Прикладная математика и механика. Том 41, 1977

УДК 539.3

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ОТЫСКАНИЯ ФОРМ ОТВЕРСТИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

Н. В. Баничук

(Москва)

Отыскание оптимальных форм отверстий в упругих телах, вызывающих минимальную концентрацию напряжений, приводит к минимаксным задачам оптимизации с локальным критерием качества. В данной работе эти задачи рассматриваются в рамках плоской теории упругости и доказывается, что оптимальными являются отверстия с равнонапряженными границами.

Ранее задачи оптимизации границ исследовались в [1–4] в связи с отысканием форм скручиваемых стержней, обладающих максимальной крутильной жесткостью, а задачи построения равнонапряженных отверстий в пластинках — в [5–8].

1. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости о напряженном состоянии бесконечной пластинки, ослабленной отверстием. Обозначим через G в плоскости xy область, занимаемую материалом пластинки, а через Γ — границу отверстия. Предположим, что пластинка растягивается на бесконечности, а контур отверстия Γ свободен от прикладываемых нагрузок. Соответствующие краевые условия на Γ и условия в бесконечно удаленной точке запишем в виде

$$\sigma_n = 0, \quad \tau_n = 0 \quad (x, y) \in \Gamma \tag{1.1}$$
$$(\sigma_x)_\infty = \sigma_1, \quad (\sigma_y)_\infty = \sigma_2, \quad (\tau_{xy})_\infty = 0$$

где σ_1 и σ_2 — заданные положительные постоянные, а через n и t обозначены нормальное и касательное к контуру направления.

При заданной форме контура Γ распределение напряжений в области $G + \Gamma$ полностью определяется условиями (1.1). Как известно, использование функции напряжений φ, связанной с компонентами тензора напряжений соотношениями $\sigma_x = \varphi_{yy}$, $\sigma_y = \varphi_{xx}$, $\tau_{xy} = -\varphi_{xy}$, сводит задачу отыскания напряжений к решению бигармонического уравнения

$$\varphi_{xxxx} + 2\varphi_{xxyy} + \varphi_{yyyy} = 0 \quad (x, y) \in G \tag{1.2}$$

при граничных условиях (1.1). Нижними индексами в (1.2) обозначено дифференцирование по соответствующим переменным.

Для каждой точки $(x, y) \in G + \Gamma$ охарактеризуем напряженное состояние функцией F инвариантов тензора напряжений

$$F = F(I_1, I_2) \tag{1.3}$$
$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y, \quad I_2 = \tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y$$

Под F будем понимать функцию, достижение которой в точке $(x, y) \in G + \Gamma$ заданного значения k^2 (постоянная k^2 — характеристика материала) означает, что в указанной точке материал находится в предельном состоянии. Деформации материала упругие, если в соответствующих областях выполнено неравенство $F < k^2$. Нарушение этого неравенства трактуется в различных механических теориях как появление зон текучести, областей неупругих деформаций и разрыва сплошности материала и других эффектов. В дальнейших рассмотрениях будем интерпретировать условие $F = k^2$, как условие пластичности. Задание F выражениями

$$F = I_1^2 + 3I_2 \tag{1.4}$$

$$F = I_1^2 + 4I_2 \tag{1.5}$$

соответствует критериям пластичности Мизеса и Треска. Наряду с указанными двумя выражениями для F ниже будут рассмотрены и более общие зависимости F от инвариантов I_1 и I_2. При этом будет предполагаться, что выражение для F, представленное через компоненты тензора напряжений, является однородной функцией с показателем однородности, равным двум.

Пусть для заданного контура Γ при некоторых достаточно малых значениях параметров σ_1, σ_2 решена краевая задача (1.1), (1.2) и тем самым найдены напряжения $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$. Тогда можно определить множество точек $G_0 \subset G + \Gamma$, где реализуется максимум функции F

$$F_0 = (F)_{G_0} = \max_{xy} F, \quad (x,y) \in G + \Gamma$$

Если затем увеличивать значения $(\sigma_x)_\infty$ и $(\sigma_y)_\infty$ пропорционально некоторому параметру p, т. е. считать, что $(\sigma_x)_\infty = p\sigma_1$, $(\sigma_y)_\infty = p\sigma_2$, то при значении этого параметра $p_0 = k / \sqrt{F_0}$ в точках $(x, y) \in G_0$ впервые будет достигнуто пластическое состояние. Очевидно, что чем меньше значение F_0, тем при больших нагрузках (больших значениях p_0) в пластинке появляются пластические деформации. Поэтому расширение диапазона нагрузок, для которых деформации являются упругими и в пластинке не возникают зоны текучести, достигается за счет минимизации величины F_0.

