Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В. П. Тен

(Кемерово)

Рассматриваются установившиеся колебания жесткого штампа на границе вязкоупругой полуплоскости. Вне области контакта усилия отсутствуют, а внутри допускается отсутствие трения, трение по закону Кулона либо сцепление штампа с полуплоскостью.

Система интегральных уравнений первого рода, получаемая при помощи преобразования Фурье, сводится дифференцированием по координате и выделением особенностей ядер к системе сингулярных интегральных уравнений. Последняя при нулевой частоте колебаний совпадает с уравнениями аналогичной статической задачи теории упругости. Точные решения статической задачи используются для регуляризации системы по Карлеману — Векуа при ненулевой частоте колебаний.

Низкочастотная асимптотика ядер системы исследуется контурным интегрированием и привлечением асимптотических свойств преобразования Лапласа. Решение системы строится в первом приближении для малых частот колебаний.

Колебания штампа на упругой полуплоскости без сил трения изучались в [1,2], результаты исследования задачи со сцеплением сообщались на Всесоюзной зимней школе [1].

1. Основные уравнения. Будем предполагать, что вязкоупругая среда заполняет полуплоскость $y \leqslant 0$. Выведем основные соотношения при условии, что в области контакта $|x| < a$ заданы смещения, а вне этой области отсутствуют усилия: $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

Комплексные амплитуды перемещений вязкоупругой полуплоскости удовлетворяют системе уравнений

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u = -\rho\omega^2 u \quad \left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{1.1}$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v = -\rho\omega^2 v$$

Амплитуды перемещений связаны с амплитудами напряжений соотношениями

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.2}$$

$$\lambda = \lambda_0\left[1 - \int_0^\infty \Lambda(x)\, e^{-i\omega x} dx\right], \quad \mu = \mu_0\left[1 - \int_0^\infty M(x)\, e^{-i\omega x} dx\right]$$

---

[1] *Златина И. Н., Зильберглейт А. С.* Применение парных интегральных уравнений к динамической контактной задаче о колебаниях жесткого штампа на упругом полупространстве. «Контактные задачи механики деформируемых твердых тел». Ереван, 1976.

Здесь λ_0 и μ_0 — мгновенные модули упругости среды, Λ и M — ядра наследственности, ω — частота установившихся колебаний. Предполагается, что в предельном случае $\omega = 0$ комплексные модули λ и μ отличны от нуля.

К уравнениям (1.1) присоединим граничные условия

$$(1.3) \qquad u = f(x), \quad v = g(x) \quad \text{при } y = 0, \ |x| < a$$
$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \ |x| \geqslant a$$

Введем безразмерные координаты, перемещения и напряжения

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad U = \frac{u}{a}, \quad V = \frac{v}{a}, \quad s_\eta = \frac{1}{\mu}\sigma_y, \ t_{\xi\eta} = \frac{1}{\mu}\tau_{xy}$$

Граничные значения s_η и $t_{\xi\eta}$ в области контакта обозначим через $-p(\xi)$ и $q(\xi)$ соответственно.

Применяя к (1.1) — (1.3) обобщенное преобразование Фурье [3] по ξ, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями при $\eta = 0$. Решив эту систему и обратив преобразование, а затем продифференцировав соотношения по ξ, получим в области контакта систему интегральных уравнений первого рода

$$(1.4) \qquad \beta V'(\xi, 0) = \frac{i}{4\pi}\int_{-1}^{1} G_{11}(x-\xi)\,p(x)\,dx - \frac{n^2}{4\pi}\int_{-1}^{1} G_{12}(x-\xi)\,q(x)\,dx$$

$$\beta U'(\xi, 0) = -\frac{n^2}{4\pi}\int_{-1}^{1} G_{21}(x-\xi)\,p(x)\,dx - \frac{i}{4\pi}\int_{-1}^{1} G_{22}(x-\xi)\,q(x)\,dx$$

$$\left(\beta = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \quad n^2 = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}, \quad G_{ij}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{ij}e^{ikz\zeta}k\,d\zeta,\right.$$
$$\left. k = a\omega\left|\frac{\rho}{\mu}\right|^{1/2}\right)$$

