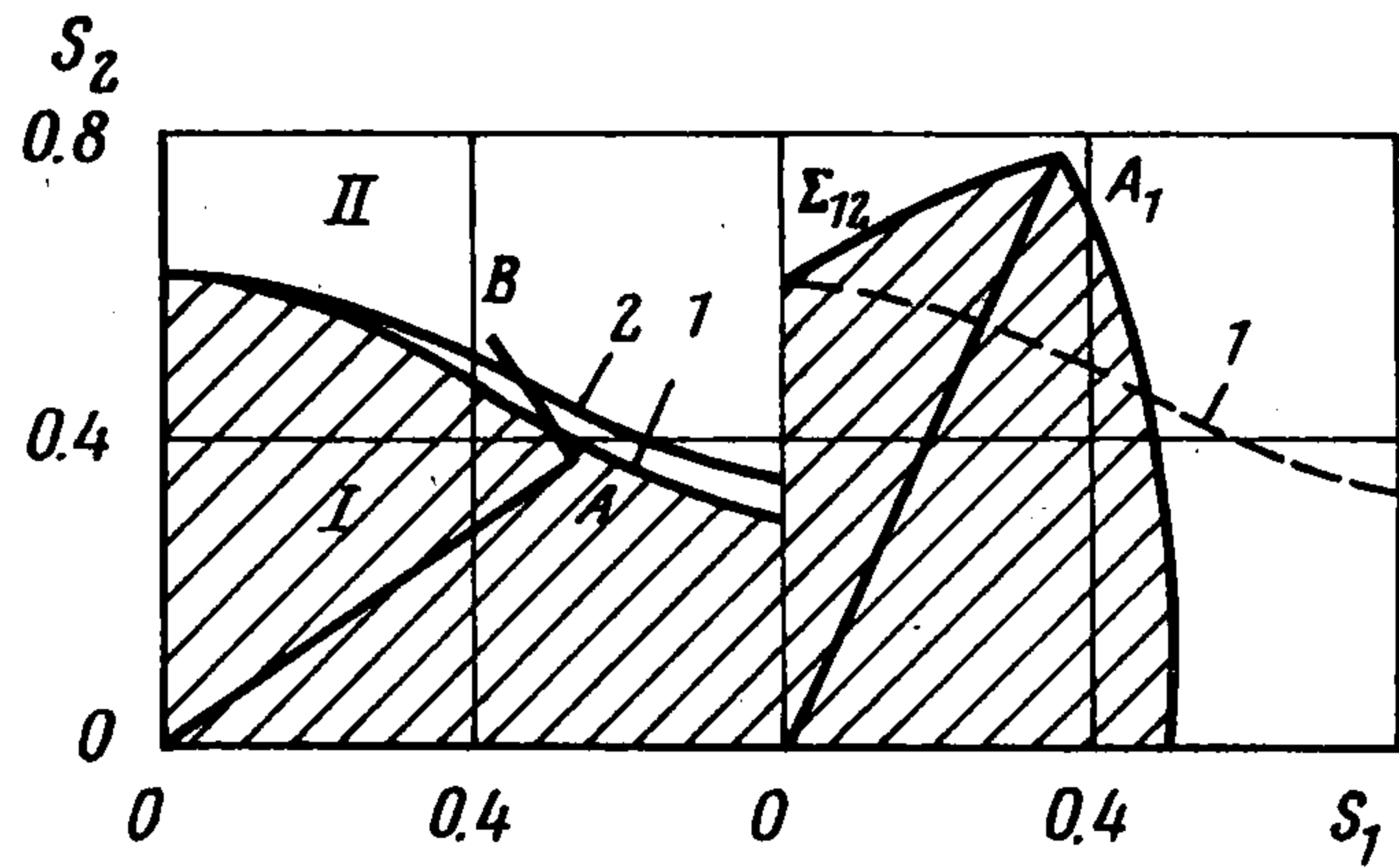
Если процесс деформации в докритическом состоянии монотонный [1], в частности, пропорциональный, то используемый дифференциально-нелинейный вариант теории пластичности вырождается в теорию деформаций Генки — Надаи. В этом случае, как показано в работе [19], существует область абсолютной устойчивости I (фиг. 2). Если дополнительно учесть, что при монотонной деформации $G_p = 2/3 E_t$, $G_g = 2/3 E_s$, где E_s и E_t — секущий и касательный модули диаграммы $\sigma_u \sim \epsilon_u$ при простом нагружении, то на основании формулы (2.3) уравнение линии 1, ограничивающей область I, можно представить в виде

$$\frac{S^*}{S_{2e}} = \frac{E_s}{2G} \left(\frac{1}{\sin 2\kappa} - n \sin 2\kappa \right) \quad \left(S^* = \frac{S_2^*}{\sin 2\kappa}, \quad n = 1 - \frac{E_t}{E_s} \right)$$

Указанная линия построена на фиг. 2 для алюминиевого сплава АК-6 ($G = 0.27 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\tau_s = 410 \text{ кг/см}^2$, $c = 0,105 \pi$, $F = k \ln(c/\omega)$, $G/k = 8.5$). При расчетах величина критической нагрузки S_{2e} принята за единицу и при $2\kappa = \pi/2$ положено $S_2^*/S_{2e} = 0.6$. Зона $S_{2e} > 1$ — зона упругой неустойчивости.