Приходим к следующей оптимизационной задаче. Требуется определить форму контура Γ, для которого достигает минимума максимум по области $G + \Gamma$ величины F, т. е.

$$F_* = \min_\Gamma F_0 = \min_\Gamma \max_{xy} F \tag{1.6}$$

Сформулированная задача (1.1) — (1.3), (1.6) в силу локального характера оптимизируемого функционала относится к задачам оптимизации с локальными критериями качества. При отыскании минимума по Γ в (1.6) предполагается, что искомый контур не может стягиваться в точку, т. е. не допускается отсутствие полости. Форма контура отверстия играет роль «управляющей» функции, а уравнение (1.2) выступает в задаче оптимизации в качестве дифференциальной связи.

2. Прежде чем перейти к исследованию условий оптимальности в сформулированной задаче, отметим одно свойство гармонических функций, используемое в дальнейшем.

Пусть в плоскости xy имеется n отверстий, ограниченных замкнутыми контурами Γ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). В области G, ограниченной контуром $\Gamma = \Sigma\Gamma_k$ и содержащей бесконечно удаленную точку (G — внешность отверстий), рассмотрим семейство гармонических функций, непрерывных в $G + \Gamma$ и стремящихся на бесконечности к заданной положительной постоянной A. Для любой функции из этого семейства и принимаемых ею значений на границе Γ ($(\omega)_\Gamma = f$) согласно принципу максимума (см., например, [9]) имеет место неравенство

$$|\omega(x, y)| \leqslant \max_{\xi\eta} |f(\xi, \eta)|, \quad (x, y) \in G + \Gamma, \quad (\xi, \eta) \in \Gamma$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$A \leqslant \max_{\xi\eta} |f| \tag{2.1}$$

Если в неравенстве (2.1) реализуется знак строгого равенства, то функция ω тождественно равна постоянной A. Поэтому минимум по f функционала $\max_{\xi\eta}|f|$ ($(\xi, \eta) \in \Gamma$) достигается на единственной функции $f(\xi, \eta) \equiv \equiv A$ ($\omega(x, y) \equiv A$) рассматриваемого семейства и равен A, т. е.

$$\min_f \max_{\xi\eta} |f| = A \tag{2.2}$$

Указанное свойство гармонических функций используем ниже для оценки напряжений на границах отверстий.

3. Рассмотрим сначала в качестве F выражение (1.4), с точностью до коэффициента равное квадрату интенсивности касательных напряжений и отвечающее критерию пластичности Мизеса.

Введем вспомогательную функцию

$$\omega = \sigma_x + \sigma_y \tag{3.1}$$

которая, как известно (см., например, [10]), является гармонической. С учетом условий (1.1) и равенства $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_n + \sigma_t$ будем иметь

$$\Delta\omega = 0, \quad (x, y) \in G + \Gamma, \quad (\omega)_\Gamma = \sigma_t, \quad (\omega)_\infty^{\infty} = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{3.2}$$

где Δ — оператор Лапласа. Используя далее инвариантность выражения (1.4) относительно перехода от осей xy к направлениям n и t и граничные условия (1.1), приходим к следующей формуле для граничных значений F:

$$(F)_\Gamma = \sigma_t^2 \tag{3.3}$$

Применяя к функции ω, определенной соотношениями (3.2), отмеченное свойство гармонических функций (2.2), и сопоставляя выражения (3.2), (3.3) для граничных значений F и ω, получим, что минимум максимальных значений $|\omega|$ и F на контуре Γ достигается тогда и только тогда, когда напряжение σ_t постоянно вдоль контура и равно

$$(\sigma_t)_\Gamma = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{3.4}$$

В [5] (см. также [6]) показано, что контуры Γ, удовлетворяющие условию (3.4), образуют однопараметрическое семейство эллипсов $x^2\sigma_1^{-2} + y^2\sigma_2^{-2} = \lambda^2$, где λ^2 — параметр.

Покажем теперь, что выполнение равенства (3.4) является необходимым и достаточным условием оптимальности в задаче (1.1) — (1.3), (1.6). Для этого достаточно будет доказать, что для контуров Г, удовлетворяющих условию (3.4), максимум функции F, рассматриваемой в области $G + \Gamma$, достигается на контуре Г и поэтому

(3.5) $$\max_{(x,\, y) \in G+\Gamma} F = \max_{(x,\, y) \in \Gamma} F$$

Действительно, из предполагаемого равенства (3.5) и того, что для произвольных контуров Г максимум F в области $G + \Gamma$ не меньше максимума F на Г, следует, что необходимое и достаточное условие (3.4) минимальности максимального значения F на Г будет также необходимым и достаточным условием минимальности максимального значения F в области $G + \Gamma$, причем $F_* = \min_\Gamma \max_{(x,\, y)\in\Gamma} F$.