Функции $g_{ij}(\zeta, k_1, k_2)$ имеют вид

$$g_{11} = \frac{(1-n^2)\zeta r_1}{2R(\zeta, k_1, k_2)}, \quad g_{22} = \frac{(1-n^2)\zeta r_2}{2R(\zeta, k_1, k_2)}$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\frac{(\varkappa - r_1 r_2)\zeta^2}{R(\zeta, k_1, k_2)}$$

$$r_1 = \sqrt{\zeta^2 - k_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{\zeta^2 - k_2^2}, \quad \varkappa = \zeta^2 - {}^1\!/_2 k_2^2, \quad R = r_1 r_2 \zeta^2 - \varkappa^2$$

$$\left(k_1^2 = \frac{|\mu|}{\lambda+2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{|\mu|}{\mu}, \quad -\frac{\pi}{4} < \arg k_{1,2} \leqslant 0\right)$$

Для того, чтобы напряжения исчезали на бесконечности, корни на вещественной оси должны иметь разложения (что автоматически обеспечивает выполнение принципа излучения в упругом решении)

$$r_1 = |\zeta|\left(1 - \frac{k_1^2}{2\zeta^2} - \frac{k_1^4}{8\zeta^4} - \ldots\right), \quad r_2 = |\zeta|\left(1 - \frac{k_2^2}{2\zeta^2} - \frac{k_2^4}{8\zeta^4} - \ldots\right)$$

Отсюда получаем разложения для функций g_{ij} при $|\zeta| \gg 1$

$$g_{11} = \operatorname{sign}\zeta\left[1 + \frac{3-4n^2+3n^4}{4(1-n^2)}\frac{k_2{}^2}{\zeta^2} + \ldots\right] \tag{1.5}$$

$$g_{22} = \operatorname{sign}\zeta\left[1 + \frac{1-n^2+n^4}{4(1-n^2)}\frac{k_2{}^2}{\zeta^2} + \ldots\right]$$

$$g_{12} = g_{21} = 1 + \frac{1+n^4}{4n^2(1-n^2)}\frac{k_2{}^2}{\zeta^2} + \ldots$$

Используя это обстоятельство, а также формулы [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{it(x-\xi)}dt = 2\pi\delta(x-\xi), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} t e^{it(x-\xi)}dt = \frac{2i}{x-\xi}$$

ядра системы (1.4) можно привести к виду

$$G_{nn} = \frac{2i}{x-\xi} + h_{nn}(x-\xi), \qquad G_{12} = G_{21} = 2\pi\delta(x-\xi) + h_{12}(x-\xi)$$

$$h_{nn}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (g_{nn} - \operatorname{sign}\zeta)\, e^{ikz\zeta}kd\zeta \quad (n = 1, 2)$$

$$h_{12}\ (z)\ \int_{-\infty}^{\infty} (g_{12} - 1)\, e^{ikz\zeta}kd\zeta$$

Так как функции g_{11}, g_{22} нечетны, а g_{12} четна по ζ, то интегрирование можно выполнить лишь на интервале $(0, \infty)$, что позволит рассматривать одну ветвь корней r_1 и r_2. Опуская выкладки, приводим окончательный вид системы (1.4)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(x)}{x-\xi}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} h_{11}^* p(x)\,dx + \frac{n^2}{2}q(\xi) + \frac{n^2}{2\pi}\int_{-1}^{1} h_{12}^* q(x)\,dx = \psi \tag{1.6}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{q(x)}{x-\xi}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} h_{22}^*\, q(x)\,dx + \frac{n^2}{2}p(\xi) +$$

$$+\frac{n^2}{2\pi}\int_{-1}^{1} h_{21}^*\, p(x)\,dx = \varphi$$

$$\left(\psi = -\frac{\beta}{a}g_\xi', \quad \varphi = -\frac{\beta}{a}f_\xi'\right)$$

Ее ядра

$$h_{nn}^* = \int_0^{\infty}(g_{nn}-1)\sin[k(x-\xi)\zeta]\,kd\zeta \quad (n = 1, 2) \tag{1.7}$$

$$h_{12}^* = h_{21}^* = \int_0^{\infty}(g_{12}-1)\cos[k(x-\xi)\zeta]\,kd\zeta$$

непрерывны в силу оценок (1.5).