Нарушение в докритическом состоянии условий монотонности, так же как и в момент бифуркации, приводит к увеличению модулей G_p , G_g и в целом к возрастанию критической нагрузки. В связи с этим I — область абсолютной устойчивости и при немонотонных путях активного нагружения. Изменение величины S_2^* при нагружении по двузвенной траектории OAB с углом излома $\pi/2$ показано на фиг. 2 линией 2. Расхождение между кривыми 1 и 2 незначительно. К аналогичному выводу приходят авторы работ [21] по экспериментальному исследованию влияния истории нагружения на величину критических параметров цилиндрической оболочки, нагруженной осевой силой и внутренним давлением по двузвенным траекториям. Отметим, что в рассматриваемых случаях главные оси тензора напряжений при сложном нагружении сохраняли свое постоянное направление. Есть основания полагать, что влияние истории на критическую нагрузку тонкостенных элементов конструкций может быть существенным при сложном нагружении с поворотом главных осей тензора напряжений.

Для модели, как это следует из формулы (2.3), значительное повышение S_2^* достигается на путях нагружения, близких к полному замораживанию систем скольжения, когда $G_p, G_g \rightarrow 2G$. Заслуживает внимания также следующая возможность. Область внутри начальной Σ_{12}^0 или последующей Σ_{12} линии нагружения (фиг. 2), удовлетворяющая условию $S_2 < S_{2e}$, является областью упругой устойчивости. Следовательно, значительное повышение S_2^* можно получить (достичь точек зоны II) путем предвари-



Фиг. 2

тельного нагружения модели в пластической области за пределы бифуркации, что осуществимо при наложении дополнительных кинематических связей. Разгрузка и повторная нагрузка внутри линии Σ_{12} при снятых дополнительных связях не приводит к бифуркации равновесия, если $S_2^* < S_{2e}$. Обсуждение аналогичной возможности имеется, в частности, в работе [20].

Поступила 29 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Швайко Н. Ю. Уравнения упругопластического состояния линейной анизотропно упрочняющейся среды. Изв. АН КиргССР, 1966, № 2.
2. Швайко Н. Ю. К теории линейной анизотропно-упрочняющейся среды. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
3. Швайко Н. Ю. Методы решения уравнений, описывающих законы деформирования линейной анизотропно-упрочняющейся плоско-пластической среды. В сб.: Сложная деформация твердого тела. Фрунзе, «Илим», 1969.
4. Швайко Н. Ю., Клышевич Ю. В., Рычков Б. А. Линейная анизотропно упрочняющаяся среда. В сб.: Пластичность и хрупкость. Фрунзе, «Илим», 1967.
5. Кудряшов Н. Н., Рычков Б. А., Швайко Н. Ю. Теоретическое и экспериментальное исследование законов деформирования алюминиевого сплава АК-6 при сложном нагружении. Изв. АН КиргССР, 1970, № 1.
6. Швайко Н. Ю., Макаренко А. Г. и др. О пределах применимости теории малых упругопластических деформаций при непропорциональном нагружении сплава ВТ-6С. Прикл. механ., 1976, т. 12, вып. 2.
7. Леонов М. Я., Швайко Н. Ю. Сложная плоская деформация. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 5.
8. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М., Изд-во АН СССР, 1963.
9. Ключников В. Д. Устойчивость процесса сжатия идеализированной пластинки. Инж. ж. МТТ, 1966, № 4.
10. Ключников В. Д. Бифуркация процесса деформирования и концепция продолжающегося нагружения. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5.
11. Hill R. Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. J. Mech. and Phys. Solids, 1959, vol. 7, No. 3, p. 209—225.
12. Chakrabarty J. On the problem of uniqueness under pressure loading. Z. angew. Math. und Phys., 1969, Bd 20, Nr 5, S. 676—706.
13. Ключников В. Д. О возможном пути построения соотношений пластичности. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
14. Швайко Н. Ю. О развитии деформационной анизотропии при монотонном нагружении линейной анизотропно-упрочняющейся плоско-пластической среды. В сб.: Деформация неупругого тела. Фрунзе, «Илим», 1970.
15. Швайко Н. Ю., Кудряшов Н. Н. Деформация линейной анизотропно-упрочняющейся среды при нагружении по двузвенной ломаной. В сб.: Сложная деформация твердого тела. Фрунзе, «Илим», 1969.
16. Черняевский Ю. Е. Связь между напряжениями и деформациями при нагружении по трехзвенным траекториям. В сб.: Устойчивость и прочность элементов конструкций, вып. 2. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1975.
17. Швайко Н. Ю. О возможном общем виде функции упрочнения линейной плоско-пластической среды. В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости, вып. 14. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1972.
18. Геммерлинг Г. А. Влияние пути нагружения на характерный размер пластины, при котором происходит ее выпучивание. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1.
19. Ключников В. Д. О зависимости критических нагрузок от истории нагружения упругопластических пластин. В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М., «Машиностроение», 1975.
20. Ключников В. Д. О некоторых особенностях явления неустойчивости за пределами упругости. В кн.: Успехи механики деформируемых сред. М., «Наука», 1975.
21. Божинский А. Н., Пономарев А. Т. Экспериментальное исследование выпучивания цилиндрических оболочек при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 10.