Воспользуемся комплексным представлением компонент тензора напряжений через потенциалы $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ Колосова — Мусхелишвили ([10])

(3.6) $$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]$$
$$z = x + iy, \; \bar{z} = x - iy$$

При выполнении условия (3.4) функция $\omega = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$ и, следовательно, $\Phi'(z) = 0$. Уравнения (3.6) преобразуются к виду ([6])

(3.7) $$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = 2\Psi$$

Второе равенство (3.7) помножим на комплексно-сопряженное выражение. С учетом равенства (3.7) будем иметь

(3.8) $$Q \equiv (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4(\tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y) = 4\Psi\overline{\Psi}$$

Заметим, что функция Q только коэффициентом при втором слагаемом отличается от выражения для F. Выразим F через Ψ и $\overline{\Psi}$. Для этого используем формулы (1.4), (3.8). Имеем

(3.9) $$F = {}^3/_4 Q + {}^1/_4 (\sigma_1 + \sigma_2)^2 = 3\Psi\overline{\Psi} + {}^1/_4 (\sigma_1 + \sigma_2)^2$$

Представим далее функции Ψ и $\overline{\Psi}$ в виде $\Psi = u + iv$, $\overline{\Psi} = u - iv$, где величины u и v удовлетворяют условиям Коши — Римана. Тогда формула (3.9) имеет вид $F = 3(u^2 + v^2) + {}^1/_4(\sigma_1 + \sigma_2)^2$. К полученному выражению применим оператор Лапласа. Выполняя элементарные преобразования и учитывая условия Коши — Римана, а также вытекающие из них равенства $\Delta u = \Delta v = 0$, нетрудно показать, что $\Delta F = 12 (\nabla u)^2 \geqslant 0$. Следовательно, F — супергармоническая функция, не достигающая максимального значения во внутренних точках области $G + \Gamma$. Сопоставление значений $(F)_\Gamma = (\sigma_1 + \sigma_2)^2$ и $(F)_\infty = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2$ приводит к выводу, что максимум F достигается на Г. Оптимальность равнонапряженных контуров доказана.

Отметим, что условие (3.4) является как необходимым, так и достаточным условием глобального оптимума.

4. Предположим теперь, что в пластинке имеется n отверстий, ограниченных контурами Γ_k ($\Gamma = \Sigma\Gamma_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$). Граничные условия на Г и условия на бесконечности имеют вид (1.1). В рассматриваемом случае применение свойства (2.2) позволяет показать, что минимум максималь-

ного значения F на Γ достигается при выполнении условия (3.4). Заметим, что формы равнонапряженных контуров, удовлетворяющих (3.4), найдены в случае двух отверстий, а также для некоторых периодических систем отверстий в [6]. Далее отметим, что доказательство неравенства $\Delta F \geqslant 0$ не зависело от связности области $G + \Gamma$. Поэтому и при наличии n равнонапряженных отверстий максимум F (в области $G + \Gamma$) достигается на Γ. Следовательно, в рассматриваемом случае равнонапряженные отверстия также будут оптимальными.

5. Рассмотрим теперь случай, когда F задается выражением (1.5), что отвечает критерию пластичности Треска. Граничные значения для напряжений и условия в бесконечно удаленной точке будем предполагать прежними. Для рассматриваемого функционала можно показать, что граничные значения F на Γ определяются] той же формулой $(F)_\Gamma = \sigma_t^2$, что и в п. 3. Поэтому остается верным утверждение, что для равнонапряженных контуров достигается минимум максимального значения F на контуре Γ. Доказательство же наравенства $\Delta F \geqslant 0$ становится более кратким, так как в рассматриваемом случае $F = Q$. Имеем $\Delta F = 16\,(\nabla u)^2 \geqslant \geqslant 0$. Таким образом, равнонапряженные отверстия оказываются оптимальными и в смысле критерия Треска.