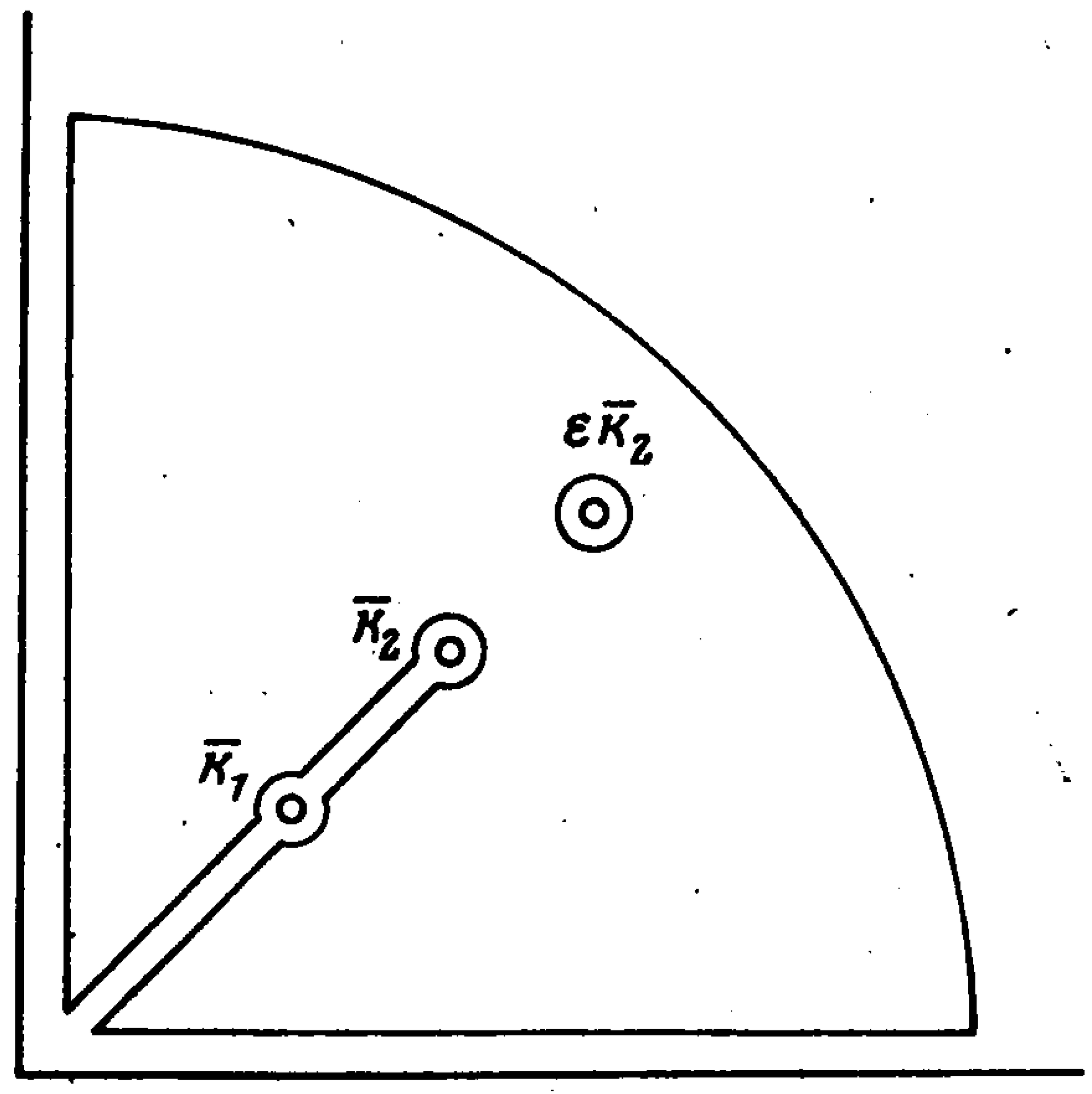
Систему (1.6) легко регуляризовать по Карлеману — Векуа, так как при $\omega = 0$ (1.6) переходит в обычные статические уравнения теории упругости. Конечный результат регуляризации зависит от типа условий под штампом.

2. Оценка ядер системы (1.6). Для определенности рассмотрим ядро $h_{11}^*(z)$. Идея оценки ядра заключается в переходе интегрирования с вещественной оси на мнимую.

Выделим предварительно вещественную и мнимую части h_{11}^*. В правой полуплоскости комплексного переменного ζ определим ветви корней r_1 и r_2 разложениями

$$r_1 = \zeta - \frac{k_1^2}{2\zeta} - \ldots,$$

$$r_2 = \zeta - \frac{k_2^2}{2\zeta} - \ldots$$



Определим ветви для сопряженных $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ аналогичными разложениями

$$r_1^* = \sqrt{\zeta^2 - \bar{k}_1^2} = \zeta - \frac{\bar{k}_1^2}{2\zeta} - \ldots,$$

$$r_2^* = \sqrt{\zeta^2 - \bar{k}_2^2} = \zeta - \frac{\bar{k}_2^2}{2\zeta} - \ldots$$

На вещественной оси r_n и r_n^* комплексно-сопряжены. Это позволяет выделить действительную и мнимую части h_{11}^* в форме

$$\operatorname{Re} h_{11}^* = \frac{k}{2} \operatorname{sign} z \operatorname{Im} \int_0^\infty [g_{11}(\zeta, k_1, k_2) + g_{11}(\zeta, \bar{k}_1, \bar{k}_2) - 2]\, e^{ik|z|\zeta} d\zeta$$

$$\operatorname{Im} h_{11}^* = -\frac{k}{2} \operatorname{sign} z \operatorname{Re} \int_0^\infty [g_{11}(\zeta, k_1, k_2) - g_{11}(\zeta, \bar{k}_1, \bar{k}_2)]\, e^{ik|z|\zeta} d\zeta$$

В первом квадранте плоскости ζ подынтегральные функции имеют точки ветвления $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ и полюс $\varepsilon\bar{k}_2$ в нуле релеевской функции $R(\zeta, \bar{k}_1, \bar{k}_2)$. На бесконечности в силу оценок (1.5) они убывают как ζ^{-2}.

Для упрощения выкладок предположим, что $\Lambda \equiv \mathrm{M}$. Тогда разрезы до $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ сольются в один, а n станет вещественным. Интегрируя по контуру, показанному на фигуре, после объединения действительной и мнимой частей h_{11}^* получим

$$h_{11}^* = k \operatorname{sign} z \left\{ \frac{1-n^2}{2} \left[R_{11} k_2 e^{iw\varepsilon} + \int_0^n P_{11} e^{iwt} dt + \int_n^1 S_{11} e^{iwt} dt \right] + \right. \tag{2.1}$$

$$\left. + \int_0^\infty [g_{11}(it, k_1, k_2) - 1]\, e^{-k|z|t} dt \right\}$$

$$R_{11} = 2\pi(\varepsilon^2 - n^2)\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\, r, \quad P_{11} = t\sqrt{n^2 - t^2}\, l,$$

$$S_{11} = (t^2 - n^2)\sqrt{1 - t^2}\, m$$

$$r^{-1} = 4\varepsilon^4 - 3(1 + n^2)\varepsilon^2 + 2n^2 - 4(\varepsilon^2 - 1/2)\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\sqrt{\varepsilon^2 - n^2},$$