6. Рассмотрим более общую зависимость F от инвариантов тензора напряжений I_1, I_2, предполагая неотрицательность первой и второй частной производной F по I_2, т. е.

$$F = F(I_1, I_2), \quad \partial F \,/\, \partial I_2 \geqslant 0, \quad \partial^2 F \,/\, \partial I_2^2 \geqslant 0 \tag{6.1}$$

На основании свойств однородности и положительности F, а также с учетом равенств $(I_1)_\Gamma = \sigma_t$, $(I_2)_\Gamma = 0$ приходим к следующему выражению: $(F)_\Gamma = a\sigma_t^2$, где $a > 0$. Использование представления для $(F)_\Gamma$ и отмеченного в п. 2 свойства гармонических функций приводит непосредственно к выводу, что для равнонапряженных контуров достигается минимум максимума F на Γ. Учтем далее условия (6.1) и то, что в случае равнонапряженных контуров величина $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2$ в области $G + \Gamma$. Проводя выкладки, полностью аналогичные тем, которые делались в п. 3, можно показать, что для пластинки с отверстиями, удовлетворяющими условию (3.4), справедливо неравенство

$$\Delta F = \frac{d^2F}{dI_2^2}(\nabla I_2)^2 + 4\frac{dF}{dI_2}(\nabla u)^2 \geqslant 0, \quad (x, y) \in G + \Gamma \tag{6.2}$$

Функция F при сделанных предположениях оказывается супергармонической и, следовательно, не достигает максимума во внутренних точках области $G + \Gamma$. Сравним значения $F(\sigma_1 + \sigma_2, 0)$ и $F(\sigma_1 + \sigma_2, -\sigma_1\sigma_2)$, принимаемые функцией F на Γ и в бесконечно удаленной точке. Замечая, что $(I_2)_\infty \leqslant (I_2)_\Gamma$ и используя первое из неравенств (6.1), получим $(F)_\Gamma > > (F)_\infty$. Таким образом, в рассматриваемом случае справедливо равенство (3.5). Отсюда вытекает, что оптимальными являются равнонапряженные отверстия.

7. Проведенные в п. 3 рассмотрения могут быть распространены на случай, когда к границам отверстий приложено давление σ_0 ($\sigma_0 \geqslant 0$ —

заданная постоянная), т. е. $(\sigma_n)_\Gamma = -\sigma_0$. Второе граничное условие на Г и условия в бесконечно удаленной точке задаются соотношениями (1.1). Используя данные граничные условия и формулу (3.1), получим выражение для значений функции F на контуре отверстия $(F)_\Gamma = \sigma_t^2 + \sigma_0\sigma_t + \sigma_0^2$. На основании приведенной формулы для $(F)_\Gamma$ и свойства (2.2) можно показать, что минимум максимального значения $(F)_\Gamma$ реализуется тогда и только тогда, когда $(\sigma_t)_\Gamma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$. Нетрудно заметить, что неравенства $(F)_\Gamma > (F)_\infty$, $\Delta F \geqslant 0$, а следовательно и соотношение (3.5), справедливы в данном случае. Поэтому равнонапряженные отверстия, удовлетворяющие условию $(\sigma_t)_\Gamma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$, являются оптимальными.

Задачи, подобные рассмотренным в данной работе, возникают при отыскании оптимальных форм упругих тел конечных размеров при построении оптимальных «сопряжений» для тел с резко меняющейся геометрией и высокой концентрацией напряжений и при проектировании оптимальных подкреплений отверстий [11–16].

Автор благодарит В. М. Ентова, Ф. Л. Черноусько и Д. И. Шермана за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 29 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В.* Об одной вариационной задаче с неизвестной границей и определении оптимальных форм упругих тел. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
2. *Куршин Л. М.* К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 3.
3. *Banichuk N. V., Karihaloo B. L.* Minimum-weight design of multipurpose cylindrical bars. Internat. J. Solids and Structures, 1976, vol. 12, No. 4.
4. *Баничук Н. В.* Об одной двумерной задаче оптимизации в теории кручения упругих стержней. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
5. *Черепанов Г. П.* Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1965.
6. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
7. *Іванов Г. М., Космодаміанский О. С.* Обернена подвійноперіодична задача плоскої теорії пружності. Доп. АН УССР, 1972, № 9.
8. *Космодамианский А. С.* Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. Изд-во Донецк. ун-та, 1972.
9. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1976.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
11. *Hutchinson T. W., Niordson F. I.* Designing vibrating membranes. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
12. *Neuber H.* Der zugbeanspruchte Flachstab mit optimalem Querschnittsübergand. Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1969, Bd 35.
13. *Neuber H.* Zur Optimierung der Spannungskonzentration. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
14. *Tvergaard V.* On the optimum shape of a fillet in a flat bar with restrictions. In: Optimization in structural design. Berlin — Heidelberg — New York, Springer-Verlag, 1975. (Internat. Union of theoretical and Appl. Mech. Sympos., Warsaw (Poland, 1973).)
15. *Александров А. Я.* Некоторые решения задач об эквивалентном и равнопрочном подкреплениях отверстий в пластинках. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. М., ВИНИТИ, 1974.
16. *Wheeler L.* On the role of constant-stress surfaces in the problem of minimizing elastic stress concentration. Internat. J. Solids and Structures, 1976, vol. 12, No. 11.