$$w = k|z|k_2$$

$$l^{-1} = (1/2 - t^2)^2 + t^2\sqrt{1 - t^2}\sqrt{n^2 - t^2},$$

$$m^{-1} = t^4(t^2 - n^2)(1 - t^2) + (t^2 - 1/2)^4$$

Аналогичным способом получаем

$$
(2.2)\qquad h_{22}^{*} = k\operatorname{sign} z\left\{\frac{1-n^2}{2}\left[R_{22}k_2e^{iw\varepsilon}+\int_0^n P_{22}e^{iwt}dt+\int_n^1 S_{22}e^{iwt}dt\right]+\right.
$$

$$
\left.+\int_0^\infty [g_{22}(it,k_1,k_2)-1]\,e^{-k|z|t}dt\right\}
$$

$$
R_{22}=2\pi(\varepsilon^2-1)\sqrt{\varepsilon^2-n^2}\,r,\quad P_{22}=t\sqrt{1-t^2}\,l,
$$

$$
S_{22}=t(1-t^2)\sqrt{t^2-n^2}\,m
$$

В отличие от h_{11}^* и h_{22}^* ядро h_{12}^* содержит лишь вычет в точке $\varepsilon\bar{k}_2$ и интеграл по берегам разреза $(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$

$$
(2.3)\qquad h_{12}^{*} = -\frac{1-n^2}{2n^2}kik_2\left[R_{12}e^{iw\varepsilon}+\int_n^1 S_{12}e^{iwt}dt\right]
$$

$$
R_{12}=2\pi\left[\sqrt{\varepsilon^2-1}\sqrt{\varepsilon^2-n^2}\,(\varepsilon^2-{}^1/_2)+(1+n^2)\varepsilon^2-n^2-\varepsilon^4\right]r
$$

$$
S_{12}=\sqrt{1-t^2}\sqrt{t^2-n^2}\,(t^2-{}^1/_2)\,t^2m
$$

Оценку для h_{12}^* при $k\ll 1$ можно получить разложением в ряд экспоненты в (2.3). В первом приближении

$$
(2.4)\qquad h_{12}^{*} = -i\frac{1-n^2}{2n^2}\left(R_{12}+\int_n^1 S_{12}dt\right)k_2k=-ih
$$

Выражения в фигурных скобках соотношений (2.1) и (2.2) равны нулю при $k=0$. Используя это обстоятельство, оценки (1.5), а также асимптотические свойства преобразования Лапласа [4], получаем

$$
(2.5)\qquad h_{11}^{*} = -\frac{3-4n^2+3n^4}{4(1-n^2)}k_2{}^2zk^2\ln\frac{1}{k}=-bz
$$

$$
h_{22}^{*} = -\frac{1-n^2+n^4}{4(1-n^2)}k_2{}^2zk^2\ln\frac{1}{k}=-cz
$$

3. Контактные задачи для плоского штампа. Исследуем низкочастотные колебания штампа под действием сил и момента с амплитудами

$$
P_0=\int_{-1}^{1}p(\xi)\,d\xi,\quad Q_0=\int_{-1}^{1}q(\xi)\,d\xi,\quad M_0=-\int_{-1}^{1}\xi p(\xi)\,d\xi
$$

Амплитуду угла поворота штампа обозначим через α, так что

$$
\psi=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\alpha,\quad \varphi=0
$$

Допустим, что в области контакта отсутствуют силы трения. В этом случае $q(x)\equiv 0$ и система (1.6) вырождается в одно уравнение

$$
(3.1)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(x)}{x-\xi}dx=\frac{b}{2\pi}\int_{-1}^{1}(x-\xi)\,p(x)\,dx-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\alpha
$$

При $k=0$ (3.1) обращается в известное уравнение статики. Используя статическое решение [5], произведем регуляризацию (3.1) по Карлеману — Векуа [6]. Опуская выкладки, приводим окончательный результат

$$p(\xi)=\frac{P_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}-\frac{2(\lambda+\mu)\alpha\xi}{(\lambda+2\mu)\sqrt{1-\xi^2}}+\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x\xi-\xi^2+{}^1/_2}{\sqrt{1-\xi_2}}p(x)\,dx \tag{3.2}$$

В первом приближении решение (3.2) имеет вид

$$p(\xi)=\frac{P_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\left[1+\frac{b}{2}(1-2\xi^2)\right]-\frac{2(\lambda+\mu)\alpha\xi}{(\lambda+2\mu)\sqrt{1-\xi^2}}\left(1+\frac{b}{2}\right)$$

$$\left(\frac{b}{2}=\frac{3-4n^2+3n^4}{8(1-n^2)}k_2{}^2k^2\ln\frac{1}{k}\right)$$

Найденное решение позволяет определить связь между амплитудами момента сил и угла поворота штампа. Интегрируя, получаем

$$M_0=\pi\alpha\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left(1+\frac{b}{2}\right)$$

Пусть в области контакта действуют силы трения по закону Кулона $q(x)=\nu p(x)$ $(\nu>0)$. Система (1.6) сводится к одному уравнению

$$\frac{\nu n^2}{2}p(\xi)+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(x)}{x-\xi}dx=\psi+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}[b(x-\xi)+i\nu n^2h]\,p(x)\,dx \tag{3.3}$$

Обозначим правую часть (3.3) через $F(\xi)$. Вводя аналитическую функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{p(x)}{x-z}dx$$

получаем вместо (3.3) задачу сопряжения на интервале $(-1,1)$

$$\Phi^+=-\frac{i-\nu n^2}{i+\nu n^2}\Phi^-+\frac{2}{i+\nu n^2}F$$

имеющую решение

$$\Phi(z)=-\frac{P_0}{2\pi i}X(z)+\frac{2}{i+\nu n^2}\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{F(\xi)\,d\xi}{X^+(\xi)(\xi-z)}$$

где X — ветвь функции

$$X(z)=(z+1)^{-1/_2-\theta}(z-1)^{-1/_2+\theta}\quad\left(e^{2\pi i\theta}=\frac{i-\nu n^2}{i+\nu n^2},\quad 0\leqslant\theta<\frac{1}{2}\right)$$

определяемая разложением на бесконечности $X={}^1/z+\ldots$.

Вычисляя интегралы и скачки функций, приходим к уравнению

$$p(\xi)=\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\theta}\frac{\cos\pi\theta}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\frac{P_0}{\pi}+2\psi(\xi+2\theta)+2\int_{-1}^{1}K(x,\xi)\,p(x)\,dx\right] \tag{3.4}$$

$$K(x,\xi)=(bx+i\nu n^2h)(\xi+2\theta)-(\xi^2+2\theta\xi-{}^1/_2+2\theta^2)b$$

Решение (3.4) в первом приближении имеет вид

$$p(\xi)=\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\theta}\frac{\cos\pi\theta}{\sqrt{1-\xi^2}}\left\{\frac{P_0}{\pi}\left[1+i\nu n^2h\left(\theta+\frac{1}{2}\xi\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{b}{2}(1-2\xi^2-8\xi\theta-12\theta^2)\right]-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\alpha(\xi+2\theta)\times$$
$$\left.\times\left[1+\frac{b}{2}(1-4\theta^2)\right]\right\}$$

и совпадает при $k=0$ со статическим решением [5].

Подсчитывая момент сил, находим связь между M_0, P_0 и α

$$M_0 = P_0\left[2\theta - i\nu n^2 h\left(\frac{1}{4} - \theta^2\right) + \theta b\,\frac{9 - 32\theta^2}{6}\right] +$$

$$+ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\pi\alpha(1 - 4\theta^2)\left[1 + \frac{b}{2}(1 - 4\theta^2)\right]$$

Решения предыдущих задач имеют физический смысл лишь в том случае, когда на них наложены статические решения, обеспечивающие неотрицательность давления под штампом.

Пусть теперь штамп сцеплен с полуплоскостью. Перейдем для удобства от системы (1.6) заменой

(3.5) $$p = \varphi_1 + \varphi_2, \quad q = -i(\varphi_1 - \varphi_2)$$

к системе

(3.6) $$n^2\varphi_1 - \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1 dx}{x - \xi} - \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k_{11}\varphi_1 dx - \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k_{12}\varphi_2 dx = i\psi$$

$$n^2\varphi_2 + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2 dx}{x - \xi} + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k_{22}\varphi_2 dx + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k_{21}\varphi_1 dx = -i\psi$$

$$\left(k_{11} = -\frac{h_{11}^* + h_{22}^*}{2} - in^2 h_{12}^*,\ k_{22} = \frac{h_{11}^* + h_{22}^*}{2} + in^2 h_{12}^*\right.$$

$$\left.k_{12} = k_{21} = \frac{h_{11}^* - h_{22}^*}{2}\right)$$

Ядра системы (3.6) согласно оценкам (2.4) и (2.5) в первом приближении имеют вид

(3.7) $$k_{11} = -n^2 h - \frac{b + c}{2}(x - \xi), \quad k_{22} = n^2 h - \frac{b + c}{2}(x - \xi)$$

$$k_{12} = -\frac{b - c}{2}(x - \xi)$$

Произведем регуляризацию системы (3.6). Вводя аналитические функции

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1 dx}{x - z}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2 dx}{x - z}$$

вместо (3.6) получим задачи сопряжения

$$\Phi_1^+ = -\frac{1 + n^2}{1 - n^2}\Phi_1^- - \frac{A_1}{1 - n^2}$$

$$\left(A_1 = i\psi + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k_{11}\varphi_1 dx + \frac{1}{i}\int_{-1}^{1}k_{12}\varphi_2 dx\right)$$

$$\Phi_2^+ = -\frac{1 - n^2}{1 + n^2}\Phi_2^- + \frac{A_2}{1 + n^2}$$

$$\left(A_2 = -i\psi - \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}k_{22}\varphi_2 dx - \frac{1}{\pi i}\int_{1}^{1}k_{21}\varphi_1 dx\right)$$

Их решения имеют вид

(3.8)
$$\Phi_1(z) = c_1 X_1(z) - \frac{1}{1-n^2}\frac{X_1(z)}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{A_1 d\xi}{X_1^+(\xi)(\xi - z)}$$

$$\Phi_2(z) = c_2 X_2(z) + \frac{1}{1+n^2}\frac{X_2(z)}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{A_2 d\xi}{X_2^+(\xi)(\xi - z)}$$

$$X_1 = (z+1)^{-1/2+i\gamma}(z-1)^{-1/2-i\gamma}, \quad X_2 = (z+1)^{-1/2-i\gamma}(z-1)^{-1/2+i\gamma}$$

$$\left(\gamma = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+n^2}{1-n^2}, \quad X_1 = \frac{1}{z}+\ldots, \quad X_2 = \frac{1}{z}+\ldots\right)$$

$$c_1 = -\frac{1}{4\pi i}(P_0 + iQ_0), \quad c_2 = -\frac{1}{4\pi i}(P_0 - iQ_0)$$

Вычисляя квадратуры и скачки функций, получаем

(3.9)
$$\varphi_1 = \left\{c_1 + \frac{i\psi}{2}(\xi - 2\gamma i) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}k_{11}^*\varphi_1 dx - \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}k_{12}^*\varphi_2 dx\right\}[X_1]$$

$$\varphi_2 = \left\{c_2 + \frac{i\psi}{2}(\xi + 2\gamma i) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}k_{22}^*\varphi_2 dx - \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}k_{21}^*\varphi_1 dx\right\}[X_2]$$

$$k_{11}^* = \left(n^2 h + \frac{b+c}{2}x\right)(\xi - 2\gamma i) - \frac{b+c}{2}\left(\xi^2 - 2\gamma i\xi - \frac{1}{2} - 2\gamma^2\right)$$

$$k_{12}^* = \frac{b-c}{2}\left[(\xi - 2\gamma i)x - \xi^2 + 2\gamma i\xi + \frac{1}{2} + 2\gamma^2\right]$$

$$k_{22}^* = \left(-n^2 h + \frac{b+c}{2}x\right)(\xi + 2\gamma i) - \frac{b+c}{2}\left(\xi^2 + 2\gamma i\xi - \frac{1}{2} - 2\gamma^2\right)$$

$$k_{21}^* = \frac{b-c}{2}\left[(\xi + 2\gamma i)x - \xi^2 - 2\gamma i\xi + \frac{1}{2} + 2\gamma^2\right]$$

$$[X_1] = \frac{B}{i\sqrt{1-\xi^2}}e^{iA}, \quad [X_2] = \frac{B}{i\sqrt{1-\xi^2}}e^{-iA}$$

$$\left(B = \frac{2}{\sqrt{1-n^4}}, \quad A = \gamma\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)$$

В первом приближении решение (3.9) имеет вид

$$\varphi_1 = \left[c_1 a_1(\xi) + c_2 d(\xi) + \frac{i\psi}{2}(\xi - 2\gamma i)e\right][X_1]$$

$$\varphi_2 = \left[c_2 a_2(\xi) + c_1 d(\xi) + \frac{i\psi}{2}(\xi + 2\gamma i)e\right][X_2]$$

$$a_k(\xi) = 1 - 2n^2 h\gamma i + \frac{b+c}{2}\left(\frac{1}{2} - \xi^2 + 6\gamma^2\right) -$$
$$- (-1)^k[n^2 h + 2(b+c)\gamma i]\xi$$

$$d(\xi) = \frac{b-c}{2}\left(\frac{1}{2} - \xi^2 - 2\gamma^2\right), \; e = 1 + b\left(\frac{1}{2} + 2\gamma^2\right) \quad (k = 1,2)$$

Возвратимся теперь к p и q при помощи (3.5) и (3.8). Пусть на штамп действует только вертикальная сила с амплитудой P_0. Тогда

$$p(\xi) = P_0^*[f_n(k)\cos A + f_{ns}(k)\xi\sin A]$$

$$q(\xi) = P_0^*[f_n(k)\sin A - f_{ns}(k)\xi\cos A], \quad P_0^* = \frac{BP_0}{2\pi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Если на штамп действует лишь горизонтальная сила с амплитудой Q_0, то

$$p(\xi) = -Q_0^* [f_s(k) \sin A - f_{ns}(k) \xi \cos A]$$

$$q(\xi) = Q_0^* [f_s(k) \cos A + f_{ns}(k) \xi \sin A], \quad Q_0^* = \frac{BQ_0}{2\pi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Здесь

$$f_n(k) = 1 - 2n^2 h\gamma i + b(^1/_2 - \xi^2 + 2\gamma^2) + 4c\gamma^2$$

$$f_s(k) = 1 - 2n^2 h\gamma i + c(^1/_2 - \xi^2 + 2\gamma^2) + 4b\gamma^2$$

$$f_{ns}(k) = n^2 hi - 2(b+c)\gamma$$

Наконец, если штамп колеблется с амплитудой угла поворота α, то

$$p(\xi) = -\alpha^* (\xi \cos A + 2\gamma \sin A), \quad q(\xi) = -\alpha^* (\xi \sin A - - 2\gamma \cos A)$$

$$\alpha^* = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \frac{\alpha B}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[1 + b\left(\frac{1}{2} + 2\gamma^2\right)\right]$$

Умножая p на ξ и интегрируя, можно установить связь между M_0 и α

$$M_0 = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \pi\alpha \left[1 + b\left(\frac{1}{2} + 2\gamma^2\right)\right](1 + 4\gamma^2)$$

В заключение автор благодарит Л. А. Галина за внимание к работе.

Поступила 15 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородачев Н. М.* Об определении напряжений под колеблющимся фундаментом. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1962, № 3.
2. *Буряк В. Г.* Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1976.
4. *Dötsch G.* Handbuch der Laplace — Transformation, bd 3. Anw. Laplace — Transformation. Basel — Stuttgart, Birckhäuserverlag, 1956.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.